الثاني، فإن x_{23} يصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية، لأن المتوافر المتبقي للصف الثاني يكون الآن صفراً. عوضاً عن ذلك، إذا شطب الصف الثاني، x_{32} سيصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية.

الجدول ٥-٥

	1	2	3	4		
1	5	5			~~10~~	5
2		5	0		~~5~~	0
3			8	7	15	
	5	~~10~~ 5	8	7		

إن الحلين الأساسين اللذين تم الحصول عليهما باستخدام هذه الطريقة للمسألتين المذكورتين في الجدول ٥-٤ والجدول ٥-٥ ، يحتويان العدد الصحيح والمناسب من المتغيرات الأساسية، أي $m+n-1 = 6$. إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية تقود دائماً إلى العدد المناسب من المتغيرات الأساسية.

٥-٤-٢ طريقة أدنى كلفة The Least-Cost Method

إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية، التي قدمت في الفقرة السابقة، ليس من الضروري أن تعطي حلاً أساسياً أولياً جيداً لمسائل النقل. لأنها لم تأخذ في الحسبان كلف النقل، بينما الطرق التالية تعتمد على هذه الكلف في عملية استنتاج الحل كما سنرى. يمكن تلخيص خطوات طريقة أدنى كلفة كما يلي:

١- يخصص أكثر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب للمتغير الذي له أقل كلفة واحدية في كل الجدول، (في حال التساوي يتم الاختيار بشكل عشوائي).

٢- يشطب العمود أو الصف المحقق. كما هو الحال في طريقة الزاوية الغربية الشمالية، لدى وجود عمود وصف محققين في آن واحد، يشطب أي

واحد منهما.

٣- يعاد ترتيب المتوافر والمطلوب لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، تعاد الخطوات من البداية، تنتهي خطوات الحل عند بقاء صف أو عمود واحد غير مشطوب.

استخدمت المسألة المقدمة في الجدول ٥-٣ لتوضيح استخدام طريقة أدنى كلفة. يبين الجدول ٥-٦ الحل الأساسي الأولي الذي استنتج بهذه الطريقة.

الجدول ٥-٦

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 0	0 15	20	11 0	15
2	12	7	9 15	20 10	25
3	0 5	14	16	18	5
المطلوب	5	15	15	10	

يمكن تلخيص خطوات الحل على النحو التالي: x_{12} و x_{31} هما المتغيران المصاحبان لأدنى كلفة واحدية ($c_{12}=c_{31}=0$). في حال التساوي، كما هو الحال في هذا المثال، يتم الاختيار بشكل عشوائي، باختيار x_{12}. وحسب المتوافر في الصف الأول، والمطلوب في العمود الثاني، نرى أن $x_{12}=15$، وهذا يحقق الصف الأول والعمود الثاني. بشطب العمود الثاني، يكون المتوافر المتبقي في الصف الأول يساوي الصفر.

بعد ذلك، المتغير x_{31} له أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة. وبالتالي $x_{31}=5$ يحقق الصف الثالث والعمود الأول. بشطب الصف الثالث، يكون المطلوب المتبقي في العمود الأول يساوي الصفر.

إن المتغير x_{23} يناظر أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة ($c_{23}=9$). وحسب المتوافر

والمطلوب يمكن إعطاء $x_{23}=15$، وهذا بدوره يشطب العمود الثالث، لأن المطلوب المتبقي فيه هو صفر وحدة، بينما المتبقي من المتوافر في الصف الثاني هو 10 وحدات.

أدنى كلفة عنصر غير مشطوب تناظر $c_{11}=10$. وبما أن المتوافر المتبقي في الصف الأول والمطلوب المتبقي في العمود الأول كلاهما صفر، $x_{11}=0$. يشطب العمود الأول، والمتوافر المتبقي في الصف الأول هو صفر.

يتم التعرف على بقية المتغيرات الأساسية، وهي $x_{14}=0$ و $x_{24}=10$.

إن الكلفة المصاحبة لهذا الحل تكون كما يلي:

$$x_0= 0*10 + 15*0 + 0*11 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ، إن الحل الأساسي الأولي المشتق بوساطة طريقة أدنى كلفة، أفضل من الحل المشتق بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية، وهذا بديهي لأنه تم اعتبار الكلف في التوزيع. أيضاً يجب ملاحظة المتغيرات الأساسية التي تساوي قيمها الصفر، وهي ضمن الحل، حيث يجب أن تكون عدد المتغيرات الأساسية في أي حل مساوية: $m + n - 1$.

هذا وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن تطبيق طريقة **أدنى كلفة في الصف**، أو **طريقة أدنى كلفة في العمود**، ويستنبط في كل من هاتين الطريقتين أيضاً حلاً أساسياً أولياً.

بشكل عام يمكن القول أن الحلول الأساسية الأولية الناتجة عن الطرق التي تراعي كلف النقل عند إيجادها تكون أفضل من طريقة الزاوية الغربية الشمالية بـالرغم مـن سهولتها وسرعتها، إلا أن العبرة ليست بالسرعة إنما بأن يكون الحل الأولي الناتج أقرب ما يمكن من الحل المثالي، وذلك بغية تقليل عدد الخطوات لدى اختبارات المثالية كمـا سنرى لاحقاً.

لا يوجد حتى الآن معيار للمفاضلة بين هذه الطرق لدى حل مسألة ما، إلا أنـه يفضل استخدام إحدى الطريقتين الأخيرتين، لأن الحلول الناتجة عن استخدامهما تكون قريبة من المثالية إن لم تكن كذلك.

٥-٥ اختبارات المثالية

وفق خطوات تقنية مسألة النقل التي قدمت في الفقرة ٥-٣، فإن عملية إيجـاد حل أساسي أولي ملائم، يعد بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل هذه المسألة. أمـا الخطوة الثانية فهي اختبار ما إذا كان هذا الحل هو الحل المثالي أم لا؟ أي اختبار مثالية الحل. إذا اتضح أن الحل مثالياً، تكون المسألة قد حلت، أما إذا تبين أن الحل غير مثالي فإن تقنية مسألة النقل تتطلب العمل على تحسينه بغية الوصول إلى الحل المثالي.

يجب التوضيح منذ البداية على أن اختبارات المثالية في مسألة النقـل، هـي في

مفهومها وأساسها، تتشابه إلى حد كبير مع اختبارات المثالية التي سبق اتباعها في خوارزمية السمبلكس، وهي منهجياً تتبع نفس خطوات تحسين الحل الأساسي الأولي لطريقة السمبلكس. أي يتم تقويم كل متغير غير أساسي في الجدول من حيث مقارنة الربح الذي يمكن أن يحققه فيما لو دخل الحل وأصبح أساسياً. لدى الوصول إلى النقطة التي لايُقدِّم فيها أيٌّ من المتغيرات غير الأساسية، أيَّ تحسين إضافي على الحل، فيما لو دخله، يكون بذلك قد تم التوصل إلى الحل المثالي.

أسوة بطريقة السمبلكس، فإن المتغيرات الأساسية في كل عملية، هي تلك التي لها قيمٌ موجبة، أو تلك التي أعطيت قيماً صفرية، وذلك من أجل أن يكون عدد المتغيرات الأساسية يساوي m+n-1 ، أو تلك التي تناظر الخلايا المشغولة في جدول مسألة النقل. أما المتغيرات غير الأساسية فهي تلك التي تناظر الخلايا غير المشغولة أو الفارغة في الجدول. ولذلك يتم حساب ومقارنة كلف النقل لكل خلية فارغة.

قبل الدخول في تفاصيل وخطوات الطرق التي يمكن أن تتبع في اختبار المثالية، يجب توضيح شرط المثالية في مسائل النقل بشكل أفضل، من خلال مثال بسيط، وذلك عوضاً عن تطبيقه على المصفوفة الأصلية الكبيرة نسبياً اختصاراً للعمليات الحسابيةالمطلوبة، ثم ينقل هذا المفهوم للتطبيق على المسألة قيد الدراسة.

مثال: بفرض أن الجدول ٥-١٥ يمثل الحل الأساسي الأولي لمسألة نقل ما، والمطلوب إجراء اختبارات المثالية عليها، وذلك وفقاً للقاعدة التي طرحت أعلاه.

الجدول ٥-١٥

المنتج	1	2	المتوافر
1	3 50	6 10	60
2	4	10 60	60
المطلوب	50	70	

يتضح من الجدول ٥-١٥ الذي يقدم حلا أساسياً اولياً ملائماً، بأن المستغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) هي x_{11},x_{12},x_{22} ، والمتغير غير الأساسي الوحيد (الخليـة غير المشغولة) هو x_{21}، لاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية يساوي $m+n-1=3$ ، وهـو المطلوب من أجل إمكانية الاستمرار في الحل. والكلفة الكلية لهـذا التوزيـع هـي: $x_0=810$. يجب اختبار المتغير غير الأساسي x_{21}، فيما إذا كان يحقق شرط المثالية أم لا، (كما هي الحال في طريقة السمبلكس). أي إذا كانت كلفة دخوله كمتغير أساسـي تحسن من قيمة الحل الحالي (يجب إدخاله للحل بأكبر قيمة ممكنة ويتـابع الحـل)، أم تسيء إليه (يكون الحل الحالي هو الحل المثالي).

لنتخيل أننا رفعنا قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد، وهذا يقود إلى انتـهاك لقيود المنابع والمصارف، وحتى يتم المحافظة عليها محققة علينا تعـديل قـيم المستغيرات الأساسية كما هو موضح في الجدول ٥-١٦.

الجدول ٥-١٦

المنابع		1	2	المتوافر
	1	50 (-) [3]	10 (+) [6]	60
	2	x_{21} (+) [4]	60 (-) [10]	60
المطلوب		50	70	

إن رفع قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد يترتب عليه التغيرات التالية مجتمعة كما هو موضح في الجدول ٥-١٦

أ- تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة.

ب- زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة.

ت- تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة.

وهذا التخفيض والزيادة سينعكس حتماً على كلفة التوزيع، ويجب معرفة فيمـا

إذا كانت محصلة التكاليف في صالح هذا التغيير أم لا؟ إن الترجمة الفعلية لهذه الـــتغيرات يمكن حسابها كما يلي:

زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +4

تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -3

زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +6

تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -10

وبالتالي تكون المحصلة النهائية للتغيير +4-3+6-10= -3

وهذا يعني أنه لو فكرنا في زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحـــدة، فـــإن هـــذا سيترتب عليه انخفاض كلفة النقل الكلية لذلك الحل الأولي بمقدار 3 واحدات كلفـــة، وهذا يعني أن الحل الأولي غير مثالي، حيث يمكن تخفيض كلفته كما رأينا، ويكون هذا المتغير هو المتغير الداخل. من ناحية أخرى، يجب زيادة قيمة هذا المتغير بأقصى كميـــة ممكنة حتى يكون التوفير في كلفة النقل الكلية أفضل مايمكن، أي ماهي القيمة القصوى للمتغير x_{21} الذي يمكن أن يأخذها؟ إن تحديد الكمية (الحد الأقصى) الـــتي يمكـــن أن تعطى إلى المتغير x_{21} تتحدد أيضاً من خلال حركة التغيرات التي استخدمت في حساب المحصلة النهائية لكلفة التغيير. وكما ذكرنا إن دخول المـــتغير x_{21} كمـــتغير أساســـي سيترتب عليه تغييرات في المتغيرات الأساسية من تخفيض وزيادة، يمكن أن يعـــبر عـــن ذلك بإشارة (-) وإشارة (+) كما هو موضح في الجدول ٥-١٦ وفي الزاوية الـــيمنى السفلية من كل خلية تتأثر بهذا التغيير. طالما أن هناك قيداً بعدم السلبية في قيم جميـــع المتغيرات، إذاً يتعين أن يدخل المتغير الداخل بأقصى قيمة له، شريطة ألا يترتب علـــى ذلك أن تصبح قيمة أي متغير سالبة، أي تكون قيمته هي أقل قيمة لمتغير ذي إشـــارة سالبة في الدارة المرسومة. تطبيقاً لهذه القاعدة في هذا المثال البسيط، سنجد أن هنـــاك خليتين إشاراتهما سالبة وهما x_{11} و x_{22} ، قيمة المتغير الأول هي 50 وحدة، وقيمة الثاني

هي 60 وحدة. إذاً الحد الأقصى الذي يمكن تعيينه للمتغير الداخل x_{21} هو 50 وحدة، كما هو موضح في الجدول ٥-١٧

الجدول ٥-١٧

		1	2	المتوافر
الناتج	1	(3)	(6) 60	60
	2	(4) 50	(10) 10	60
المطلوب		50	70	

وكذلك الأمر فإن المتغير الذي ستؤول قيمته إلى الصفر في الدارة المرسومة سيكون هو المتغير الراحل، وهو في هذه الحالة المتغير x_{11} ، وأما كلفة النقل بعد التحسين فهي $x_0=660$ ، أي هناك تحسين مقداره 150 وحدة كلفة كما هو متوقع.

يوضح هذا المثال البسيط الخطوات الأساسية في اختبارات المثالية لمسألة النقل، وكذلك خطوات تحسين الحل الجاري، ولكن يتعين علينا أن نستعرض ونتعرف على خطوات ومنهاج الطرق التي يمكن استخدامها لاختبارات المثالية في هذا النوع من المسائل، حيث يمكن القيام باختبارات المثالية لمسائل النقل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

١- طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

٢- طريقة المضاريب Multipliers Method

وفيما يلي المنهاج الذي تبنته كل منهما في اختبار المثالية.

٥-٥-١ طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

عندما تكون مسألة النقل المطلوب حلها كبيرة مقارنة مع المثال السابق والمكون من أربع خلايا فقط، يمكن التصور أن نمط التغيير المطلوب إحداثه لإعادة التخصيص يكون صعباً بعض الشئ، ولهذا توجد بعض الطرق التي تعالج هذا التصور بمنهجية

أسهل. وإحدى هذه الطرق يطلق عليها طريقة حجر المسافات أو التدرج، كما ترجمت في بعض المراجع العربية باسم نقطة الارتكاز أو حجر الوطء.

يمكن أن يُعَدُّ الحل الأساسي الأولي الذي تم استنتاجه من استخدام إحدى الطرق السابقة هو الحل الجاري، والطريقة التي تمكننا من اختبار هذا الحل الجاري هل هو مثاليٌّ أم لا؟ تكمن في اختبار جميع المتغيرات غير الأساسية، وهل إدخالها للحل كمتغيرات أساسية يحسن من قيمة معادلة الهدف أم لا؟ في حال وجود متغير كهذا سوف يتم اختياره على أنه المتغير الداخل، وفي هذه الحالة، أحد المتغيرات الأساسية يجب أن يترك الحل ويصبح المتغير الراحل (كطريقة السمبلكس).

لنتمكن من إيجاد المتغير الداخل والمتغير الراحل، يجب تعريف دارة مغلقة لكل متغير غير أساسي. تتألف هذه الدارة من عدد من القطع المستقيمة المتتالية الأفقية والرأسية وليست القطرية أو المتقاطعة. نهايات هذه القطع المستقيمة يجب أن تكون متغيرات أساسية، فيما عدا بداية ونهاية هذه الدارة يجب أن تبدأ وتنتهي في المتغير غير الأساسي قيد الاختبار. ولكن هذا لا يمنع مرور المسار على خلايا متغيرات أساسية دون المساس بها أو المرور بخلايا متغيرات غير أساسية دون الإضافة إليها، أي لا تكون ضمن دارة المتغير قيد الاختبار، وذلك حفاظاً على الكميات المتوافرة في الصفوف والكميات المطلوبة في الأعمدة. ينبغي ملاحظة أن المسار لكل متغير غير أساسي هو عبارة عن دارة مغلقة أو مضلع مغلق جميع رؤوسه هي متغيرات أساسية، عدا رأس واحد وهو المتغير غير الأساسي المطلوب تقويمه. كما يمكن الإثبات والبرهنة على أنه يوجد مضلع مغلق واحد لكل متغير غير أساسي، أي لا يكون هناك سوى مسار دارة مغلقة واحدة لكل متغير غير أساسي في الحل.

يبين الجدول ٥-١٨ الحل الأساسي الأولي الملائم، الذي تم الحصول عليه بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية.

x_{21}	$x_{21}-x_{11}-x_{12}-x_{22}-x_{21}$	-5
x_{31}	$x_{31}-x_{11}-x_{12}-x_{22}-x_{24}-x_{34}-x_{31}$	-15
x_{32}	$x_{32}-x_{22}-x_{24}-x_{34}-x_{32}$	+9
x_{33}	$x_{33}-x_{23}-x_{24}-x_{34}-x_{33}$	+9

باستعراض قيم صافي التغيير في الكلفة للمتغيرات الستة التي تم تقويمها، يتضح أن هناك قيماً موجبة وقيماً سالبة (ويمكن أن تكون هناك قيمٌ صفرية أيضاً)، وهذا يعني مايلي:

أ- إذا كانت قيمة صافي التغيير موجبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً سوف يسيء الى الكلفة، ويبعد الحل عن المثالي.

ب- إذا كانت قيمة صافي التغيير صفرية، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً لن يسيء ولن يحسن الكلفة، وتبقى كلفة الحل كما هي (حل منحل سيشرح مضمونه لاحقاً).

ت- إذا كانت قيمة صافي التغيير سالبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً، سوف يترتب عليه تخفيض الكلفة بمقدار صافي التغيير لكل وحدة يتم تخصيصها لهذا المتغير، ويقرب الحل من المثالي. ومعنى ذلك أنه إذا ظهرت قيمٌ سالبة لصافي التغيير لأي متغير غير أساسي، فإن هذا يعني أن الحل الحالي غير مثالي.

وبالعودة إلى الجدول ٥-١٩ يمكن القول بأن الحل الأساسي الأولي المبين بالجدول ٥-١٨ هو حل غير مثالي ويجب تحسين الحل.

يمكن اتباع الخطوات التالية لتحسين الحل الجاري عندما يكون غير مثالي:

١- تحديد المتغير الداخل.

٢- تحديد المتغير الراحل، وقيمته تكون هي قيمة المتغير الداخل.

٣- تعديل جدول مسألة النقل، والبدء بعملية جديدة.

١- تحديد المتغير الداخل:

المتغير الداخل هو المتغير غير الأساسي ذو أكبر قيمة صافي تغيير أو كلفة دخول بإشارة سالبة، لأنه يقدم أقصى توفير ممكن في معادلة الهدف مقارنةً مع بقية المتغيرات غير الأساسية والتي لها قيمة صافي تغيير سالبة.

بتطبيق هذا المعيار على المثال قيد الحل، يكون المتغير x_{31} هو المتغير الداخل حيث كلفة دخوله للحل هي 15- وهي أكبر قيمة بإشارة سالبة.

٢- تحديد المتغير الراحل:

المتغير الراحل هو أحد المتغيرات الأساسية وضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، وهو المتغير الذي له أصغر قيمة وإشارته سالبة (-)، أي هو المتغير الذي ستقل قيمته للصفر في حال إجراء عملية التعديل لقيم المتغيرات لتتلاءم مع الحل الجديد، يمكن أن يكون أي من المتغيرات x_{11} و x_{22} و x_{34} المتغير الراحل، لأنها جميعاً قيمها 5 وحدات، وذات إشارة سالبة، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{34} ليكون المتغير الراحل. لاحظ أن قيمة المتغير الداخل في الجدول الجديد تكون 5 وحدات وهي قيمة المتغير الراحل حالياً.

٣- تعديل جدول مسألة النقل:

بعد اختيار المتغير الداخل وهو x_{31}، وتحديد أقصى قيمة له وهي 5 وحدات، يجب تعديل جدول النقل بحيث يكون الجدول الجديد محققاً لقيود المنابع وقيود المصارف. أي إعطاء قيمة $x_{31}=5$ ، وإنقاص قيمة المتغير x_{11}، وزيادة قيمة المتغير x_{12}، وإنقاص قيمة المتغير x_{22}، وزيادة قيمة المتغير x_{23}، وإنقاص قيمة المتغير x_{34} كله بمقدار 5 وحدات. لاحظ أن المتغير x_{34} هو المتغير الراحل. يبين الجدول ٥-٢٠ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢٠

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 0 -	0 15 +	20 +18	11 -2	15
2	12 -5 +	7 0 -	9 15	20 10	25
3	0 5	14 +24	16 +24	18 +15	5
المطلوب	5	15	15	10	

وبناءً على هذا التعديل، فإن تكاليف النقل الكلية تكون:

$$x_0 = 0*10 + 15*0 + 0*7 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$$ وحدة كلفة

بمقارنة هذه الكلفة مع كلفة الحل الأولي الذي تم إعداده باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية، نجد أن الكلفة الكلية قد قلت بمقدار $15*5 = 75$ وحدة كلفة.

يمكن اختصار هذه الحسابات على الجدول، وذلك بحساب كلفة دخول كل متغير غير أساسي من دارته المرافقة له، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٠. بالتالي يمكن إيقاف العمليات إذا كانت جميع الكلف موجبة أو أصفار، ويكون الحل الجاري هو الحل المثالي، وإلا يجب اختيار المتغير غير الأساسي ذو الكلفة الأكبر بالسالب على أنه المتغير الداخل.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الداخل يجب أن يكون x_{21} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (5-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية. ومن دارته المرافقة: ($x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21}$)، نجد أن كلا المتغيرين x_{11} و x_{22} مرشحان لأن يكونا المتغير الراحل، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{11} بشكل عشوائي ليرحل عن الحل، بما أن قيمته تساوي الصفر، فلن يكون هناك أي تعديل على قيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة، ولكن سيرحل المتغير x_{11} عن

الحل ويدخل المتغير x_{21} للحل ولكن بقيم صفرية (لاحظ انحلال الحل). يبين الجـــدول ٥-٢١ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢١

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 +5	0 **15** -	20 +18	11 -2 +	15
2	12 **0**	7 **0** +	9 **15**	20 **10** -	25
3	0 **5**	14 +19	16 +19	18 +10	5
المطلوب	5	15	15	10	

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من دارالها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢١.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الـــداخل يجب أن يكون x_{14} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (2-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، ومن دارته المرافقـــة: $(x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14})$، نجد أن المتغير x_{24} هو المتغير الراحل، وبما أن قيمته تساوي 10، إذاً يجب تعديل قـــيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، أي إضافة 10 لقيم المتغيرات ذات إشارة (+)، وطرح 10 من قيم المتغيرات ذات إشـــارة (-) . يـــبين الجـــدول ٥-٢٢ هـــذه التعديلات.

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من دارالها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٢.

الجدول ٥-٢٢

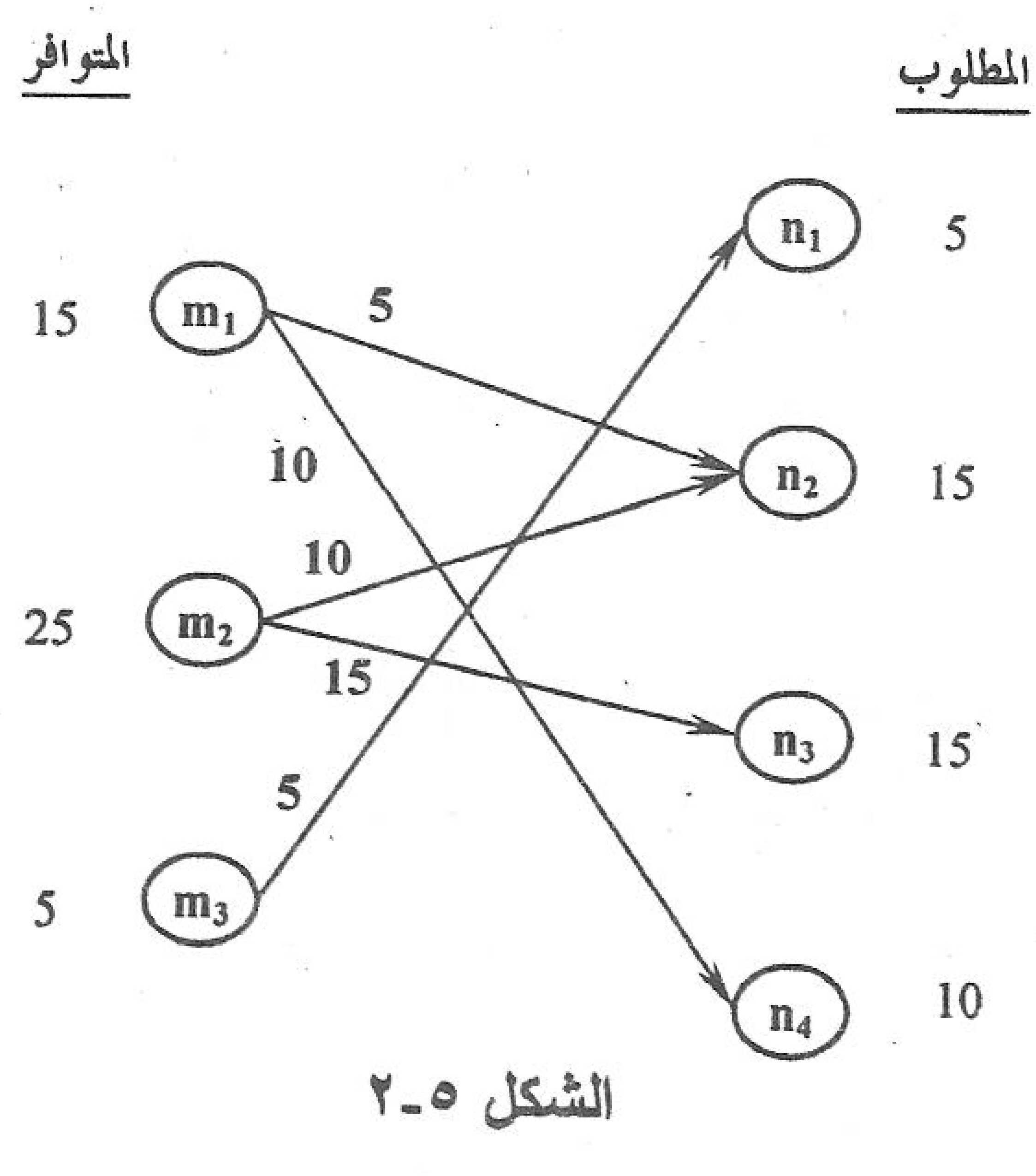
المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 +5	0 **5**	20 +18	11 **10**	15
2	12 **0**	7 **10**	9 **15**	20 +2	25
3	0 **5**	14 +19	16 +19	18 +12	5
المطلوب	5	15	15	10	

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن جميع هذه الكلف $\bar{c}$ موجبة وهذا يعني تحقق شرط المثالية، والحل المثالي هو: $x_{12}=5$, $x_{14}=10, x_{21}=0, x_{22}=10, x_{23}=15, x_{31}=5$ ، كما هو موضح بالشكل ٥-٢.

يمكن حساب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$x_0 = 5*0 + 10*11 + 0*12 + 10*7 + 15*9 + 5*0 = 315$ وحدة كلفة



الشكل ٥-٢