نموذج النقل

٥-١ مقدمة

تُعَدُّ مسألة النقل من المسائل الهامة في بحوث العمليات، ويمكن عَدُّها نوعاً من أنواع البرمجة الخطية. يتضح من التسمية أن الهدف هو إيجاد أدنى كلفة لنقل منتج أو مادة ما من عدد من المنابع إلى عدد من المصارف. مثلاً، يمكن نقل منتج ما من عدة مصانع (منابع) إلى عدة ورش رئيسية (مصارف)، أو توزيع أعمال معينة على آلات محددة، أو توزيع موظفين فازوا بمسابقة للتعيين في وظائف مختلفة. جميع هذه المسائل وسواها يمكن أن تصاغ بالاعتماد على تعريف مسألة النقل. وهذا ما ينطبق على مسائل أخرى عديدة، مثل شبكات توزيع المياه من عدد من المستودعات الرئيسية، وكذلك الأمر بالنسبة لتخديم مناطق مختلفة بأجهزة الهاتف من قبل عدة مقاسم رئيسية، وتوزيع العمال أو الأعمال على آلات ضمن ورشة ما لتنفيذ عدد محدد من الأعمال، وكذلك مسألة الدفاع الجوي وغيرها. يمكن استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة. ولكن مميزاتها الخاصة تمكن من حلها بطرق أكثر سهولة.

٥-٢ نموذج مسألة النقل

لو فرضنا أنه لدينا m منبع و n مصرف وأن:

a_i هي عدد الوحدات المتوافرة في المنبع i، حيث أن $i=1,2,\ldots,m$.

b_j هي عدد الوحدات المطلوبة في المصرف j، حيث أن $j=1,2,\ldots,n$.

c_{ij} هي كلفة نقل الوحدة من المنتج على الطريق (i,j) الذي يصل بين المنبع i والمصرف j.

الجدول ٥-٢

المصارف j

المنابع i	1	2	3	المتوافر
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
المطلوب	b_1	b_2	b_3	

يُعَدُّ الاتزان أحد أهم خواص نموذج مسألة النقل، لأنه يوضح أنه من الممكن تلبية متطلبات السوق إذا وفقط إذا كانت الكمية الموردة من المخازن مساوية على الأقل الطلبات الكلية في الأسواق. حيث يجب أن يتساوى مجموع المتوافر في كل المنابع مع مجموع المطلوب في كل المصارف، أي أن العلاقة التالية يجب أن تكون محققة، لأن جميع تقنيات الحل تعتمد على اتزان النموذج:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

إذا لم يكن النموذج متزناً، وهذا هو الحال في المسائل الواقعية، يمكن فرض وجود منابع أو مصارف وهمية إضافية بطلب أو متوافر وهمي يساوي الفرق بين المتوافر والمطلوب، بحيث يصبح النموذج متزناً. سوف توضح هذه النقطة في فقرة تالية.

٥-٣ تقنية مسألة النقل

يمكن إيجاز الخطوات الأساسية لتقنية مسألة النقل مقارنة مع حل أي برنامج خطي كما يلي:

١- إيجاد حل أساسي أولي ملائم.

٢- إذا كانت جميع المتغيرات غير الأساسية تحقق شروط المثالية (كما هي الحال في طريقة السمبلكس) ينتهي الحل، وإلا يجب إيجاد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية، والذي دخوله للحل كمتغير أساسي يؤمن أفضل تحسين لقيمة معادلة الهدف. تابع للخطوة رقم ٣.

٣- باستخدام شروط الملاءمة، يجب إيجاد المتغير الراحل من بين المتغيرات الأساسية الحالية. ثم يتم إيجاد الحل الأساسي الجديد. يعاد تنفيذ الخطوة رقم ٢.

ستناقش هذه الخطوات بالتفصيل وذلك باستخدام المثال التالي:

ثلاثة مصانع رئيسية في مواقع جغرافية مختلفة. تنتج نوعاً معيناً من قطع الغيار، بطاقة إنتاجية بآلاف القطع 15 ,25 ,5. تغذي هذه المصانع الرئيسية أربعة مصانع فرعية بهذا المنتج، وحاجاتها له بآلاف القطع كما يلي 5 ,15 ,15 ,10، بمعرفة كلفة نقل المنتج الواحد من أي مصنع رئيسي لأي مصنع فرعي، المطلوب إيجاد الحل المثالي (الأقل كلفة) لمسألة توزيع هذا المنتج.

يمكن التعبير عن مسألة التوزيع هذه في شكل الجدول ٥-٣.

الجدول ٥-٣

		المصارف 1	2	3	4	المتوافر
[illegible]	1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
	2	12 x_{21}	7 x_{23}	9 x_{33}	20 x_{24}	25
	3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
المطلوب		5	15	15	10	

٥-٤ إيجاد الحل الأساسي الأولي

رأينا أن نموذج مسألة النقل يحتوي على معادلة قيد واحدة لكل منبع أو مصرف، أي يحتوي النموذج على m+n معادلة قيد، معادلة واحدة منها غير مستقلة، وذلك بسبب شرط التوازن (المتوافر = المطلوب). وبالتالي يكون لدينا m+n-1 معادلة مستقلة، وهذا يعني أن أي حل أساسي يجب أن يحتوي على m+n-1 متغير أساسي.

ثمة طرق عديدة يمكن استخدامها للحصول على الحل الأساسي الأولي الملائم، سوف يتم تقديم ومناقشة أربعة طرق منها في الفقرات التالية.

٥-٤-١ طريقة الزاوية الغربية الشمالية Northwest-Corner Method

تبدأ هذه الطريقة بتوزيع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب إلى المتغير x_{11} (المتغير الموجود في الزاوية الغربية الشمالية من الجدول). يشطب العمود أو الصف المحقق، وهذا يدل على أن بقية المتغيرات في العمود أو الصف تكون قيمها أصفاراً. في حال وجود عمود وصف محققين يشطب أي واحد منهما (وذلك من أجل توليد متغيرات أساسية تساوي أصفاراً بشكل أوتوماتيكي فيما لو وجدت). بعد تعديل قيم المتوافر والمطلوب، لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، توزع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب، إلى المتغير الموجود في الخلية الأولى من الصف أو العمود غير المشطوب. وهكذا حتى نصل إلى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب.

يمكن تلخيص تطبيق هذه الخطوات على المثال المعطى بالجدول ٥-٣ كما يلي:

١- $x_{11}=5$، وبالتالي يشطب العمود الأول، لا يحصل أي توزيع آخر إلى هذا العمود. الكمية المتبقية في الصف ١ تكون 10 وحدات.

٢- $x_{12}=10$، يشطب الصف ١، يتبقى 5 وحدات في العمود٢.

٣- $x_{22}=5$، يشطب العمود ٢، يتبقى 20 وحدة في الصف ٢.

٤- $x_{23}=15$، يشطب العمود ٣، يتبقى 5 وحدات في الصف ٢.

٥- $x_{24}=5$، يشطب الصف ٢، يتبقى 5 وحدات في العمود ٤.

٦- $x_{34}=5$، يشطب الصف ٣ أو العمود ٤، وبما أنه تبقى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب، تنتهي الخطوات.

يبين الجدول ٥-٤ حل البدء الأساسي الذي استنتج بهذه الطريقة هو:

$x_{11}=5$ ، $x_{12}=10$، $x_{22}=5$ ، $x_{23}=15$ ، $x_{24}=5$، $x_{34}=5$.

أما قيم المتغيرات المتبقية فهي أصفار، كما تحسب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$x_0=5*10 + 10*0 + 5*7 + 15*9 + 5*20 + 5*18 = 410$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ فإن كلف النقل من المنابع إلى المصارف لم تؤخذ ضمن اعتبارات الحل.

الجدول ٥-٤

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	15
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	25
3	[0]	[14]	[16]	[18] 5	5
المطلوب	5	15	15	10	

في بعض المسائل، عندما يتحقق عمود وصف في نفس الوقت، فإن المتغير الأساسي الذي يجب إضافته إلى الحل، يجب أن تكون قيمته صفراً. يبين الجدول ٥-٥ هذه النقطة من خلال مثال. العمود الثاني والصف الثاني تحققا معاً. إذا شطب العمود

الثاني، فإن x_{23} يصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية، لأن المتوافر المتبقي للصف الثاني يكون الآن صفراً. عوضاً عن ذلك، إذا شطب الصف الثاني، x_{32} سيصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية.

الجدول ٥-٥

	1	2	3	4		
1	5	5			~~10~~	5
2		5	0		~~5~~	0
3			8	7	15	
	5	~~10~~ 5	8	7		

إن الحلين الأساسين اللذين تم الحصول عليهما باستخدام هذه الطريقة للمسألتين المذكورتين في الجدول ٥-٤ والجدول ٥-٥ ، يحتويان العدد الصحيح والمناسب من المتغيرات الأساسية، أي $m+n-1 = 6$. إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية تقود دائماً إلى العدد المناسب من المتغيرات الأساسية.

٥-٤-٢ طريقة أدنى كلفة The Least-Cost Method

إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية، التي قدمت في الفقرة السابقة، ليس من الضروري أن تعطي حلاً أساسياً أولياً جيداً لمسائل النقل. لأنها لم تأخذ في الحسبان كلف النقل، بينما الطرق التالية تعتمد على هذه الكلف في عملية استنتاج الحل كما سنرى. يمكن تلخيص خطوات طريقة أدنى كلفة كما يلي:

١- يخصص أكثر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب للمتغير الذي له أقل كلفة واحدية في كل الجدول، (في حال التساوي يتم الاختيار بشكل عشوائي).

٢- يشطب العمود أو الصف المحقق. كما هو الحال في طريقة الزاوية الغربية الشمالية، لدى وجود عمود وصف محققين في آن واحد، يشطب أي