جدول رقم (5-11) الحصول على الحل الأمثل

معامل تغير الأساس دالة الهدف CB	قيمة المتغير الأساس bi	S_2	S_1	X_2	X_1		المتغيرات Xj
		0	0	1	2		معاملات المتغيرات في Cj
1	8	1/10	-2/5	1	0	X_2	المتغيرات الأساسية
2	6	-3/10	5/1	0	1	X_1	
قيمة دالة الهدف Z	20	-1/5	0	1	2		Z_j
		1/5	0	0	0		(C_j-Z_j)

من الجدول أعلاه يتضح أن جميع قيم الحقل (C_j- Z_j) هي موجبة وهنا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل وبموجب هذا الحل ينبغي على منظمة الأعمال الإنتاجية أن تلتزم بخطة الإنتاج التالية :

X1 = 6 أي طرح المنتج No.1 بمقدار 6 وحدات.

X2 = 8 أي طرح المنتج No.2 بمقدار 8 وحدات.

وبذلك تكون التكاليف الكلية أو النفقات (قيمة Z) أقل ما يمكن وهي 20 وحدة نقدية (Z = 20). وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بموجب طريقة (Big - M) .

5.5 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

في الحالات المختلفة للبرمجة الخطية، يتم التركيز على الحلول المختلفة للمشكلة التي يمكن الحصول عليها عند إتمام عملية الحل. وبالتحديد يتم التدقيق والتمييز بين الأنواع الثلاث من الحلول التي يمكن الحصول عليها وهي ما يلي :

1- الحل الممكن Feasible solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal solution .

أن هذه الحلول الثلاث لا يمكن متابعتها والتمييز بينها إلا من خلال ما يعرف بمنطقة الحلول الممكنة Feasible Region (R). أن هذه المنطقة تظهر من خلال تقاطع المستقيمات التي تعبر عن قيود المشكلة بعضها مع البعض الآخر والذي يعني أيضاً تقاطع المساحة الخاصة بكل مستقيم، بعبارة أخرى أن منطقة الحلول الممكنة (R) ظهرت من تداخل مساحة المستقيم الأول مع مساحة المستقيم الثاني وظهور منطقة

تداخل مشتركة تحقق كل من القيد الأول والقيد الثاني اللذان ساهما في ظهور وتبلور شكل المنطقية (R). وتأسيساً على ما تقدم ومن أجل ضمان تحقق هذا التداخل والتقاطع لابد لنا من ملاحظة القواعد الأساسية التالية :

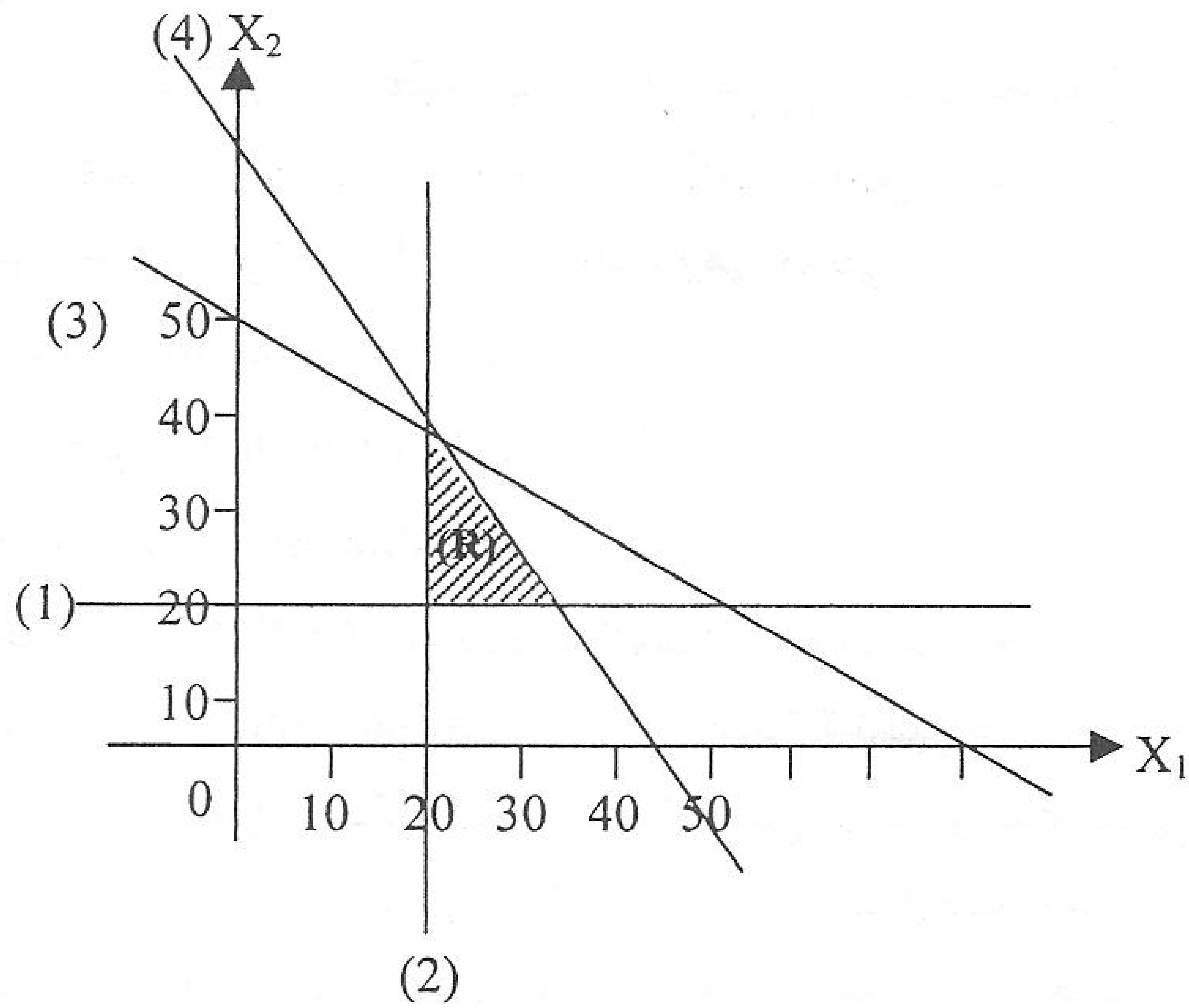
أولاً: إذا كانت علامة القيد أقل أو يساوي (≤) فإن المنطقة التي تحقق هذا المستقيم تكون متجهة إلى الداخل، وبذلك فإن كل النقاط الواقعة على المستقيم أو تحته يفترض أن تحقق القيد المذكور.

ثانياً: إذا كانت علاقة القيد ≥ أكبر أو يساوي فإن النقاط التي تحقق هذا القيد سوف تكون واقعة على أو خارج المستقيم الذي يعبر عن القيد المذكور.

ثالثاً: عند تحديد موقع منطقة الحلول الممكنة (R) يؤخذ بنظر الاعتبار ما يلي :

1- في حالة تعظيم دالة الهدف تكون منطقة الحلول محصورة بين المستقيمات المتقاطعة ونقطة الأصل. وقد يظهر استثناء لهذه الحالة بحيث ترتفع منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل من خلال مستقيمات تعبر عن شروط تتعلق بالكمية، حيث قد لا تبدأ الكمية من الصفر وإنما من مقدار أكبر من ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-9).

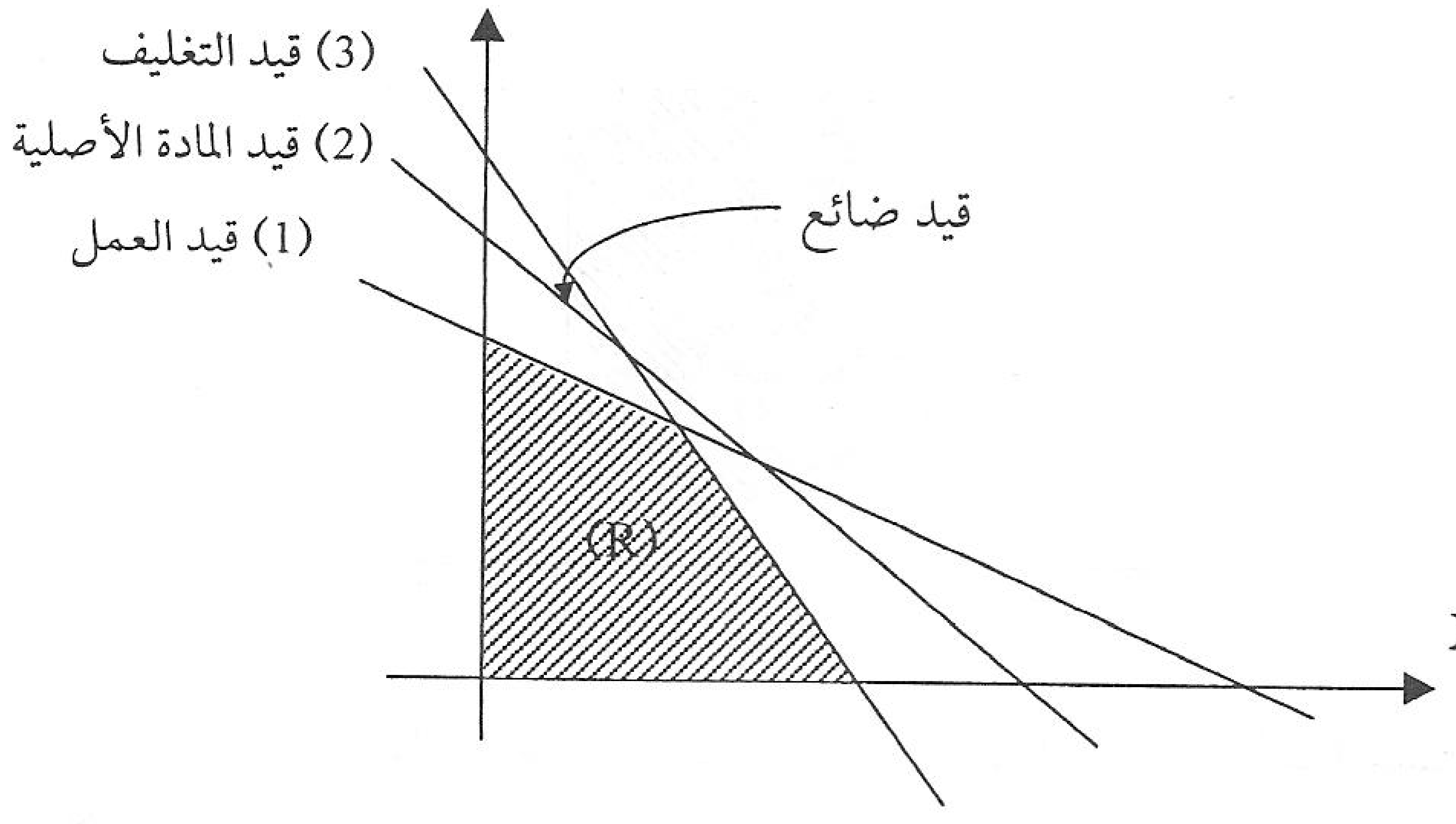
شكل (5-9) حالة خاصة لمنطقة الحلول الممكنة (R)



2- إذا كانت الحالة هي تصغير دالة الهدف ، فإن منطقة الحلول الممكنة سوف تكون محصورة بين نقطة تقاطع المستقيمات والزاوية المناظرة لنقطة الأصل في الربع الأول من المحاور الأفقية والعمودية (السينية والصادية) .

3- سواء كان الأمر يتعلق بتعظيم أو بتصغير دالة الهدف ، وكان هناك أكثر من اثنين من المستقيمات المتقاطعة بعضها مع البعض الآخر ، فإن في هذه الحالة يؤخذ بنظر الاعتبار (لأجل تحديد منطقة الحلول الممكنة) المستقيمات التي تعبر عن القيود الأساسية المشكلة (مثل قيود المواد الأولية ، قيود العمل ، ... الخ) كأساس لتحديد منطقة الحلول الممكنة ، في حين يعتبر القيد الآخر كقيد ضائع أو قيد محدد ثانوي ، كما هو واضح في الشكل رقم (5-10).

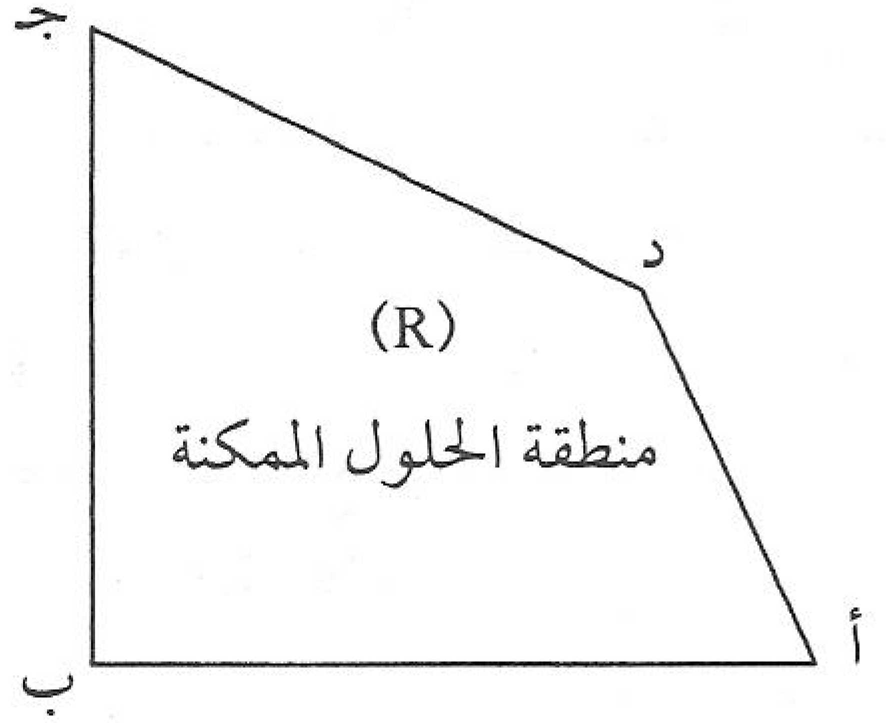
شكل رقم (5-10) تحديد منطقة الحلول من خلال القيود الأساسية



رابعاً : بعد أن تحدث عملية تقاطع المستقيمات والمساحات المعبرة عن قيود المشكلة ، يبرز إلى الواقع نوعين من الأشكال.

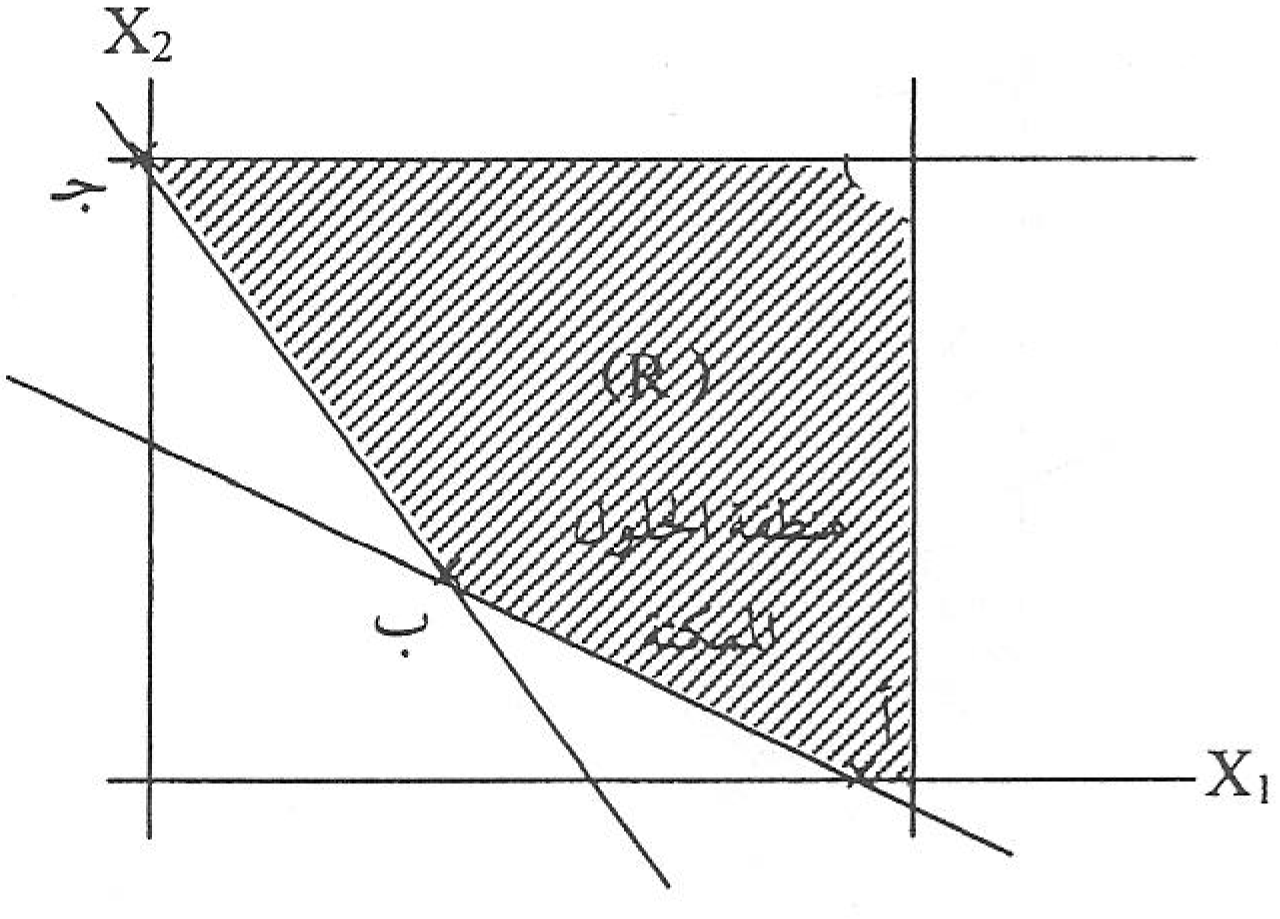
1. الشكل الذي يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف ، الذي يحقق القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل رقم (5-11).

شكل رقم (5-11) شكل افتراضي يعبر عن منطقة الحلول الممكنة (Max. Z)



2- الشكل الذي يعبر عن حالة تصغير دالة الهدف ، وفيها تتحقق كافة القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل الافتراضي رقم (12-5).

شكل رقم (12-5) شكل افتراضي لمنطقة الحلول الممكنة (Min. Z)



من خلال تحليل الحالات أعلاه يتضح أن هناك نقاط أساسية مشتركة بين الاثنين ، وهي :

أ . وجود نقاط كثيرة تعبر من الحل الممكن [1].

---

(1) في حالة البرمجة بإعداد صحيحة يكون عدد هذه الحلول قليل جداً بالقياس إلى البرمجة الخطية ، وذلك لكون هذه الحلول تتحدد من خلال تقاطع المستقيمات النازلة من تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية.

ب. وجود نقاط تمثل زوايا الشكل (R) تعبر عن الحل الأفضل.

جـ- وجود نقطة واحدة تعبر عن الحل الأمثل، حيث تتصف هذه النقطة بما يلي:

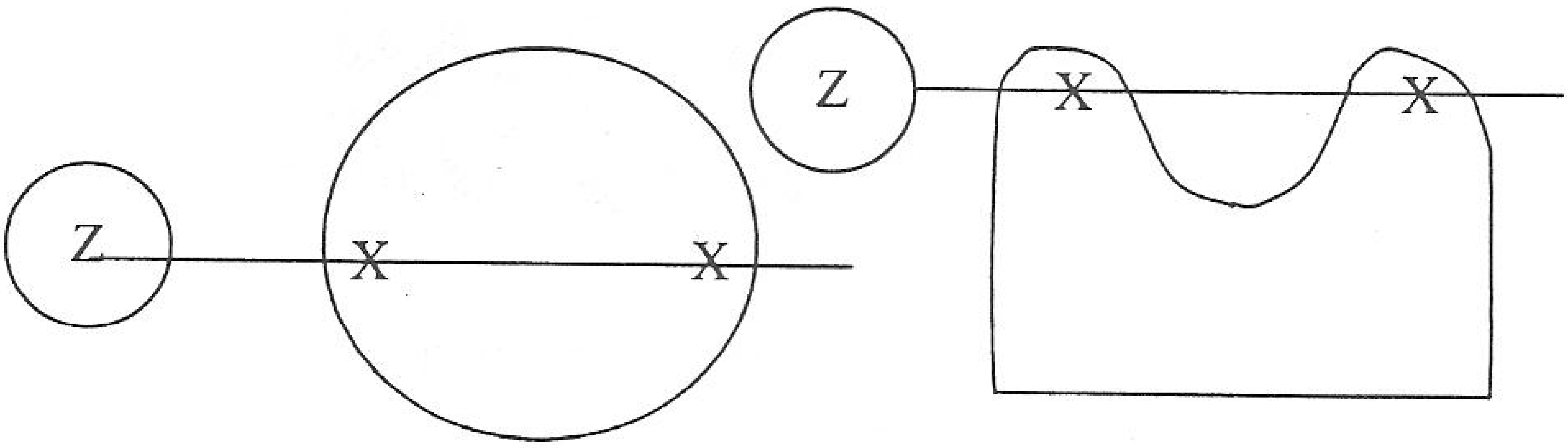
- تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل في حالة Max.Z.

- تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل في حالة Min.Z

د - أن نقطة الحل الأمثل تتكون من الإحداثيات (X_1 , X_2) والتي يجب أن تكون قيم موجبة أكبر من الصفر.

هـ-شكل منطقة الحلول (R) المشار إليه ضمن النقطة (1) والنقطة (2) أعلاه غالباً ما يكون شكلها الأقرب إلى متوازي الأضلاع أو الرباعي المنحرف وما شابه ذلك، ولا تعبر الأشكال التالية مقبولة في كونها منطقة حلول ممكنة.

شكل رقم (5-13) الأشكال غير المقبول كمناطق للحلول الممكنة



وفيما عدا الحالات ألمشار إليها أعلاه، فإن أي حالة تظهر تعتبر من الحالات الخاصة في البرمجة الخطية. وبشكل عام يمكن تبويب الحالات الخاصة للبرمجة الخطية في أربعة حالات أساسية وهي:

1- حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة No Feasible solution .

2- حالة منطقة الحلول غير المحدودة Un bounded solution .

3-حالة الانحلال (التفكك) Melti Optimal solution Degeneracy .

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من الحالات الواردة ذكرها أعلاه، مع الإشارة إلى إننا سوف نعتمد طريقة الرسم coraphical method كأساس من عملية الحل بدلاً من الطريقة الجبرية أو طريقة السمبلكس من أجل تقريب الفكرة أكثر إلى ذهن القارئ.

أولا: حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة No - Feasible solution :

في هذا النوع من الحالات لا يمكن الحصول على شكل هندسي متكامل يعبر عن منطقة الحلول الممكنة بسبب وجود تضارب بين القيود وبالتحديد بين العلامات الرياضية التي تفصل بين الجانب الأيمن والأيسر للعلاقة الرياضية كما هو واضح من خلال النموذج الرياضية الذي يعبر عن أحد الأشكال الإنتاجية في الواقع العملي :

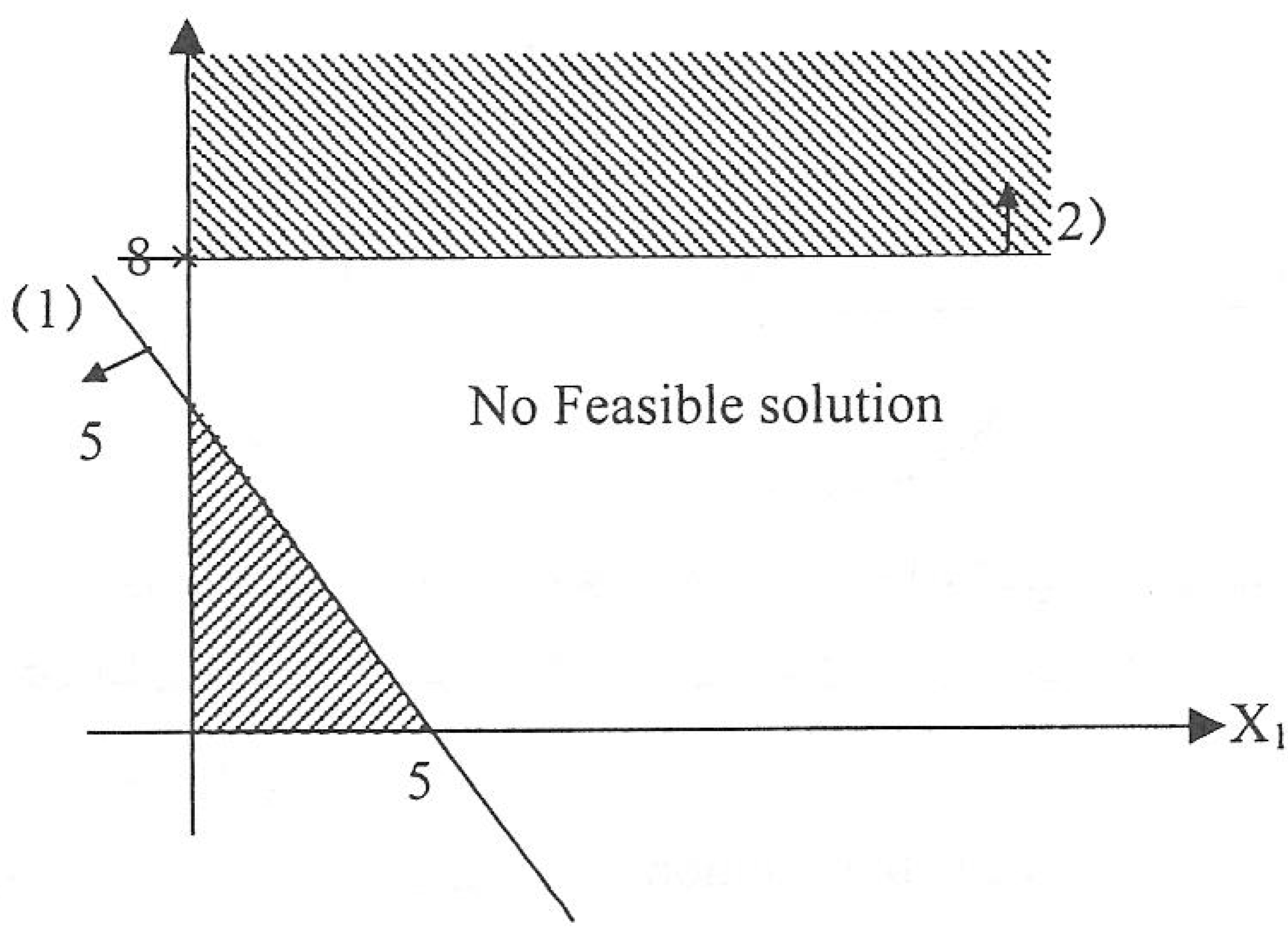
(1) .... $X_1 + X_2 \leq 5$

(2) ...... $X_2 \geq 8$

$$Z = 6X_1 = 4X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً يكون كما يلي :



يلاحظ من الشكل السابق أنه لم يتحقق فيه القواعد الشروط السابقة وأهمها التداخل أو التقاطع بن مساحة المستقيم الأول ومساحة المستقيم الثاني ، وتفسير ذلك في الواقع العملي هو أن حاصل جمع كل من المنتج رقم (X_1) والمنتج رقم 2 (X_2) ينبغي أن يساوي أو يقل عن (5) وحدات وبنفس الوقت وجود شرط آخر بأن يكون عدد الوحدات من المنتج رقم (2) هو أكثر أو يساوي 8 ، وهذا بحد ذاته تناقض يكون عائقاً أمام ظهور منطقة الحلول الممكنة (R).

ثانياً: حالة منطقة الحلول غير المحدودة Unbounded solution :

في هذا النوع من الحالات الخاصة يتم الحصول على منطقة حلول ممكنة (R) مفتوحة وغير مكتملة الجوانب كما هو واضح في المثال التالي :

النموذج الرياضي الثاني يعبر عن مشكلة إنتاجية تتعلق بطرح نوعين من المنتجات ، وهو المنتج الأول (X_1) والمنتج الثاني (X_2) :

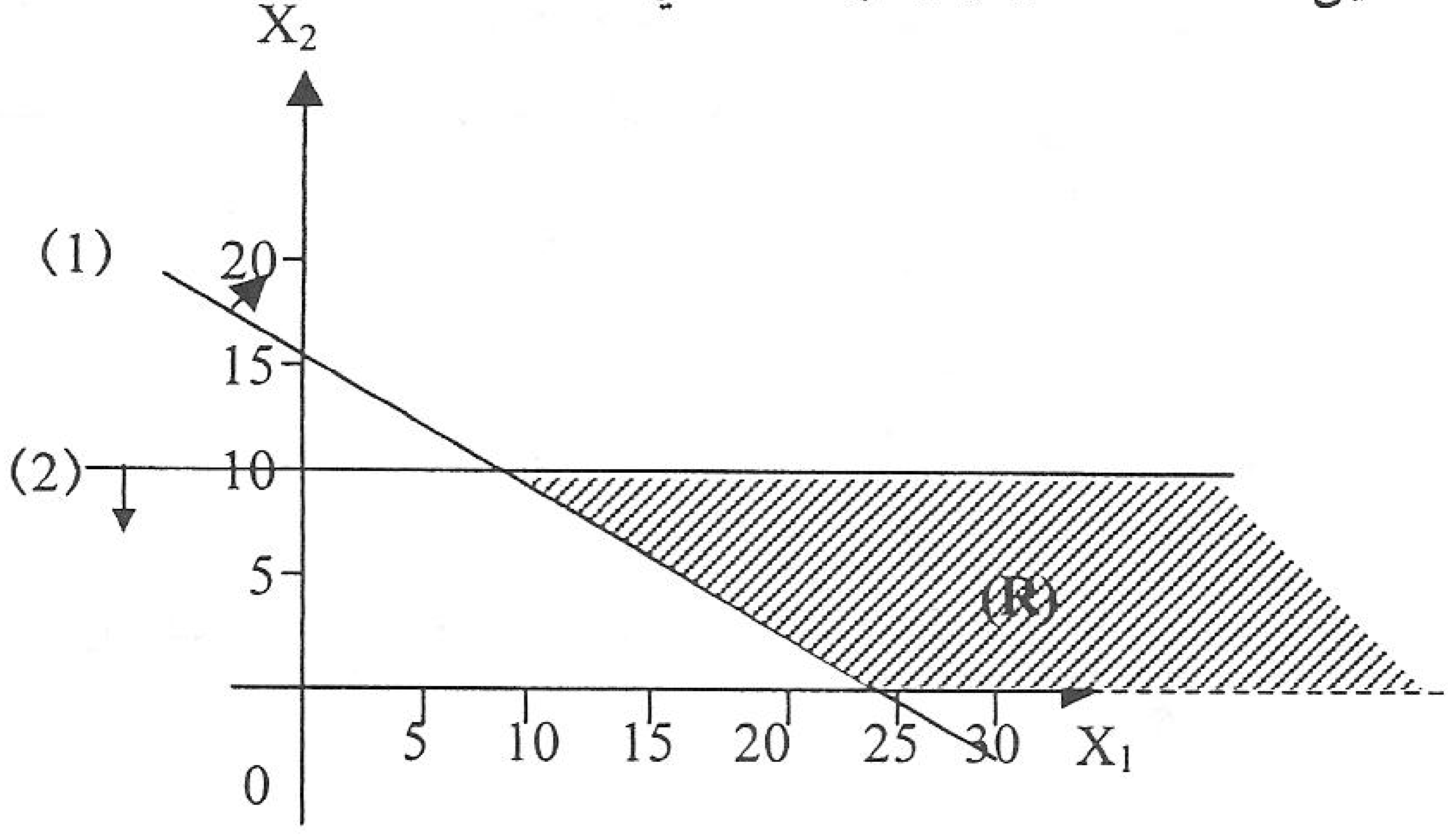
(1) .... $6X_1 + 10X_2 \geq 150$

(2) .... $X_2 \leq 10$

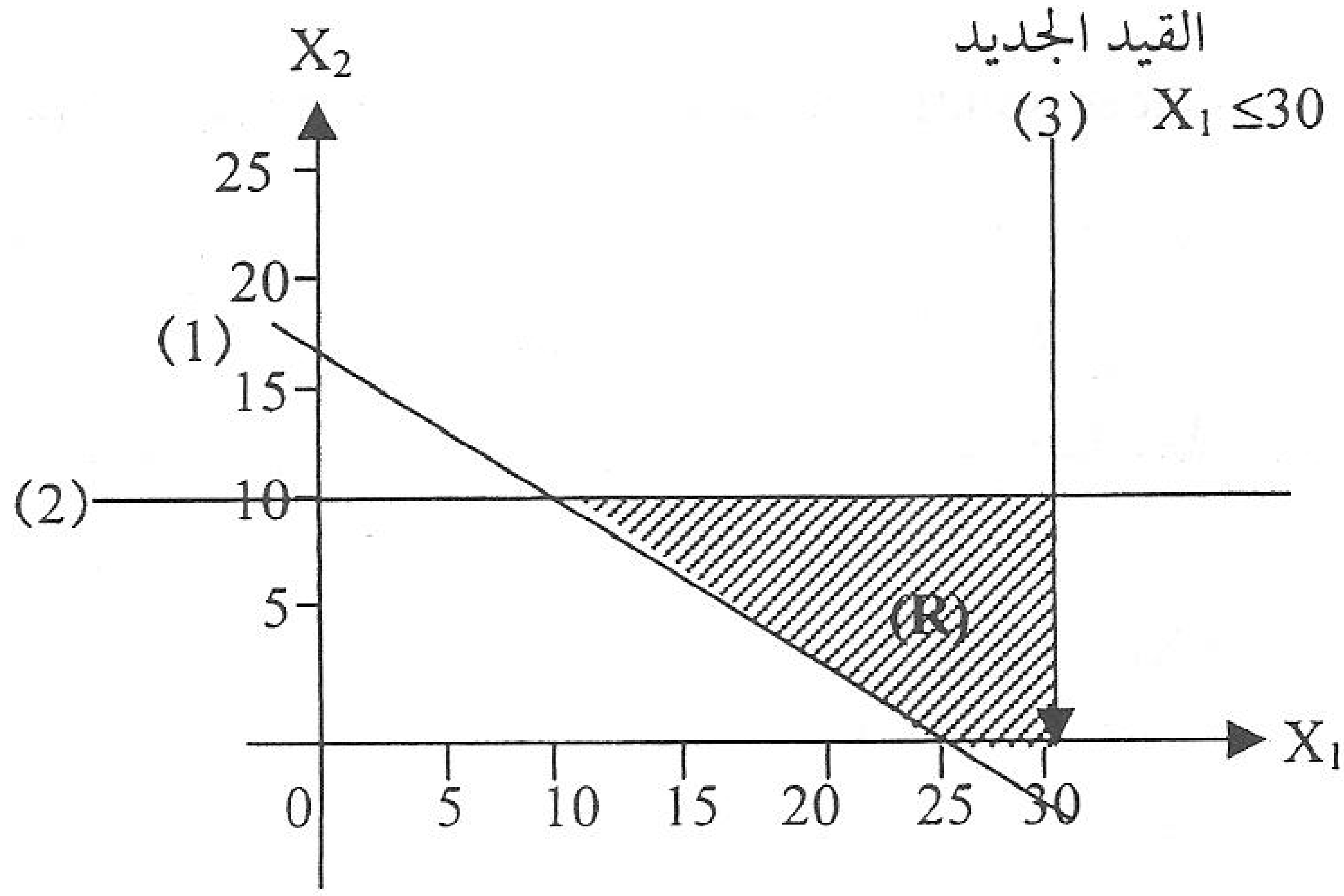
$$Z = 5X_1 + 20X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن تمثيل هذه المشكلة بيانياً يكون كما يلي :



ومن الشكل أعلاه يتضح أنه كلما زادت الكمية X_1 من خلال المحور الأفقي X ، كلما كان ذلك عاملاً مساعداً في بقاء منطقة الحلول (R) مفتوحة وغير محدودة. ويمكن معالجة هذه الحالة بأخذ قيد إضافي يقطع المحور X_1 ليحدد مقدار كمية الإنتاج المطلوبة ، على سبيل المثال لو كان هناك قيد إضافي ، هو ($X_1 \leq 30$) فإن شكل منطقة الحلول سوف يتحدد ولا تصبح هذه الحالة من الحالات الخاصة ، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :



ثالثاً: حالة تعدد الحلول المثلى Melti Optimal solution :

أن هذه الحالة تكتسب صفة الخصوصية بسبب أن الحل النهائي للمشكلة الذي يتم الحصول عليه على أكثر من حل أمثل واحد ومن أجل توضيح فكرة هذه الحالة نأخذ النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية.

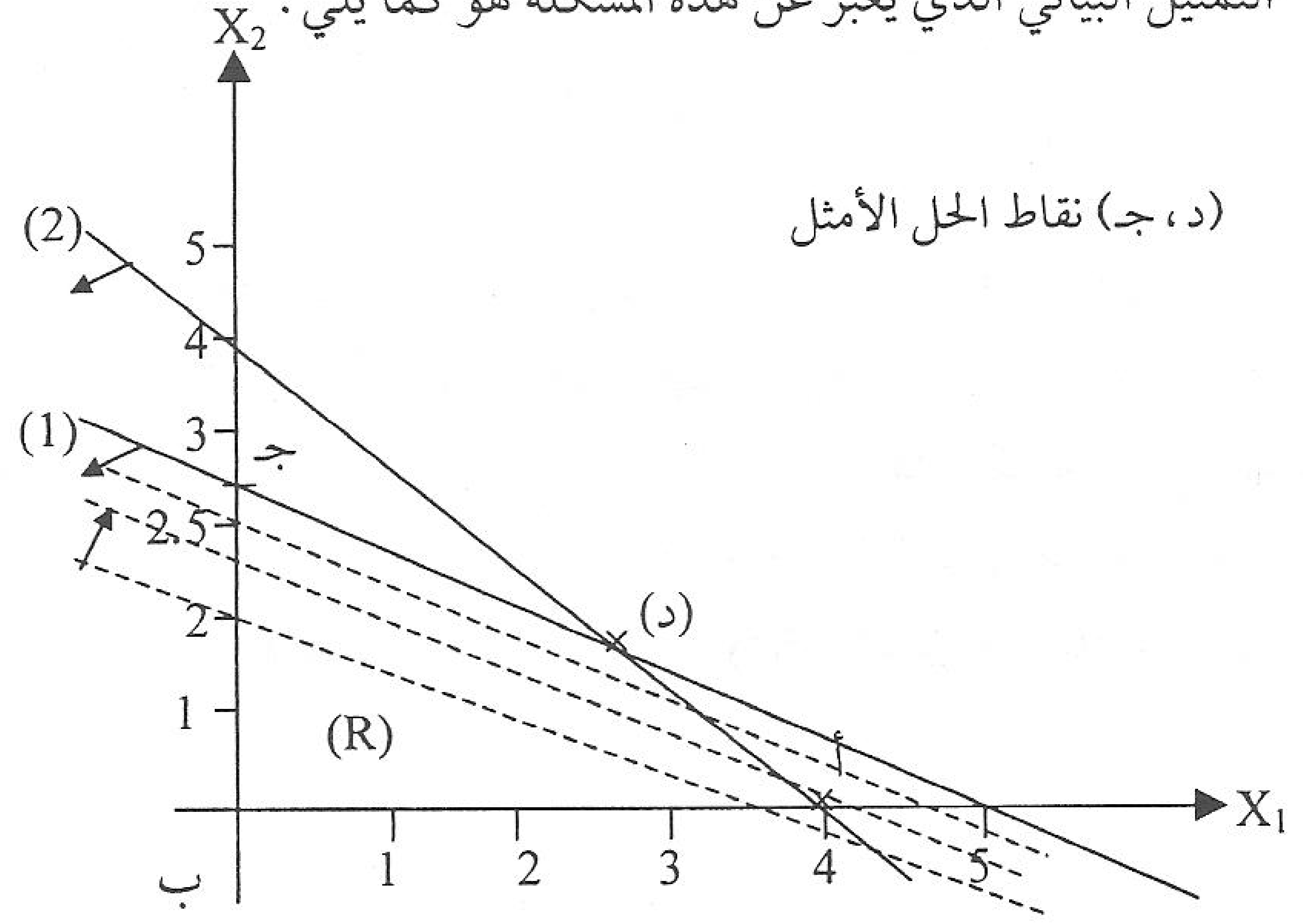
(1) .... $X_1 + 2X_2 \leq 5$

(2) .... $X_1 + X_2 \leq 4$

$Z = 2X_1 + 4X_2 \rightarrow Max$

$X_1, X_2 \geq 0$

التمثيل البياني الذي يعبر عن هذه المشكلة هو كما يلي :



من الشكل السابق يتضح أن مستقيم دالة الهدف يبتعد شيئاً فشيئاً من نقطة الأصل بالتدريج وبالتوازي مع المستقيمات المذكور بعضها مع البعض الآخر حتى نجد في النهاية أن أحد هذه المستقيمات التي تمثل دالة الهدف سوف تمس كل من النقطة د والنقطة جـ في وقت واحد. واستناداً إلى النظريات الهندسية التي تنص على أن (إذا اشترك مستقيم مع مستوي بأكثر من نقطة واحدة فإن ذلك المستقيم يعتبر منطبقاً على المستوي) [1]. وعليه وبناءاً على ما تقدم فإن كل نقاط المستقيم د جـ سوف تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل نفسه.

رابعاً: حالة الانحلال (التفكك) Degeneracy :

أن هذه الحالة تختلف عن الحالات الاعتيادية لسببين أساسيين وهما:

1- أن شكل منطقة الحلول الممكنة ليس رباعياً أو متوازي أضلاع بل هو مثلث.

2- أن نقطة الحل الأمثل التي يتم تحديدها في منطقة الحلول الممكنة يكون أحد متغيراتها (X_2, X_1) يساوي صفراً.

ولتوضيح فكرة هذه الحالة، نأخذ أحد النماذج الرياضية الذي يعبر عن أحد المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، وذلك كما يلي:

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

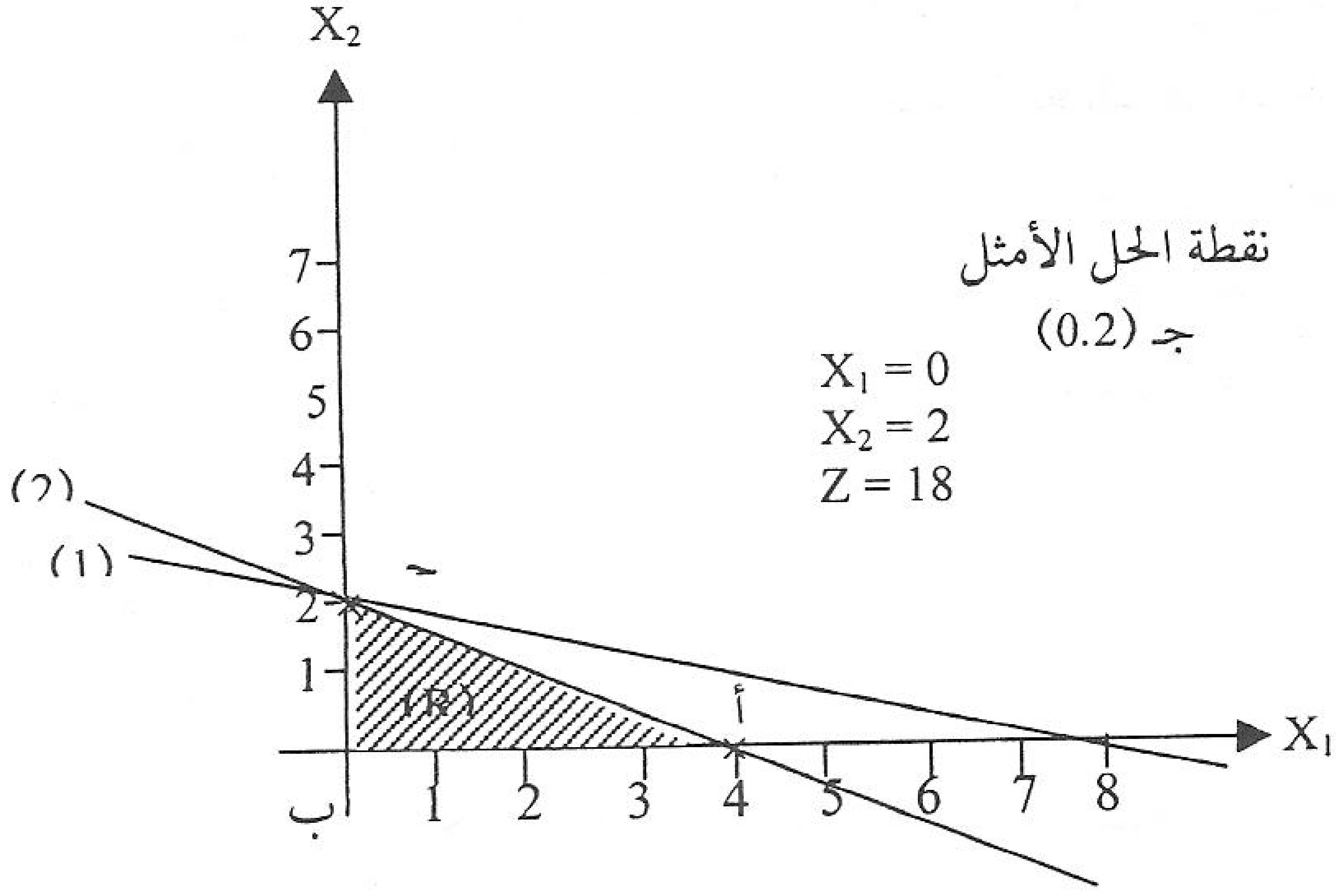
$$Z = 3X_1 + 9X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً، يؤدي إلى الحصول على الشكل التالي:

---

(1) منطقة الحلول الممكنة (R) تعد بمثابة مستوي.



من الشكل السابق يتضح أن على إدارة المنشأة مع المنتج رقم 2(2) وحدة وعـدم طرح المنتج رقم (1) وبذلك فإن قيمة دالة الهدف تصبح (18) وحدة وهو الحل الأمثل.