مسائل التعيين او التخصيص Assignment Problems

٦-١ مفهوم مسائل التعيين

تظهر مشكلات التخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة سواء في المجالات المدنية ام المجالات العسكرية فقد يتطلب الأمر تعيين مجموعة من الأفراد للقيام بمجموعة من المهمات وكل فرد يعيين للقيام بمهمه واحدة فقط ففي هذه الحالة يتطلب الأمر وضع الشخص المناسب في المكان المناسب له وبعبارة أخرى يتم التعيين وفقاً لقواعد تخفيض التكاليف وتعظيم المردود (الأرباح). كذلك تظهر مسائل التخصيص حينما يتطلب الأمر تكليف مجموعة من الوحدات أو المجموعات للقيام بتنفيذ مجموعة من الأنشطة مثلاً قد يكلف مجموعة من الأفراد الاشراف على مجموعة من المكائن. ولنفرض وجود ثلاثة أشخاص للتعيين وللاشراف على ثلاثة مكائن حيث تكاليف تعيين كل شخص الى أية ماكنة مبين في الجدول أدناه.

		المكائن		
		A	B	C
الافراد	1	24	20	28
	2	26	30	18
	3	32	25	20

يتكون الجدول اعلاه من ثلاث صفوف وثلاثة اعمدة فاذا تم تعيين الفرد الأول للماكنة A فان الاجرة الاسبوعية ستكون 24 دينار بينما اذا تم تعينه للماكنة B فان الاجرة الاسبوعية ستكون 20 دينار واذا تم تعيينه للماكنة الثالثة فان الاجرة الاسبوعية ستكون 28 دينار حيث لا يمكن تعيين أي فرد لأكثر من ماكنة وعليه فيجب أن يتساوى عدد المكائن بعدد الأفراد. والمسألة أعلاه هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية حيث يمكن صياغته كما يلي:

$$\text{Minimize } (Z) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} \cdot X_{ij}$$

Subjet to

وفقاً للقيود التالية

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j,i} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$X_{ai} = 0$ or 1 لجميع j, i

$X_{ij} = 0$ or 1 لجميع $j, 1$

ويمكن تطبيق هذه الصياغة على مثالنا اعلاه كما يلي:

$$X_{ij} \begin{cases} 1 & \text{في حالة تخصيص الماكنة } j \text{ للفرد } i \\ 0 & \text{في حالة عدم تخصيص لماكنة } j \text{ للفرد } i \end{cases}$$

ويكون مجموع التكاليف الكلية لتعيين الافراد الى المكائن سيكون Z حيث Z يمكن التعبير عنها .

$$\begin{aligned} Z = {} & 24X_{11} + 20X_{12} + 28X_{13} + \\ & 36X_{21} + 30X_{22} + 18X_{23} + \\ & 32X_{21} + 25X_{32} + 20X_{33}. \end{aligned}$$

هذ المسألة تحتاج الى نوعين من القيود:

- المجموعة الأولى انه لا يمكن تكليف فرد واحد للإشراف على أكثر من ماكنة واحدة فقط بعبارة أخرى

الصف الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

الصف الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

الصف الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

- اما المجموعة الثانية من القيود فتقضي عدم تعيين اكثر من فرد للاشراف على ماكنة واحدة فقط وبعبارة اخرى:

العمود الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

العمود الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

العمود الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

حيث Xij تساوي 0 او 1.

٦-٢ طرق حل مسائل التخصيص

هناك عدة طرق لايجاد الحل الامثل لمسائل التخصيص حيث تتفاوت كل طريقة عن الأخرى بعدد الخطوات المطلوبة للوصول للحل الأمثل ومن هذه الطرق.

١- طريقة العد الكامل.

٢- طريقة السمبلكس Simplex method أو الحل باستخدام النموذج الرياضي.

٣- طريقة النقل.

٤- الطريقة الهنغارية (الطريقة المجرية).

وسيقتصر تركيزنا على الطريقة الهنغارية لأنها من أفضل الطرق على الاطلاق لاستخراج الحل الأمثل لمسائل التعيين الا أنه من المفيد أن نستعرض الطرق الأخرى باعطاء فكرة أو مثال بسيط لكل طريقة قبل الخوض بالطريقة الهنغارية.

1- طريقة العد الكامل أو طريقة الحصر Solution by Enumeration Method

في هذه الطريقة نبحث عن جميع البدائل لتوزيع m وظيفة على m من المكائن مثلاً ثم نختار التخصيص المناسب عند احتساب التكلفة أو الربح الأعظم في مسائل أخرى ويمكن ايجاد البدائل باستخدام مبدأ طرق العد فاذا كان لدينا m وظيفة فان عدد البدائل يساوي !m الا أن عيب هذه الطريقة سيكون شاقاً اذا كان عدد الوظائف m كبيراً وفي بعض الأحيان يصعب حلها.

مثال:

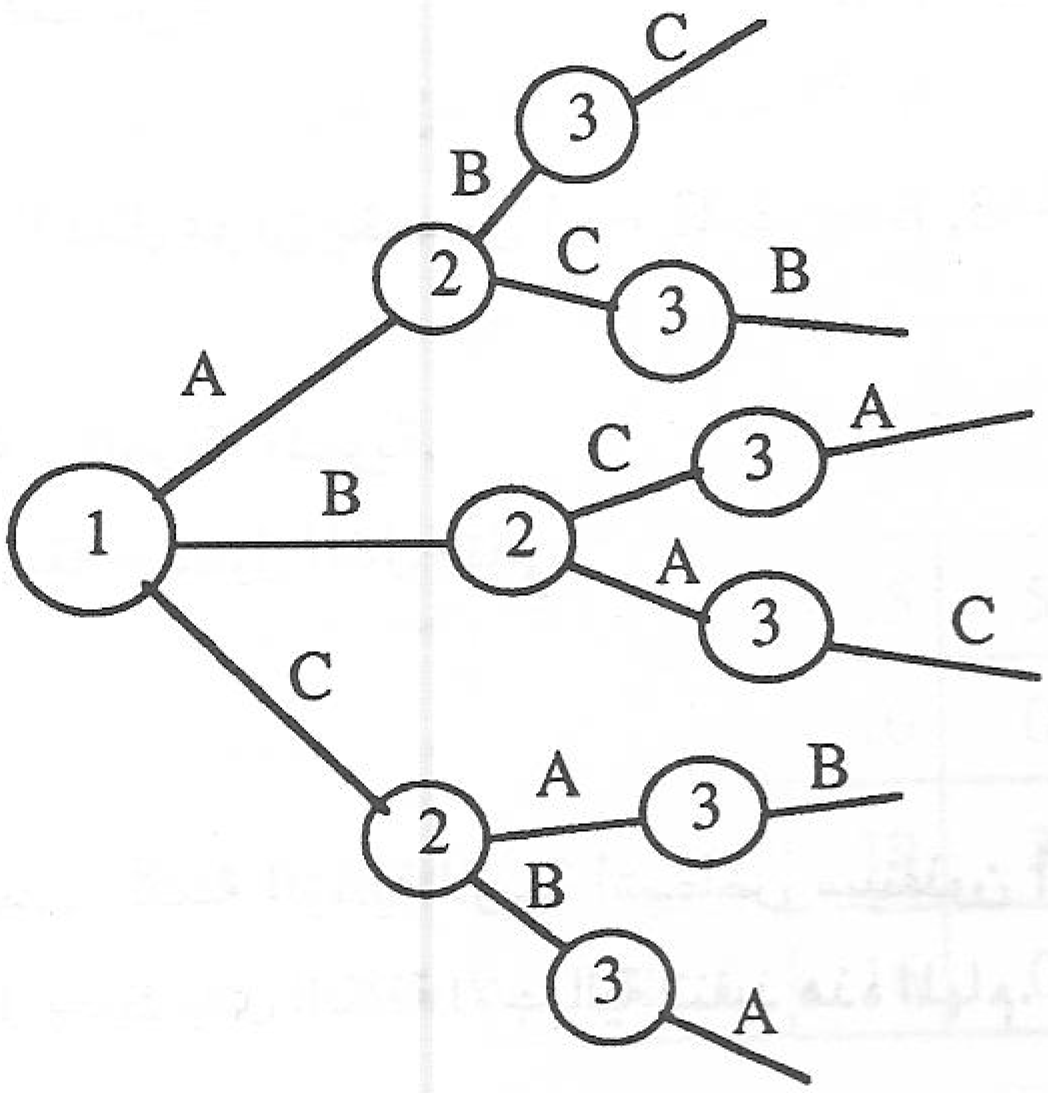
لدينا ثلاث مكائن C , B, A وثلاثة أوامر 3, 2, 1 والجدول التالي يبين الوقت الزمني لتنفيذ المكائن للأمر المعين. والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاث من قبل المكائن الثلاث بأقل وقت ممكن.

المكائن \ الاوامر	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	21

الحل:

نكون شجرة العد.

عدد الطرق الممكنة للتخصيص



التخصيص الاول	$A \to 1,\ B \to 2,\ \ C \to 3$
تكلفة التخصيص الاول =	$35 = 21 + 4 + 10$
التخصيص الثاني	$A \to 1, 2\ \to C, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الثاني =	$32 = 13 + 9 + 10$
التخصيص الثالث	$1 \to B, 2\ \to A, 3 \to C$
تكلفة التخصيص الثالث =	$55 = 21 + 22 + 15$
التخصيص الرابع	$1 \to B, 2\ \to C, 3 \to A$
تكلفة التخصيص الرابع =	$33 = 9\ +\ 9 + 15$
التخصيص الخامس	$1 \to C, 2\ \to A, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الخامس =	$41 = 41 +\ 22 + 6$
التخصيص السادس	$1 \to C, 2\ \to B, 3 \to C$
تكلفة التخصيص السادس =	$31 = 21 +\ 4\ +\ 6$

فيكون الحل الامثل لهذه البدائل هو أن يخصص $1 \to C, 2 \to B, 3 \to C$

2- الطريقة الهنفارية أو الطريقة المجرية.

لتوضيح هذه الطريقة سنتناول المثال التالي.

مثال:

الجدول التالي يمثل التكلفة الزمنية لأربعة أشخاص سينفذون أربعة مهام والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل بحيث يقلل التكلفة الاجمالية لتنفيذ هذه المهام.

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	15	25	10	35
2	17	27	40	21
3	12	28	9	19
4	10	26	17	23

جدول رقم (1)

الحل:

سنذكر الخطوات المتبعة لحل مثل هذه المسائل أثناء عملية الحل.

1- نختار أصغر عنصر في كل صف وطرحه من باقي عناصر نفس الصف. لينتج جدول التكاليف غير المباشرة جدول (2).

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D	
1	5	15	0	25	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف1
2	0	10	23	4	اصغر عنصر هو (17) طرح من عناصر الصف 2
3	3	19	0	10	اصغر عنصر هو (9) طرح من عناصر الصف 3
4	0	16	7	13	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف 4

جدول رقم (2)

2- نختار اصغر عنصر في كل عمود من اعمدة جدول (2) لينتج جدول رقم (3) ادناه.

* اصغر عنصر في العمود الاول في جدول (2) هو 0.

** اصغر عنصر في العمود الثاني في جدول (2) هو 10.

*** اصغر عنصر في العمود الثالث في جدول (2) هو 0.

**** اصغر عنصر في العمود الرابع في جدول (2) هو 4.

3- نغطي الصفوف أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية أو رأسية كما هو الحال في جدول (3).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	5	5	0	21
2	0	0	23	0
3	3	9	0	6
4	0	6	7	9

جدول رقم (3)

4- اذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فاننا نكون لم نصل للحل الأمثل بعد وعليه فاننا نختار أصغر رقم من الأرقام التي لم تغطي بخطوط ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة ونضيف هذا الرقم الى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي وفي مثالنا فان الرقم هو 0. ونحصل على الجدول (4).

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	5	0	0	26
2	5	0	28	0
3	3	4	0	1
4	0	1	7	4

جدول رقم (4)

-5 نكرر ما ورد في الخطوة رقم (3) لنحصل على الجدول أعلاه وبما أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية يساوي 4 = عدد الصفوف أو الأعمدة لمسألة التعيين أو التخصيص فعليه فاننا نكون وصلنا للحل الأمثل ونكون جدول التخصص جدول رقم (5) ونحصل عليه كما يلي:

- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل صف. وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر المخصص.
- نبدأ بتخصيص الصفر في كل عمود ونشطب باقي الاصفار التي تقع في الصف الذي يقع منه الصفر. وهكذا نحصل على جدول التخصص الامثل رقم (5).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	26
2	5	$\cancel{0}$	28	$\boxed{0}$
3	3	4	$\boxed{0}$	1
4	$\boxed{0}$	1	7	4

جدول رقم (5)

ويكون التخصص الامثل كما يلي:

الشخص 1 نخصص له المهمة B بتكلفة 25 دقيقة

الشخص 2 نخصص له المهمة D بتكلفة 21 دقيقة

الشخص 3 نخصص له المهمة C بتكلفة 9 دقيقة

الشخص 4 نخصص له المهمة A بتكلفة 10 دقيقة

ويكون أجمالي التكلفة = 65 دقيقة