1. إيجاد معكوس مصفوفة مربعة (A)

بـ استخدام المصفوفة الملحقة (adj A)

الخطوات:

1 - 1 - إيجاد محدد المصفوفة (A) للتأكد من أن المصفوفة نظامية (غير شاذة)

$|A| \neq 0$

في حال: $|A| = 0$ فإن المصفوفة شاذة وليس لها معكوس.

2 - 1 - إيجاد مصفوفة المحددات الجزئية

3 - أخذ منقول مصفوفة المحددات الجزئية فنحصل على المصفوفة الملحقة (adj A)

4 - نضع القانون:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A$$

مثال 1:

أوجد معكوس المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(-1+4) - 2(-3-0) - 1(6-0)$$

$$|A| = 3 + 6 - 6 = 3 \neq 0$$

المصفوفة نظامية.

مصفوفة المحددات الجزئية هي:

$$\begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$$

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1+4) = +3$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-0) = +3$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +(6-0) = +6$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+2) = 0$$

$$|A_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +(-1+0) = -1$$

$$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$|A_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +(-4+1) = -3$$

$$|A_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(1-6) = -5$$

مصفوفة المحددات الجزئية:

$$\begin{bmatrix} +3 & +3 & +6 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

نأخذ منقول المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة

$$adj\, A = \begin{bmatrix} +3 & 0 & -3 \\ +3 & -1 & -1 \\ +6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (4+2) + (4+2) + 2(0)$$

$$|A| = 12 \neq 0$$ المصفوفة نظامية وطرفها

نوجد مصفوفة المتممات الجبرية

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(4+2) = +6$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1-1) = 0$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4-2) = +6$$

$$|A_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(4-2) = +2$$

$$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$|A_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +(2-2) = 0$$

$$|A_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = +4$$

$$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1+1) = +2$$

$$\begin{bmatrix} +6 & -6 & 0 \\ +6 & +2 & -2 \\ 0 & +4 & +2 \end{bmatrix} \Rightarrow adjA = \begin{bmatrix} +6 & +6 & 0 \\ -6 & +2 & +4 \\ 0 & -2 & +2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adjA = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} +6 & +6 & 0 \\ -6 & +2 & +4 \\ 0 & -2 & +2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adjA$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

عين لماذا المصفوفة A قابلة للقلب ثم احسب $A \cdot A^{-1}$ ثم استنتج A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

تمرين 2 :

بين وجود مقلوب للمصفوفة التالية

واذا كان موجودا فاوجده :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

1. إيجاد معكوس مصفوفة بطريقة الاختزال:

1. الخطوات:

1- تحويل المصفوفة (A) إلى مصفوفة مثلثية عليا عناصر قطرها الرئيسي مساوية للواحد (1) وذلك باستخدام التحويلات الأولية على الأسطر من الأعلى إلى الأسفل.

2- تحويل المصفوفة المثلثية إلى مصفوفة واحدية (I) باستخدام التحويلات الأولية من الأسفل إلى الأعلى.

ما هي التحويلات الأولية:

1- ضرب أحد الأسطر (أ) بعدد ثابت $c \neq 0$ ونرمز له $r_i(c)$

2- إضافة أحد الأسطر (أ) إلى سطر آخر بعد ضربه (ك) بعدد ثابت $c \neq 0$ ونرمز له $r_{ki}(c)$

3- تبديل بين موضعي سطرين (ك) و (أ) ونرمز له $(r_i ; k)$

تمرين 3:

لتكن لدينا المصفوفة (A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد معكوب المصفوفة بطريقة الاختزال.

الحل: نكتب المصفوفة بالشكل $A|I$

$$[A:I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} r_{21}(-1) \\ \longrightarrow \\ r_{31}(-2) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3(-1)}$$

$r_{2+}(-1)$: نوضح:

أي ضرب السطر الأول بـ (-1) وإضافة للسطر الثاني وهنا التغيير يحصل بالسطر الثاني فقط بينما يحتفظ السطر الأول بقيمه السابقة.

$r_{3+}(-2)$:

أي ضرب السطر الأول بـ (-2) وإضافة للسطر الثالث وهنا التغيير يحصل بالسطر الثالث فقط بينما يحتفظ السطر الأول بقيمه السابقة.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} r_{23}(-1) \\ \longrightarrow \\ r_{13}(-1) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{12}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

I_3 $\quad$ A^{-1}

3

نظرية كايلي - هاملتون :

لكل مصفوفة مربعة في جبر كثير حدودها المميز.

مثال :

ليكن لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

إذا كان $f(x) = x^2 + 2x - 11$

1- أوجد كثير حدود المصفوفة A

2- بيّن صحة نظرية كايلي هاملتون

الحل :

لإيجاد كثير حدود المصفوفة A نعوض بدلاً من x بـ (A) فيصبح :

$f(A) = A^2 + 2A - 11$

$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

هنا أضفنا المصفوفة الواحدية للعدد [-11]

الآن لإيجاد حل عند (x) مصفوفة (A)

$f(A) = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $f(A)$ هي مصفوفة الصفرية

إذاً (A) هي جذر كثير حدودها المميز

لإيجاد الجذور المميزة لمصفوفة (A) :

1- نُكوّن المصفوفة المميزة لـ (A)

وهي $[A - \lambda I]$

2- نوجد محدد المصفوفة المميزة $|A - \lambda I| = 0$

وبالمساواة بالصفر

نحصل على كثير حدود مميز لـ (A)

3- نضع كثير الحدود مساوياً للصفر فنحصل

على المعادلة $|A - \lambda I| = 0$

4- نحل المعادلة المميزة فنحصل على الجذور المميزة

مثال 2 : لتكن لدينا المصفوفة (A)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد الجذور المميزة لمصفوفة (A)

أوجد جملوب المصفوفة (A) باستثمار نظرية كايلي هاملتون

أوجد A^2 و A^3

الحل : نتبع الخطوات السابقة :

$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= [(2-\lambda)(2-\lambda)] - [3 \times 3]$

$= 4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 5$

Scanned with CamScanner

$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

كل قيمة تحقق المعادلة تكون جذر مميز

نجد (A) نجد المقابل لها

$(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$

$\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5$ إما

$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1$ أو

لإيجاد مقلوب المصفوفة (A):

لدينا كثير حدود مميز

$\lambda^2 - 4\lambda - 5$

وحسب نظرية كايلي هاميلتون فإن كل مصفوفة

(A) هي جذر لكثير حدودها المميز

$A^2 - 4A - 5I = [0]$

نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1} فنحصل على

$A^{-1}.A^2 - 4.A.A^{-1} - 5A^{-1}I = A^{-1}[0]$

$A - 4I - 5A^{-1} = [0]$

$-5A^{-1} = -A + 4I + [0] \Rightarrow$

$A^{-1} = -\frac{1}{5}[-A + 4I]$

$A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I)$

$A^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$A^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

لإيجاد (A^2):

لدينا: $A^2 - 4A - 5I = [0]$

$A^2 = 4A + 5I$

$A^2 = 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$

لإيجاد (A^3):

لدينا: $A^2 - 4A - 5I = [0]$

نضرب الطرفين بـ (A) $\Leftarrow$

$A^3 - 4A^2 - 5AI = A[0]$

$A^3 = 4A^2 + 5A \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 62 & 63 \\ 63 & 62 \end{bmatrix}$

حل جمل المعادلات الخطية:

[1] طريقة كرامر:

1- الخطوات:

1- نوجد محدد المصفوفة الأساسية: (Δ)

2- نوجد (Δ_1) وذلك بالتبديل مثلا (عوامل) (x_1) بالقيم الحرة

3- نوجد (Δ_2) وذلك بالتبديل مثلا (عوامل) (x_2) بالقيم الحرة

4- نوجد (Δ_3) وذلك بالتبديل مثلا (عوامل) (x_3) بالقيم الحرة

5- نطبق العلاقة: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Scanned with CamScanner

تمرين 6 :

1. حل جملة المعادلات التالية : (كرامر)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

1- نكتب المصفوفة (A) الممثلة لـ : (x_1, x_2, x_3)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

2- نحسب (Δ)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

بما أن $\Delta \neq 0$ فالجملة حتمية (أي لها حل)

3- نحسب (Δ_1) :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 20$$

نعوض العامل (x_1) بالعمود الحر في المحدد

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -40$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -70$$

نعوض : $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2$

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-40}{10} = -4$

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-70}{10} = -7$

2- طريقة حساب مصفوفة :

الخطوات :

1- حساب محدد المصفوفة (A) يجب أن يكون $\neq 0$

2- حساب مقلوب المصفوفة (A) أي (A^{-1})

3- نكتب جملة المعادلات بالشكل :

$$[x] = [A^{-1}] \cdot [B]$$

حيث [B] مصفوفة العمود الحر

تمرين 7 :

1. حل جملة المعادلات التالية : (بطريقة المصفوفة)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

1- مصفوفة المعادلات (A) :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

2- حساب $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Scanned with CamScanner

3. حساب A^{-1}

نستعمل لحساب A^{-1} بطريقة المصفوفة المرافقة طريقتين:

1. حساب المصفوفة المرافقة بطريقة المحددات:

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = +(9-14) = -5$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-12) = 15$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = +(7+18) = 25$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -(-15+14) = 1$$

$$|A_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = +(-9+12) = 3$$

$$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(21-30) = 9$$

$$|A_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = +(10-6) = 4$$

$$|A_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6+2) = -8$$

$$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = +(-9-5) = -14$$

2. نأخذ منقول المصفوفة المرافقة فنحصل على المصفوفة الملحقة

$$\begin{bmatrix} -5 & 15 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & -14 \end{bmatrix}$$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: نضرب دوما المحدد بالمقلوب $\left(\frac{1}{10}\right)$ الذي حصلنا عليه سابقا.

4. نضع العبارة (الصيغة) المصفوفية لحساب x على الشكل:

$$[X] = [A^{-1}]\cdot[B]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(3×3) (3×1)

ثم نقوم بضرب كلاسي وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5+2-4 \\ 15+6+8 \\ 25+18+14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 \\ 29 \\ 57 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 2,9 \\ 5,7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$x_1 = -0,7$
$x_2 = 2,9$
$x_3 = 5,7$

حلول جملة المعادلات

Scanned with CamScanner