تمارين مطولة . ملخص المحاضرة الأولى (عملي) / مقرر رياضيات عالية / السنة الأولى

تمرين 1 : أوجد في المجموعة C حل المعادلات التالية :

1) $z^2 = 5$

2) $z^2 = -4$

الحل :

1) $z^2 = 5 \Rightarrow z = \pm\sqrt{5}$

منه : مجموعة الحلول $S = \{+\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

2) $z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = (2i)^2 \Rightarrow$

$z = \pm 2i \Rightarrow S = \{-2i, 2i\}$

تمرين 2 : أوجد في المجموعة C حل المعادلات التالية :

1) $z^2 - z + 2 = 0$

2) $z^2 - 2z + 1 = 0$

الحل : لحل Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$

للمعادلة حلين : $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$z_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

مجموعة الحلول :

$S = \left\{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

$\Delta = b^2 - 4ac$: لحل Δ

$= (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

للمعادلة حل حقيقي مضاعف هو :

$z = \frac{-b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$

مجموعة الحلول :

$S = \{1\}$

تمرين 3 : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

بين أن العدد المركب $(1-i)$ هو حل للمعادلة : $P(z) = 0$

الحل : نتحقق هل $(1-i)$ هو z أم لا

$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2$

$= 1 - 2i - 1 - 2 + 2i + 2$

$= 0$

نلاحظ أن $P(1-i) = 0$ إذن $(1-i)$ حل للمعادلة $P(z)$

نعلم أن $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ إذن :

$1 - i + z_2 = -\frac{-2}{1} \Rightarrow$

$z_2 = 2 + i - 1 = 1 + i$

وبالتالي تكون مجموعة الحلول :

$S = \{1-i, 1+i\}$

تمرين 4 : أوجد في المجموعة C حل المعادلات التالية :

1) $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

الحل : 1) لحل Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$

Scanned with CamScanner

$z_1 = \overline{z_2}$: نلاحظ أن

نستنتج : كيفية إيجاد صورة العدد (z_1) بالانعكاس

حيث تكون الصورة بالانعكاس

2) $(z^2+9)(z^2-4) = 0$

$z^2+9 = 0 \Rightarrow z^2 = -9$: أي

$z = (3.i)^2 \Rightarrow z_1 = -3,\ z_2 = +3$

و $z^2-4 = 0 \Rightarrow z^2 = 4$

$z = \sqrt{4} \Rightarrow z_3 = -2,\ z_4 = +2$

بالتالي تكون مجموعة الحلول :

$S = \{-3, -2i, 3, +2i\}$

تمرين 5 : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ حل المعادلة

$z^2 - 8z + 17 = 0$: التالية

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z$

بين أن العدد $P(z)$ يقبل على الأقل حلا تخيليا صرفا

حيث (a, b, c) أعداد حقيقية بحيث :

$P(z) = (z+i)(az^2+bz+c)$

$P(z) = 0$: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

حل :

$z^2 - 8z + 17 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17)$

$\Delta = 64 - 68 = (2i)^2$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+2i}{2} = 4+i$

$z_2 = \overline{z_1} = 4-i$: ومنه

$S = \{4-i, 4+i\}$

ليكن : $z_0 = bi$ حيث b عدد حقيقي صرفا لحل المعادلة :

$z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$

$(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

$-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

$-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

$8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

يعني :

$8b^2 + 8b = 0$ و

$-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$

$8b(b+1) = 0$ ⟸

$-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$ و

$b = 0$ أو $b = -1$ ⟸

$-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$ و

$b = 0$: لا تحقق المعادلة الثانية لأن :

$-0^3 - 0^2 + 17(0) + 17 \neq 0$

$b = -1$ تحقق المعادلة الثانية لأن :

$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$

$z = (-1)i \Leftarrow b = -1$ ومنه

$\boxed{z = -i}$ هو الحل التخيلي الصرف للمعادلة

Scanned with CamScanner

$P(z) = (z+i)(az^2+bz+c)$

$= az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z) = az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

بالمطابقة مع:

$P(z) = z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

$a=1$

$b=-8$

$c-8i = 17-8i$

$c = 17$

$\Leftarrow$ { $a=1$; $b+ai=-8+i$; $c+bi=17-8i$; $ci=17i$ } نجد:

ومنه $P(z) = (z+i)(z^2-8z+17)$

$P(z)=0 \Rightarrow$

$(z+i)(z^2-8z+17)=0$

$z+i=0 \Rightarrow z=-i$ إما:

أو: $z^2-8z+17=0$

بالحل نجد مميز: $z_1 = 4+i$

$z_2 = 4-i$

وبالتالي تكون مجموعة الحلول:

$S = \{4-i, 4+i, -i\}$

Scanned with CamScanner