الفصل الأول

التقدير Estimation

$1-1$ مقدمة:

يقصد بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ، ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من بيانات العينة العشوائية،وذلك عن طريق حساب بعض الإحصاءات التي تعتمد على بيانات العينة، واعتبارها كتقديرات لهذه المؤشرات . كأن يكون هدفنا معرفة المؤشرات كالمتوسط أو النسبة أو الإجمالي أو التباين ....الخ ،المتعلقة بخاصة ما في المجتمع .

ولتحقيق تلك الرغبة،إما أن نقوم بدراسة شاملة لعناصر ذلك المجتمع،أو أن نسحب عينة عشوائية منه ثم نستخدم معلوماتها للحصول على تقديرات لتلك المؤشرات في المجتمع .

وهنالك نوعان للتقدير :

– التقدير النقطي .

– التقدير المجالي.

ففي حالة التقدير النقطي على قيمة واحدة من العينة ، وتستخدم هذه القيمة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة . فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط بلد ما ، نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل ذلك البلد ، وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحاً معيناً كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون قد حصلنا على تقدير للنسبة في مجتمع الناخبين .

أما في التقدير المجالي ، فإننا نحصل على فترة تتحدد بحدين (حد أعلى وحد أدنى) نحصل عليهما من العينة،ونلاحظ أن فترة التقدير المجالي تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لانهائي في

كثير من الحالات . فمثلاً إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين $6 - 40$ و $6 + 40$ سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و 46 كحد أعلى، نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع، ونلاحظ أن هذه الفترة $(36-44)$ تحتوي على عدد لانهائي من الأعمار بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضاً كسور السنوات والأيام والشهور والساعات ..الخ، وسوف نرى كيف نحدد فترة التقدير هذه من بعض الحالات.

تتميز تقديرات الفترة بالإضافة إلى أنها تحتوي على عدد كبير جداً من القيم ، بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً. وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات، لذلك فإن فترات التقدير تسمى أيضاً " فترات الثقة " Confidence level لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة Confidence Level مثل 0.95 أو 0.99 وغيرها، بمعنى أن احتمال أن تكون فترة التقدير صحيحة هو 0.95 أو 0.99 وهكذا ...

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 34 و 46 سنة ودرجة الثقة هي 0.99 فإن ذلك يعني أنه لو تكررت التجربة مائة مرة، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95٪)

2 – 1 تقدير معالم المجتمع :

قبل أن نبحث في قضايا التقدير، نورد بعض التعاريف المتعلقة بالمجتمع والعينة والمؤشرات المستخدمة في تقدير معالم المجتمع .

تعريف المجتمع الإحصائي :

هو جملة العناصر التي تكون مستهدفة بالدراسة. وسنرمز لعدد تلك العناصر بـ N ، وللخاصة المستهدفة بالدراسة بـ Y ولقيمها المختلفة بالرموز:

لنفترض أن ظاهرة ما تُستهدف بالدراسة حجمها N عنصر، سنرمز لها بـ Y ولقيمها بالرموز التالية :

$$Y : y_1, y_2, y_3, \dots\dots, y_n$$

متوسط هذه القيم $\bar{y}$ ويساوي :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \qquad (1-1)$$

ولتباين تلك القيم σ^2 ويساوي :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{N} \qquad (2-1)$$

ولنسبة وجود تلك الخاصة في المجتمع بـR ويساوي :

$$R = \frac{M}{N} \qquad (3-1)$$

حيث M عدد المتميزين بتلك الخاصة .

وعادةً تكون هذه القيم ومتوسطها وتباينها ونسبتها مجهولة في المجتمع ،لأن العينة المسحوبة لا تشمل جميع عناصر المجتمع ،ولذلك سنستخدم معلومات العينة لتقدير معالم المجتمع كالمتوسط$\bar{y}$ والتباين σ^2 والنسبة R ..الخ.

وفيما يلي مقارنة بين العينة والمجتمع من حيث عدد عناصر كل منهما والمؤشرات الإحصائية كما يلي:

جدول$(1-1)$: مقارنة بين العينة والمجتمع من حيث عدد عناصر كل منهما والمؤشرات الإحصائية :

	المجتمع	العينة
العناصر	يتألف من N عنصر	يتألف من n عنصر
قيم الخاصة	$y_1, y_2, y_3, \ldots . y_i, \ldots y_n$	$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_i, \ldots x_n$
المتوسط	$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
التباين	$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \bar{y})^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$
النسبة	$R = \frac{M}{N}$	$R = \frac{m}{n}$

ويتم استخدام مؤشرات العينة لتقدير معالم المجتمع من خلال:

1 – تقدير متوسط المجتمع :

إذا كانت لدينا القياسات التالية لبيانات عينة حجمها n ،سحبت من مجتمع معين كالآتي:

$$X : x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots , x_n$$

وهذه القياسات معلومة .

نرمز لمتوسط تلك القياسات في المجتمع بـ$\bar{y}$ ،وهو مقدار مجهول.نريد تقديره من خلال معطيات العينة،لذلك نقوم بتقديره بواسطة متوسط العينة $\bar{x}$ ويكتب على الشكل الآتي:

$$\tilde{\bar{y}} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad (4-1)$$

مثال$(1-1)$:

لتقدير متوسط درجات الطالب في مقرر الإحصاء،سحبنا عينة منها بحجم $n = 10$ فوجدنا أن الدرجات فيها كانت كالآتي:

$X : 20,40,50,90,80,71,63,65,64,55$

وبالتالي نجد أن متوسط درجات الطلاب في هذه العينة يساوي :

$$\bar{x} = \frac{598}{10} = 59.8 \approx 60$$

ولتقدير متوسط الدرجات في المجتمع نستخدم متوسط العينة لذلك نطبق العلاقة$(1-4)$ ،فنجد أن :

$$\tilde{\bar{y}} = \bar{x} \approx 60$$

2 – **تقدير تباين المجتمع وانحرافه المعياري :**

لتقدير تباين أي مؤشر من مؤشرات المجتمع ، والذي رمزنا له بـ σ^2 نستخدم تباين العينة المصحح أو المعدل،وهو التباين المعرف بالعلاقة :

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (5-1)$$

ونجد أن تقدير تباين المجتمع σ^2 يملك تقدير غير متحيز هو s^2 ،وبذلك نكتب :

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (6-1)$$

وبذلك نجد أن تقدير الانحراف المعياري σ للمجتمع ،يتم بواسطة الانحراف المعياري للعينة S ونكتب ذلك كالآتي :

$$\tilde{\sigma} = +\sqrt{s^2} = s \qquad (7-1)$$

مثال $(2-1)$:

أوجد تقدير التباين وتقدير الانحراف المعياري لمعطيات المثال السابق $(1-1)$.

الحل :

لإيجاد تباين العينة المصحح نطبق العلاقة $(5-1)$ ،فنجد أن :

$$S^2 = \frac{3595.6}{9} = 399.51$$

ولإيجاد تقدير لتباين المجتمع نطبق العلاقة $(6-1)$ ،فنجد :

$$\tilde{\sigma}^2 = S^2 = 399.51$$

ولإيجاد تقدير للانحراف المعياري للمجتمع نطبق العلاقة $(7-1)$ ،فنجد :

$$\tilde{\sigma} = S = 19.99$$

3 – تقدير الانحراف المعياري لتقدير متوسط العينة (الخطأ المعياري)Stander Error:

إن قيمة تقدير متوسط المجتمع $\bar{y}$ المجهول الذي نحصل عليه من جراء حساب متوسط العينة $\bar{x}$ تختلف من عينة لأخرى،ولتقدير قيمة ذلك الاختلاف والذي نسميه بالخطأ المرتكب لذلك التقدير (الخطأ المعياري)،أو يسمى إحصائيا بالانحراف المعياري لمتوسط العينة ويرمز له بـ $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ وهو يقدر بواسطة العلاقة التالية :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (8-1)$$

مثال$(3-1)$:

أوجد تقدير الانحراف المعياري لمتوسط العينة لمعطيات التمرين $(1-1)$.

الحل :

لإيجاد تقدير الانحراف المعياري $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ لتقدير متوسط درجات الطلاب في مقرر الإحصاء والذي يحسب بتطبيق العلاقة $(8-1)$ كالآتي:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{19.99}{\sqrt{10}} = 6.32$$

أي أن متوسط درجات الطلاب في مقرر الإحصاء تقدر بـ 60 درجة وبخطأ معياري قدره 6.32 درجة .

4 – تقدير نسبة خاصة معينة في المجتمع :

لنفترض أننا نريد تقدير نسبة الناجحين في مقرر الرياضيات المالية والاقتصادية في كلية الاقتصاد لطلاب السنة الثانية من خلال عينة حجمها n طالب. وعند دراسة أفراد تلك العينة وجدنا أن عدد الناجحين فيها يساوي m طالب .

وبذلك نجد أن نسبة الناجحين في العينة والتي سنرمز لها بـ r تساوي:

$$r = \frac{m}{n} \qquad (9-1)$$

وبذلك تكون نسبة غير الناجحين والتي سنرمز لها بـ q تساوي:

$$q = \frac{n-m}{n} = 1-r \qquad (10-1)$$

وبناءً على ذلك نقوم بتقدير نسبة الناجحين في المجتمع والتي رمزنا لها بـ R ،بواسطة نسبتهم في العينة r ونكتب ذلك على الشكل الآتي:

$$\tilde{R} = r = \frac{m}{n} \qquad (11-1)$$

كما ونجد أن الانحراف المعياري للنسبة r والذي سنرمز له بـ σ_r ،يعطى على الشكل الآتي:

$$\tilde{\sigma}_r = \sqrt{\frac{r.q}{n}} \qquad (12-1)$$

حيث أن $q = 1 - r$

مثال $(4-1)$:

تم سحب عينة من الطلاب الذين تقدموا لامتحان مقرر المحاسبة بحجم $n = 150$ طالباً فوجدنا أن 50 منهم نجحوا في هذا الامتحان،والمطلوب:

– تقدير نسبة الناجحين من الطلاب المتقدمين لمقرر المحاسبة.

– تقدير الخطأ المعياري.

الحل:

– لإيجاد تقدير لنسبة الناجحين في مجتمع الطلاب،لابد من إيجاد نسبة الناجحين في العينة لذلك نطبق العلاقة $(1-9)$ ،فنجد:

$$r = \frac{50}{150} = 0.33$$

– وللحصول على تقدير نسبة الناجحين في المجتمع المدروس نطبق العلاقة $(11-1)$ ،فنجد :

$$\tilde{R} = r = 0.33$$

– وللحصول على تقدير الانحراف المعياري أو الخطأ المعياري لتلك النسبة r نطبق العلاقة $(1-12)$ ، فنجد:

$$\tilde{\sigma}_r = \sqrt{\frac{(0.33)(0.67)}{150}} = 0.038$$

أي أن نسبة الناجحين في مقرر المحاسبة تقدر بـ 0.33 وبخطأ معياري قدره 0.038 .

5 – تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين :

لنفترض أنه لدينا مجتمعين Y_1 و Y_2 ومتوسطهما على الترتيب $\bar{y}_1$ و $\bar{y}_2$. كما نفترض إننا سحبنا عينتين بحجمين n_1 و n_2 ومتوسط هاتين العينتين $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ وتباينهما المصححان S_1^2 و S_2^2 على الترتيب.

بناءً على ما تقدم يمكننا أن نجد تقدير الفرق بين المتوسطين $(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)$ بواسطة الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$، كالآتي:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \qquad (13-1)$$

ويقدر الانحراف المعياري لهذا التقدير بواسطة جذر مجموعي التباين المتعلقين بتقدير كل من $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ وهو يساوي:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1} + \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \qquad (14-1)$$

مثال $(5-1)$:

بلغ متوسط الدخل في مدينتين 40000 , 30000 ل.س على الترتيب، سحبنا عينتين بحجمين $n_1 = 30$ و $n_2 = 20$. فوجدنا أن تباين هاتين العينتين يساويان: $S_1^2 = 360$ و $S_2^2 = 150$، **والمطلوب:**

إيجاد تقدير للفرق بين متوسطي الدخل في هذين المجتمعين وتقدير الانحراف المعياري .

الحل :

بتطبيق العلاقة $(13-1)$، نجد أن الفرق بين متوسطي العينتين يساوي:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = 40000 - 30000 = 10000$$

أما بالنسبة لتقدير الانحراف المعياري لذلك التقدير ، فيحسب من العلاقة $(1-14)$ ، كما يلي:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(360)}{30}+\frac{(150)}{20}} = 4.42$$

أي أن الفرق بين متوسطي الدخل في المجتمعين يقدر بـ 10000 ل.س وبخطأ معياري هو 4.42 ل.س .

6 – تقدير الفرق بين نسبتي خاصتين في المجتمع :

لنفترض أننا نريد مقارنة نسبتي خاصتين في مجتمعين ،فإننا نسحب عينة من الأول بحجم n_1 و عينة من الثاني بحجم n_2 .فتكون نسبة الخاصة في المجتمع الأول $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ و نسبة الخاصة الثانية في المجتمع الثاني $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$.

و يقدر الفرق بين النسبتين في المجتمع $(R_1 - R_2)$ ،عن طريق تقدير الفرق بين النسبتين في العينتين $(r_1 - r_2)$ ،كما في الشكل التالي:

$$(R_1 - R_2) = r_1 - r_2 \qquad (15-1)$$

و إن تقدير الانحراف المعياري لذلك التقدير يحسب من خلال العلاقة الآتية:

$$\tilde{\sigma}_{r_1-r_2} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{r_1} + \tilde{\sigma}_{r_2}} = \sqrt{\frac{r_1q_1}{n_1}+\frac{r_2q_2}{n_2}} \qquad (16-1)$$

مثال$(1-6)$:

لنفترض أن نسبة المدخنين في مدينتي كالآتي $r_1 = 0.35$ و $r_2 = 0.27$ ،وحجم العينة الأولى $n_1 = 30$ و حجم العينة الثانية $n_2 = 20$ ، **والمطلوب**:

– إيجاد تقدير للفرق بين نسبتي المدخنين في المدينتين.

– إيجاد تقدير الخطأ المعياري للفرق السابق.

الحل:

– لإيجاد تقدير الفرق بين نسبتي المدخنين نطبق العلاقة $(15-1)$ ،فنجد :

$$\left(R_1 - R_2\right) = 0.35 - 0.27 = 0.08$$

– ولتقدير الانحراف المعياري المتعلق بذلك الفرق نطبق العلاقة $(16-1)$ ، فنجد :

$$\tilde{\sigma}_{r_1 - r_2} = \sqrt{\frac{(0.35)(0.65)}{30} + \frac{(0.27)(0.73)}{20}} = 0.1321$$

أي أن الفرق بين نسبتي المدخنين في المجتمعين تقدر بـ 0.08 وبخطأ معياري يساوي 0.1321 .

$1-2$ إنشاء مجالات الثقة:

قمنا بالفقرات السابقة بإيجاد تقديرات نقطية مختلفة لمؤشرات مختلفة كالمتوسط و التباين والانحراف المعياري ونسبة خاصة ما في المجتمع وهي بمعظمها تقديرات فعالة وغير متحيزة ومتماسكة للمؤشر المجهول.

ولكن ذلك لا يكفي على اعتبار أن تلك التقديرات تحتاج إلى وسيلة ما تجعلنا أكثر ثقة بها . فكان لابد من إنشاء مجالات ثقة باحتمالات متعددة لجعل تلك القيمة المقدرة أكثر قرباً من القيمة الحقيقية.

وسنميز هنا بين حالتين لحجم العينة(عينة كبيرة وعينة صغيرة).

$1-$ إذا كان حجم العينة كبيراً $(n \geq 30)$:

في هذه الحالة يتم إنشاء مجالات الثقة المختلفة لمؤشر ما(متوسط – تباين– انحراف معياري– نسبة ما) اعتماداً على التوزيع الطبيعي المعياري، وفقاً للعلاقة الآتية وبشكل عام:

$$\mathrm{P}\left[\tilde{\theta} - Z\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}} \leq \theta \leq \tilde{\theta} + Z\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}\right] = 1 - \alpha \qquad (17-1)$$

حيث أن :

$\tilde{\theta}$ تقدير المؤشر المراد حسابه من العينة.

Z الدرجة المعيارية للتوزيع الطبيعي.

$\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}$ تقدير الانحراف المعياري لمؤشر العينة .

α مستوى الدلالة .

وسنعرض كيفية إنشاء مجالات الثقة لمؤشرات المجتمع المختلفة كالآتي:

$1-$″ **بالنسبة لمتوسط المجتمع**: يكون إنشاء مجال الثقة للمتوسط $\bar{x}$ ،وفقاً العلاقة الآتية :

$$P\left[\bar{x}-Z\tilde{\sigma}_{\bar{x}} \leq \bar{y} \leq \bar{x}+Z\tilde{\sigma}_{\bar{x}}\right]=P\left[\bar{x}-Z\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \bar{y} \leq \bar{x}+Z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha \qquad (18-1)$$

$2-$″ **أما بالنسبة لخاصة ما في المجتمع**: يكون إنشاء مجال الثقة للنسبة R وفقاً العلاقة الآتية :

$$\mathrm{P}\left[r-Z\tilde{\sigma}_{p} \leq R \leq r+Z\tilde{\sigma}_{p}\right]=\mathrm{P}\left[r-Z\sqrt{\frac{r.q}{n}} \leq R \leq r+Z\sqrt{\frac{r.q}{n}}\right]=1-\alpha \qquad (19-1)$$

مثال $(1-7)$:

أوجد مجال الثقة لمتوسط الدخل في المجتمع المدروس، إذا سحبنا عينة حجمها $n = 50$ ، وكان متوسطها كان $\bar{x} = 1220$ وانحرافها المعياري $S = 75.5$ ، ودرجة الثقة $Z = 2$.

الحل:

من معطيات التمرين نجد:

$$\tilde{y} = \bar{x} = 1220$$

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{75.5}{\sqrt{50}} = 10.67$$

عندما $Z = 2$ ، يكون مستوى الثقة $\alpha = 95\%$ وللحصول على مجال الثقة لمتوسط الدخل نطبق العلاقة $(1-17)$ ، فنجد :

$$\mathrm{P}[1220 - 2(10.67) \le \bar{y} \le 1220 + 2(10.67)] = \mathrm{P}[1220 - 21.34 \le \bar{y} \le 1220 + 21.34]$$
$$= P[119866 \le \bar{y} \le 124134] = 0.95$$

أي أن متوسط الدخل الحقيقي $\bar{y}$ يقع ضمن المجال $[119866, 124134]$ باحتمال قدره $\beta = 0.95$.

مثال $(1-8)$:

أوجد مجال الثقة لمعطيات المثال $(1-4)$.

الحل:

من معطيات التمرين نجد:

$$\tilde{R} = r = 0.33$$

$$\tilde{\sigma}_r = 0.038$$

وللحصول على مجال الثقة لنسبة الناجحين نطبق العلاقة $(18-1)$ ،فنجد:

$$\mathrm{P}[0.33-2(0.038)\leq R\leq 0.33+2(0.038)]=\mathrm{P}[0.33-0.076\leq R\leq 0.33+0.076]$$
$$=P[0.2543\leq R\leq 0.406]=0.95$$

أي أن نسبة المدخنين R تقع ضمن المجال $[0.254, 0.406]$ باحتمال قدره $\beta = 0.95$.

1 -إذا كان حجم العينة صغيراً $(n<30)$:

في هذه الحالة يتم إنشاء مجالات الثقة المختلفة لمؤشر ما(متوسط – تباين– انحراف معياري– نسبة ما) اعتماداً على ستودنت (توزيع t)،وفقاً للعلاقة التالية وبشكل عام:

$$\mathrm{P}\left[\tilde{\theta}-t\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}\leq\theta\leq\tilde{\theta}+t\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}\right]=1-\alpha \qquad (20-1)$$

حيث أن:

$\tilde{\theta}$ تقدير المؤشر المراد حسابه من العينة .

t قيمة متحول توزيع ستودنت المقابلة لمستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أو $\alpha = 0.10$ ولعدد درجات حرية قدرها $(n-1)$

$\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}$ تقدير الانحراف المعياري لمؤشر العينة.

α مستوى الدلالة.

وسنعرض كيفية إنشاء مجالات الثقة لمؤشرات المجتمع المختلفة كالآتي:

1ً- بالنسبة لمتوسط المجتمع : يكون إنشاء مجال الثقة للمتوسط $\bar{x}$ ،وفقاً العلاقة الآتية:

$$P\left[\bar{x}-t\tilde{\sigma}_{\bar{x}}\leq\bar{y}\leq\bar{x}+t\tilde{\sigma}_{\bar{x}}\right]=P\left[\bar{x}-t\frac{s}{\sqrt{n}}\leq\bar{y}\leq\bar{x}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha \qquad (21-1)$$

$2'$ - **أما بالنسبة لخاصة ما في المجتمع** : يكون إنشاء مجال الثقة للنسبة R وفقاً العلاقة التالية :

$$P\left[r - t\tilde{\sigma}_p \le R \le r + t\tilde{\sigma}_p\right] = P\left[r - t\sqrt{\frac{r.q}{n}} \le R \le r + t\sqrt{\frac{r.q}{n}}\right] = 1 - \alpha \qquad (22-1)$$

مثال $(1-9)$:

لنفترض أن عينة بحجم $n = 10$ من الطلاب أعطتنا القياسات التالية عن طول كل منهم:

$X : 170,161,169,173,160,174,165,162,167,164$

والمطلوب :

- إيجاد تقدير لمتوسط طول الطالب .

- إيجاد مجال الثقة الثاني باحتمال قدره $\beta = 0.95$ إذا علمت أن تباين العينة $s^2 = 24.28$.

الحل :

- نجد أن متوسط طول الطالب في العينة المختارة هو :

$$\tilde{\bar{y}} = \bar{x} = \frac{1665}{10} = 166.5$$

- لإيجاد مجال الثقة لأطوال الطلاب نطبق العلاقة $(1-20)$ ، فنجد :

$$P\left[166.5 - t(4.93) \le \bar{y} \le 166.5 + t(4.93)\right] = 0.95$$

ومن جداول توزيع t المقابلة لمستوى دلالة $\alpha = 0.10$ ولدرجات حرية $(n-1=9)$ تساوي (1.833), وبذلك يأخذ المجال الشكل الآتي:

$$\mathrm{P}\left[166.5-(1.833)(1.5582)\leq \bar{y}\leq 166.5+(1.833)(1.5582)\right]=0.95$$
$$\mathrm{P}\left[163.64\leq \bar{y}\leq 175.54\right]=0.90$$

أي أن متوسط طول الطلاب الحقيقي $\bar{y}$ يقع ضمن المجال $[163.64, 175.54]$ باحتمال قدره $\beta = 0.95$.

تمرينات

1 – سحبنا عينة بحجم $n=10$ من مجتمع مؤلف من 50 أسرة، فوجدنا أن دخولهم الشهرية تساوي(ألف ليرة):

$X: 25,35,45,64,47,36,38,40,60,75$

والمطلوب :

- إيجاد تقدير متوسط الدخل في المجتمع $\bar{y}$.
- إيجاد تقدير تباين الدخل في المجتمع σ^2 .
- إيجاد تقدير تباين متوسط الدخل في المجتمع $\sigma_{\bar{x}}^{\ 2}$.
- إيجاد تقدير لنسبة الدخول التي هي أقل من 15 وتقدير تباينه.
- إيجاد مجال الثقة المقابل للاحتمال $\beta=0.95$ لكل من المتوسط والنسبة.

2 – سحبنا عينتين بحجمين $n_1=11$ و $n_2=10$ من مجتمعين وكان متوسطهما $\bar{x}_1=65.3$ و $\bar{x}_2=60.4$ و $s_1^2=31.4$ و $s_2^2=44.82$ ، **والمطلوب** :

- أوجد الفرق بين المتوسطين.
- أوجد مجال الثقة للفرق باحتمال $\beta=0.95$.

3 – لدراسة وزن القطع المنتجة في معملين A, B سحبنا عينة من كل منهما بحجمين $n_1=10$ و $n_2=12$ فوجدنا أن متوسطي وزن القطع يساويان $\bar{x}_1=240$ و $\bar{x}_2=250$ و $s_1^2=5000$ و $s_2^2=4000$ ، **والمطلوب** :

أوجد مجال الثقة باحتمال $\beta=0.95$ لكل من المؤشرات التالية:

- متوسط المجتمع الأول .
- متوسط المجتمع الثاني .

- الفرق بين المتوسطين $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$.

4 – سألنا عشرين طالباً عما إذا كانوا قد نجحوا في الامتحان أم لا . فأجاب 12 منهم بنعم .

والمطلوب:

- إيجاد تقدير نسبة النجاح R .
- إيجاد مجال الثقة الذي يحتوي النسبة الحقيقية للنجاح باحتمال قدره $\beta = 0.95$.

5 – في دراسة على المصابيح الكهربائية أخذنا عينة بحجم $n = 100$ مصباحاً ، فوجدنا أن 7 منها غير صالحة للاستعمال. **والمطلوب**:

- إيجاد تقدير نسبة العطب في الإنتاج R .
- إيجاد مجال الثقة الذي يحتوي النسبة الحقيقية للعطب باحتمال قدره $\beta = 0.95$.

6 – لنفترض أننا سحبنا عينتين بحجمين $n_1 = 20$ و $n_2 = 22$ من مدرستين لدراسة متوسط علامة الطالب في مقرر الرياضيات في كل من المدرستين. فوجدنا أن متوسطي هاتين العينتين وتباينهما كانا يساويان : $\bar{x}_1 = 60$ و $\bar{x}_2 = 70$ و $s_1^2 = 100$ و $s_2^2 = 200$.

والمطلوب:

- إيجاد تقدير للفرق بين متوسطي العلامة في هذين المجتمعين وتقدير الانحراف المعياري .
- إيجاد مجال الثقة باحتمال قدره $\beta = 0.95$ للفرق بين متوسطي العلامة في هذين المجتمعين .

7 – سحبنا عينة من الطالبات $n_1 = 15$ طالبة ومن بين الطلاب عينة بحجم $n_2 = 20$ طالب، ودرسنا متوسط نفقاتهم في الشهر، فوجدنا أن متوسط نفقات الطالبة في العينة $\bar{x}_1 = 1200$ وأن متوسط نفقات الطالب في العينة $\bar{x}_2 = 1000$ ، وأن تباين النفقات في عينة الطالبات كان يساوي $s_1^2 = 600$ ، وأن تباين النفقات في عينة الطلاب كان يساوي $s_1^2 = 500$ ، وأن نسبة ما تنفقه الطالبات في العينة على الكتب كانت تساوي $r_1 = 0.10$ ، بينما كانت نسبة ماينفقه الطلاب في العينة على الكتب كانت تساوي $r_2 = 0.20$ ، **والمطلوب:**

- تقدير الفرق بين متوسطي النفقات للطالبات والطلاب، وإيجاد مجال الثقة لذلك الفرق باحتمال ثقة $\beta = 0.95$.

- تقدير الفرق بين نسبتي النفقات على الكتب، وإيجاد مجال الثقة لذلك الفرق باحتمال ثقة $\beta = 0.95$.