٦

البرمجة الخطية

مسألة (١):

ينتج أحد المصانع /٣/ أنواع من المنتجات A_3 ، A_2 ، A_1 باستخدام مادتين أوليتين B_2 ، B_1 يتوفر منهما على الترتيب 20 , 30 فإذا كان:

إنتاج وحدة واحدة من A_1 : يتطلب 2 من B_1 و 4 من B_2

وإنتاج وحدة واحدة من A_2 : يتطلب 2 من B_1 و 1 من B_2

وإنتاج وحدة واحدة من A_3 : يحتاج إلى 2 من B_1 و 3 B_2

مع العلم أن ربح الوحدة الواحدة من A_3 ، A_2 ، A_1 على الترتيب هو: 2 , 1 , 3.

المطلوب: تنظيم عملية الإنتاج بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل:

لننظم الجدول التالي ليسهل علينا كتابة القيود:

المنتجات	B_1	B_2	الربح
A_1	2	4	3
A_2	2	1	1
A_3	2	3	2
الكميات المتاحة	20	6	

المنتجات

لنفرض أن:

X_1 : الكمية اللازم إنتاجها من A_1

X_2 : الكمية اللازم إنتاجها من A_2

X_3 : الكمية اللازم إنتاجها من A_3

بالاعتماد على ما سبق يمكن صياغة نموذج حل المسألة كما يلي:

دالة الهدف هي:

$$Z = 3X_1 + 1X_2 + 2X_3 \to Maz$$

والقيود S.T هي:

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 20$$

$$4X_1 + 1X_2 + 3X_3 \le 30$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

وشروط عدم السلبية هي: $X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

مسألة (٢):

ينتج أحد المصانع نوعين من المنتجات A_1 , A_2 ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول 10 ومن المنتج الثاني 6 وساعات العمل كما يلي:

المنتجات	عدد ساعات العمل في القسم الأول	عدد ساعات العمل في القسم الثاني	عدد ساعات العمل في القسم الثالث
A_1	15	7	0
A_2	5	10	8
عدد العمال	60	150	40

حيث أن عدد ساعات العمل الأسبوعية للعامل الواحد = 40 ساعة

والمطلوب: تنظيم عملية الإنتاج بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل:

لنفرض أن:

X_1 : الكمية اللازم إنتاجها من A_1

X_2 : الكمية اللازم إنتاجها من A_2

بالاعتماد على ما سبق يمكن صياغة نموذج حل المسألة كما يلي:

دالة الهدف هي: $Z = 10X_1 + 6X_2 \rightarrow Maz$

والقيود S.T هي:

$$10X_1 + 5X_2 \leq 2400 \qquad (60 \times 40)$$

$$7X_1 + 10X_2 \leq 6000 \qquad (150 \times 40)$$

$$8X_2 \leq 1600 \qquad (40 \times 40)$$

وشروط عدم السلبية هي: $X_1 , X_2 \geq 0$

ملاحظة هامة:

يجب أن تكون وحدات القياس في الطرف الأول من المتراجحة هي نفسها التي في الطرف الثاني منها.

مسألة (٣):

نفترض أن إحدى الشركات تنتج إحدى السلع التي يجب أن يكون وزنها 150 كغ ويستخدم في إنتاجها المواد الأولية التالية:

التكلفة	المواد الأولية
2	A
8	B

ولإنتاج وحدة واحدة من المنتج النهائي لابد من استخدام 14 وحدة من B على الأقل و ~~14~~ 20 وحدة من A على الأكثر وكل وحدة من A تزن 5 كغ ومن B تزن 10 كغ. (وزنها 150)

والمطلوب:

ما هي الكمية الواجب استخدامها من كل وحدة من المنتج النهائي إذا رغبت في تخفيض التكاليف.

الحل: قيد

	المواد الأولية	التكلفة	إنتاج الوحدة الواحدة	وزن الوحدة الواحدة
X_1	A	2	20 على الأكثر	5
X_2	B	8	14 على الأقل	10

150

لنفرض أن:

X_1 : ما يتم استخدامه من A

X_2 : ما يتم استخدامه من B

بالاعتماد على ما سبق يمكن صياغة نموذج حل المسألة كما يلي:

دالة الهدف هي:

$$Z = 2X_1 + 8X_2 \to \cancel{Max}\ Min$$

والقيود S.T هي:

$$X_1 \le 20$$

$$X_2 \ge 14$$

$$5X_1 + 10X_2 = 150$$

وشروط عدم السلبية هي:

$$X_1, X_2 \ge 0$$

مسألة (٤):

ترغب إحدى الشركات السياحية بالترويج عن رحلة سياحية تقوم بها وقد خصصت الشركة مبلغاً قدره 8000 دولار أسبوعياً من أجل الحملة الدعائية ويوزع المبلغ المخصص على الدعاية حسب الوسائل الإعلامية التالية: التلفاز، الجريدة اليومية، الراديو، علماً بأن هدف الشركة هو الوصول إلى أكبر عدد ممكن من الجمهور.

ويوضح الجدول التالي بعض المعلومات عن المسألة:

وسيلة الإعلام	عدد الجمهور	تكلفة الإعلان الواحد	الحد الأقصى للإعلان
T.V (١ دقيقة)	5000	800	2
الجريدة اليومية (صفحة كاملة)	8500	925	5
الراديو (٣٠ ثا/فترة الذروة)	2400	290	25
الراديو (١ دقيقة/بعد الظهر)	2800	380	20

وترغب إدارة الشركة بالقيام بخمسة إعلانات على الأقل أسبوعياً كما حددت مبلغاً قدره 1800 دولار أسبوعياً على الأكثر للإعلانات عبر الراديو.

والمطلوب: الصياغة الرياضية للمسألة.

الحل:

لنفرض أن:

X_1 : عدد الإعلانات على التلفاز.

X_2 : عدد الإعلانات على الجريدة اليومية.

X_3 : عدد الإعلانات على الراديو في فترة الذروة.

X_4 : عدد الإعلانات على الراديو بعد الظهر.

بالاعتماد على ما سبق يمكن صياغة نموذج حل المسألة كما يلي:

دالة الهدف هي:

$$Z = 5000\,X_1 + 8500\,X_2 + 2400\,X_3 + 2800\,X_4 \rightarrow Maz$$

والقيود S.T هي:

$$X_1 \le 2$$
$$X_2 \le 5$$
$$X_3 \le 25$$
$$X_4 \le 20$$
$$800\,X_1 + 925\,X_2 + 290\,X_3 + 380\,X_4 \le 8000$$
$$X_3 + X_4 \ge 5$$
$$290\,X_3 + 380\,X_4 \le 1800$$

وشروط عدم السلبية هي:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

مسألة (٥):

ليكن لدينا النموذج التالي:

دالة الهدف هي:

$$Z = 1\,X_1 + 3\,X_2 \rightarrow Maz$$

والقيود S.T هي:

$$X_1 \le 20$$
$$X_2 \le 10$$
$$\frac{-2}{3}X_1 + 1\,X_2 \le 1$$
$$X_1 + X_2 \le 28$$

وشروط عدم السلبية هي:

$$X_1, X_2 \ge 0$$

والمطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

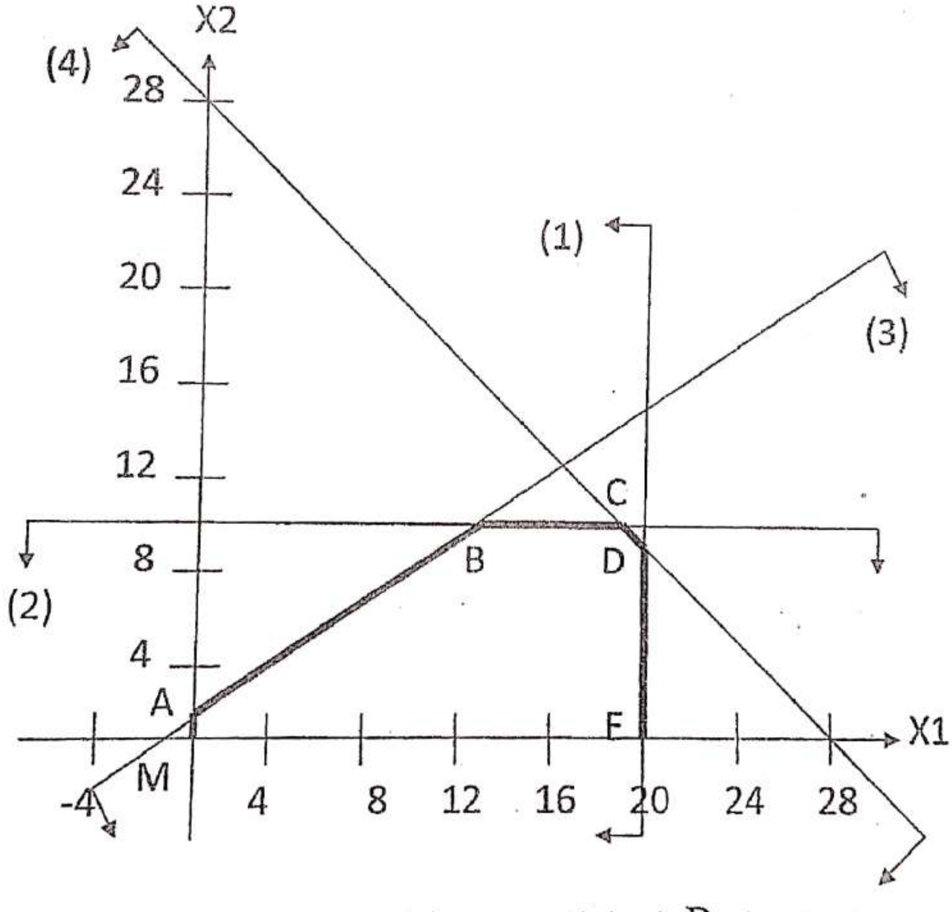
الحل:

نحول المتراجحات إلى معادلات:

$$X_1 = 20 \quad \Rightarrow (20,0)$$
$$X_2 = 10 \quad \Rightarrow (0,10)$$
$$\frac{-2}{3}X_1 + 1\,X_2 = 1 \quad \Rightarrow (\frac{-3}{2},1)$$

$$X_1 + X_2 = 28 \qquad \Rightarrow (28,28)$$

نرسم المستقيمات:



نوجد إحداثيات النقطة B بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين الذين يتقاطعان عندها وهما المستقيمين الثاني والثالث وبالحل نجد: B (13.5 , 10)

ونوجد إحداثيات النقطة C بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين الذين يتقاطعان عندها وهما المستقيمين الثاني والرابع وبالحل نجد: C (18 , 10)

ونوجد إحداثيات النقطة D بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين الذين يتقاطعان عندها وهما المستقيمين الأول والرابع وبالحل نجد: D (20 , 8)

نعوض إحداثيات النقاط في دالة الهدف:

$$A(0,1) \Rightarrow Z_A = 1(0) + 3(1) = 3$$
$$B(13.5,10) \Rightarrow Z_B = 1(13.5) + 3(10) = 43.5$$
$$\boxed{C(18,10) \Rightarrow Z_C = 1(18) + 3(10) = 48}$$
$$D(20,8) \Rightarrow Z_D = 1(20) + 3(8) = 44$$
$$E(20,0) \Rightarrow Z_E = 1(20) + 3(0) = 20$$

وبالتالي الحل الأفضل هو (48) الذي تعطيه النقطة C وهو أعلى ربح ممكن.

مسألة (٦):

ليكن لدينا النموذج التالي:

دالة الهدف هي: $Z = 2X_1 + 8X_2 \rightarrow Min$

والقيود S.T هي:

$$5X_1 + 10X_2 = 150$$
$$X_2 \geq 14$$
$$X_1 \leq 20$$

وشروط عدم السلبية هي: $X_1, X_2 \geq 0$

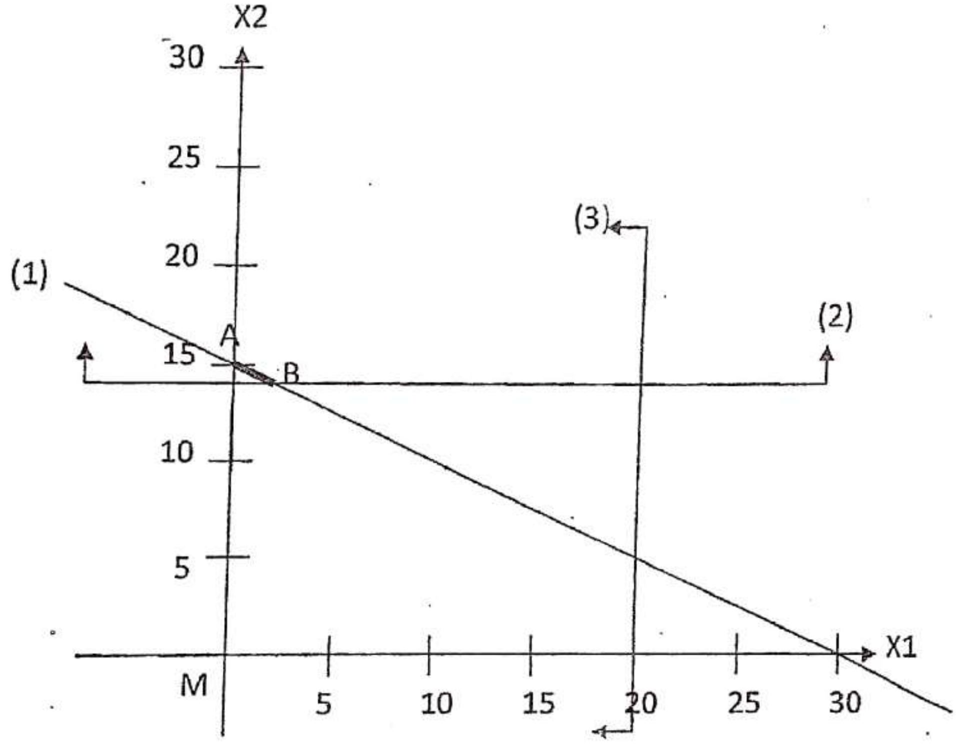
والمطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

نحول المتراجحات إلى معادلات:

$$5X_1 + 10X_2 = 150 \quad \Rightarrow (30,15)$$
$$X_2 = 14 \quad \Rightarrow (0,14)$$
$$X_1 = 20 \quad \Rightarrow (20,0)$$

نرسم المستقيمات:



نوجد إحداثيات النقطة B بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين الذين يتقاطعان عندها وهما المستقيمين الأول والثاني وبالحل نجد: B (2 , 14)

نعوض إحداثيات النقاط في دالة الهدف:

$$A(0,15) \Rightarrow Z_A = 2(0) + 8(15) = 120$$

$$\boxed{B(2,14) \Rightarrow Z_B = 2(2) + 8(14) = 116}$$

وبالتالي الحل الأفضل هو (116) الذي تعطيه النقطة B وهو أقل تكلفة ممكنة.

انتهت المحاضرة الأولى...