الفصل السابع

تحليل التباين باتجاهين

Tow-Way Analysis of Variance

7 – 1 مقدمة :

تناولنا في الفصل السابق كيف تم تحليل التباين إذا كانت الظواهر تتميز بصفتين متباينتين إلا أن الواقع العملي يختلف من حيث تعدد صفات الظواهر المدروسة وتباينها. لذلك سنحاول في هذا الفصل دراسة تأثير عاملين اثنين على متغير ما، بحيث يتضمن كل عامل عددا من الصفات أو الخواص. ويدعى أحد العاملين بمتحول الأعمدة وتصنف فيه المشاهدات في مجموعات. ويدعى العامل الآخر بمتحول الصفوف، ويتضمن عددا من المستويات المختلفة.

فإذا كان لدينا عدة أصناف من بذور الذرة الصفراء وعدة أنواع من السماد، ونريد دراسة صنف الذرة ونوعية السماد على إنتاج الذرة الصفراء. فعند دراسة وتصميم مثل هذه التجربة يكون لدينا عدة تراكيب مؤلفة من صنف البذور ونوع السماد. وهدفنا اختبار تركيب معين من صنف البذور ونوعية السماد بحيث يحقق أفضل متوسط إنتاج لبذور الذرة من بين التراكيب الأخرى المختلفة.

7 – 2 تحليل التباين ثنائي التصنيف:

هناك بعض الظواهر التي يمكن أن تصنف وحداتها وفقا لعدة معايير وخواص وفق جدول نسميه جدول التوافق. ومن أبسط أنواع جداول التوافق هو الجدول الذي يوزع المفردات وفقا لمعيارين من معايير التصنيف، ويمكننا أن نحلل التباين لجدول توافق 2×2 . نسمي هذا التحليل بتحليل التباين ثنائي التصنيف، ولإعطاء فكرة عن تحليل التباين ثنائي التصنيف سنعطي المثال الآتي:

نفرض أننا نريد دراسة تأثير كل من المستوى التعليمي وتأثير عمر الزوجة في متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة، ولنفترض أن هناك k مستوى تعليمي، و q فئة عمرية متباينة، يمكننا إذا افتراض أن المستوى التعليمي للأم ممثلة بـ A_i حيث أن $(i=1,2,3,\dots k)$ ، وأن الفئات العمرية ممثلة بـ β_m حيث أن $(m=1,2,3,\dots q)$ ، لنفترض أنه أخذنا متوافقة من بين المتوافقات الممكنة والمثلة بمتوسط عدد الأطفال لأسر من مستويات تعليمية مختلفة k وتباين عمر الزوجة q (فئات عمرية)، نكون قد اخترنا عشوائيا من $q.k$ مجتمع إحصائي فيه عدد الوحدات يساوي $q.k$.

لنرمز بـ x_{im} إلى الوحدة أو المشاهدة(المستوى التعليمي للأم i وعمرها m).

7 – 2 – 1 النموذج الرياضي العام لتحليل التباين ثنائي التصنيف :

لنفرض أن x_{im} هي قيم مقدرة للمتحولات العشوائية التي تتميز بتوزيعات طبيعية أوساطها μ_{im} وتباينها معلوم ويساوي σ^2 ، وبافتراض أن:

$$\mu_{im} = \mu + \alpha_i + \beta_m \qquad (1-7)$$

حيث أن :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \qquad , \sum_{m=1}^{q} \beta_m = 0 \qquad (2-7)$$

وبالتالي وضمن الشروط السابقة يمكننا تحديد النموذج النظري وفق ما يلي :

$$\mu_{im} = \mu + \alpha_i + \beta_m + e_{im} \qquad (3-7)$$

حيث أن :

$$i = 1,2,3\dots.k$$
$$m = 1,2,3,..q$$

e_{im} يمثل متحولات عشوائية مستقلة وموزعة توزعا طبيعيا وسطها الحسابي معدوم وتباينهما موحد ويساوي σ^2.

7 – 2 – 2 اختبار الفرضيات:

إن اختبار الفرضيات بالاعتماد على أسس تحليل التباين يتم بعد دراسة النقاط الآتية:

– تحديد الفرضيات:

الفرضية الابتدائية:

$$H_0 : \begin{cases} \alpha_i = 0 & i = 1,2,3,\ldots.k \\ \beta_m = 0 & m = 1,2,3,\ldots q \end{cases} \qquad (4-7)$$

الفرضية البديلة:

$$H_1 : \begin{cases} \alpha_i \neq 0 \\ \beta_m \neq 0 \end{cases} \qquad (5-7)$$

من أجل قيمة واحدة لـ i و m على الأقل.

– حساب التباينات :

إن اختبار هذه الفرضيات – كما هو الحال في تحليل التباين آحادي التصنيف – مبني على التحليل التالي للتباين الكلي للمعلومات، حيث يمكننا أن نكتب: :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{q}(x_{im}-\overline{x})^2 = q\sum(\overline{x}_i-\overline{x})^2 + k\sum(\overline{x}_m-\overline{x})^2 + \sum\sum(x_{im}-\overline{x}_i-\overline{x}_m-\overline{x})^2 \qquad (6-7)$$

حيث أن :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q} x_{im} \qquad , \bar{x}_m = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{im} \qquad (7-7)$$

أما باقي الرموز فهي كما في الحالة الأولى (تحليل التباين أحادي التصنيف) .

يمثل الطرف الأيمن من المعادلة $(7-6)$ التباين الكلي، أما الحد الأول من الطرف الثاني من المعادل $(7-6)$ يمثل تباين المعاملات الموجود بين القيم نتيجة التغير في المتحول (المستوى التعليمي)، أما الحد الثاني يمثل نتيجة التغير في المتحول (المستوى العمري للزوجة)، أما الحد الثالث يمثل التباين نتيجة المصادفة (تباين الأخطاء)، فيكون :

$$SST = SSA + SSB + SSE \qquad (8-7)$$

ويمكن البرهان في حالة تحقق الفرضية H_0 بالنسبة لـ α_I يكون لدينا $\frac{SSA}{\sigma^2}$ و $\frac{SSE}{\sigma^2}$ وهي قيم مقدرة لمتحولات عشوائية مستقلة وموزعة بحسب توزيع χ^2 وأن درجات حريتها بالتتالي $(k-1)$ و$(q-1)$.

أما في حالة تحقق الفرضية H_1 بالنسبة لـα_I فإن جزءا من التباين SSA يمكن أن نعزوه إلى الفروق الناتجة عن قيم A_i أي عن المستوى التعليمي للمرأة.

وبصورة مشابهة، في حال تحقق الفرضية H_0 بالنسبة لـ B_m يكون لدينا $\frac{SSB}{\sigma^2}$ و $\frac{SSE}{\sigma^2}$ وهي قيم مقدرة لمتحولات عشوائية مستقلة وموزعة بحسب توزيع χ^2 وأن درجات حريتها بالتتالي $(q-1)$ و $(q-1)(k-1)$.

أما إذا لم تتحقق الفرضية H_0 ، فإن التباين يعود جزئيا إلى وجود اختلاف بين قيم B_m أي بين الفئات العمرية للام.

وإذا تحققت الفرضية H_0 في آن واحد بالنسبة لـ α_I و B_m فإن القيم $\frac{SST}{\sigma^2}$ هي قيم مقدرة للمتحول العشوائي الموزع بحسب توزيع χ^2 وأن عدد درجات الحرية يساوي $(k.q-1)$.

وبالتالي فإن القيمة الفعلية لـ $\widetilde{F}_A$ تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\widetilde{F}_A = \frac{\dfrac{SSA}{(k-1)}}{\dfrac{SSE}{(q-1)(k-1)}} = \frac{(q-1)SSA}{SSE} \qquad (9-7)$$

نرفض الفرضية H_0 بالنسبة لـ α_i ، إذا كانت قيم $\widetilde{F}_A$ المقدرة أكبر من قيمة $F_{1-\alpha}$ الجدولية المقابلة لمستوى دلالة معين α ولعدد درجات حرية $(k-1)$ في الصورة و $(q-1)(k-1)$ في المخرج.

كما يمكن اختبار الفرضية المتعلقة بـ B_m بتحديد $\widetilde{F}_B$ كالآتي:

$$\widetilde{F}_B = \frac{\dfrac{SSB}{(q-1)}}{\dfrac{SSE}{(q-1)(k-1)}} = \frac{(k-1)SSB}{SSE} \qquad (10-7)$$

نرفض الفرضية H_0 بالنسبة لـ B_m ، إذا كانت قيم $\widetilde{F}_B$ المقدرة أكبر من قيمة $F_{1-\alpha}$ الجدولية المقابلة لمستوى دلالة معين α ولعدد درجات حرية $(q-1)$ في الصورة و $(q-1)(k-1)$ في المخرج.

وبالتالي يمكننا وضع جدول تحليل التباين كالآتي:

مصدر التباين / البيان	درجات الحرية	مجموع مربع الانحرافات	متوسط المربعات	قيمة مؤشر الاختبار
بين قيم A_i	$k-1$	SSA	$MSA=\frac{SSA}{k-1}$	$\tilde{F}_A=\frac{MSA}{MSE}$
بين قيم B_m	$q-1$	SSB	$MSB=\frac{SSB}{q-1}$	$\tilde{F}_B=\frac{MSB}{MSE}$
تباين الأخطاء	$(k-1)(q-1)$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{(k-1)(q-1)}$	
التباين الكلي	$(q.k-1)$	SST		

مثال$(7-1)$:

لنفترض أننا نريد اختبار تأثير المستوى التعليمي وتأثير عمر الزوجة في متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة، ومن أجل هذا جمعنا معلومات عن متوسط عدد الأطفال لجميع المتوافقات الممكنة لأسر من ثلاثة مستويات تعليمية ولخمس فئات عمرية مختلفة وكانت النتائج كالآتي:

الفئات العمرية	مستوى التعليم: ملمّ	ثانوية	تعليم عالي
20–24	3	2	–
25–29	4	4	1
30–34	6	4	3
35–39	6	5	3
40–49	8	5	4

فهل يمكن القول أنه ضمن درجة ثقة $\alpha=0.05$ لا يوجد تأثير لكل من المستوى التعليمي والعمر في متوسط عدد الأطفال ؟

الحل:

نضع الفرضيات:

فرضية العدم H_0 :لا يوجد تأثير للمستوى التعليمي وعمر الزوجة في متوسط عدد الأطفال.

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
$$: B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = 0$$

وحيث أن:

$$\alpha_i + B_m = \mu_{im} - \mu$$
$$i = 1,2,3$$
$$m = 1,2,3,4,5,$$

μ_{im} يمثل عدد الأطفال حسب المستوى التعليمي وعمر الزوجة في الأسرة.

μ يمثل عدد الأطفال بشكل عام في الأسرة.

الفرضية البديلة H_1 : يوجد تأثير للمستوى التعليمي وعمر الزوجة في متوسط عدد الأطفال.

$$H_1 : \alpha_i \neq 0$$
$$: B_m \neq 0$$

على الأقل من أجل قيمة واحدة لـ i ، m $\quad i = 1,2,3 \quad m = 1,2,3,4,5$

إيجاد القيمة الفعلية لإحصائية الاختبار:

لإيجاد القيمة الفعلية لمؤشر الاختبار $\widetilde{F}$: نشكل الجدول المساعد الآتي:

الفئات العمرية i	المستوى التعليمي j			$x_m = \sum_{i=1}^{3} x_{im}$	$\bar{x}_i$
	ملمّ	ثانوي	تعليم عالي		
20-24	3	2	-	5	1.67
25-29	4	4	1	9	3
30-34	6	4	3	13	4.33
35-39	6	5	3	14	4.67
40-49	8	5	4	17	5.67
$x_i = \sum_{m=1}^{5} x_{im}$	27	20	11	$X = 58$	
$\bar{x}_m$	5.4	4	2.2		$\bar{x}_{im} = 3.868$
$x_i^2 = \sum_{m=1}^{5} x_{im}^2$	161	86	35		$T = \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{5} x_{im}^2 = 282$

ويمكن إتمام جدول الحسابات على النحو الآتي:

$$T = 282$$

$$C = \frac{X^2}{k.q} = \frac{(58)^2}{(3).(5)} = 224.27$$

$$SST = T - C = 282 - 224.27 = 57.73$$

لدينا أيضا:

$$(SSA)_i = \sum_{m=1}^{q=5} x_{im}^2 - \frac{x_i^2}{q}$$

$$(SSB)_m = \sum_{i=1}^{k=4} x_{im}^2 - \frac{x_m^2}{k}$$

ومجموع التباينات تتحدد وفق الآتي:

$$SSA=\sum_{i=1}^{k=3}(SSA)_i=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{m=1}^{5}X_{im}^2-\frac{X_i^2}{q}\right)$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{3}X_i^2)}{q}-C$$

$$=\frac{\left[(27)^2+(20)^2+(11)^2\right]}{5}-224.27=25.73$$

وبشكل مشابه يمكن حساب، SSB وحيث أن:

$$SSB=\sum_{m=1}^{q=5}(SSB)_m=\sum_{m=1}^{5}\left(\sum_{i=1}^{3}X_{im}^2-\frac{X_m^2}{k}\right)$$

$$=\frac{(\sum_{m=1}^{5}X_m^2)}{k}-C$$

$$=\frac{\left[(5)^2+(9)^2+(13)^2+(14)^2+(17)^2\right]}{3}-224.27=29.06$$

ونجد أن:

$$SSE=SST-SSA-SSB=57.73-25.73-29.06=2.94$$

يمكن تلخيص ما تقدم في جدول تحليل التباين على الشكل الآتي:

البيان / مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع مربع الانحرافات	متوسط المربعات	قيمة مؤشر الاختبار
بين قيم A_i	$k-1=$ $3-1=2$	$SSA=25.73$	$MSA=\frac{25.73}{2}$ $=12.865$	$\tilde{F}_A=\frac{12.865}{0.5675}$ $=35.007$
بين قيم B_m	$q-1=$ $5-1=4$	$SSB=29.06$	$MSB=\frac{29.06}{4}$ $=7.265$	$\tilde{F}_B=\frac{7.265}{0.5675}$ $=19.77$
تباين الأخطاء	$(k-1)(q-1)=$ $(2).(4)=8$	$SSE=2.94$	$MSE=\frac{2.94}{8}$ $=0.3675$	
التباين الكلي	$(q.k-1)=$ $(3.5-1)=14$	$SST=57.73$		

إيجاد القيمة الجدولية $\tilde{F}_{0.95(4,8)}=3.84$ ، $\tilde{F}_{0.95(2,8)}=4.46$.

المقارنة واتخاذ القرار:

نلاحظ أن القيمة الفعلية المحسوبة $\tilde{F}_B$ هي أكبر من القيمة الجدولية $\tilde{F}_{0.95(4,8)}=3.68$ ، لذلك نرفض H_0 والقائلة بأنه لا يوجد تأثير لعمر الزوجة على عدد الأطفال في الأسرة.

نلاحظ أن القيمة الفعلية المحسوبة $\tilde{F}_A$ هي أكبر من القيمة الجدولية $\tilde{F}_{0.95(2,8)}=4.46$ ، لذلك نرفض H_0 والقائلة بأنه لا يوجد تأثير للمستوى التعليمي للزوجة على عدد الأطفال في الأسرة.

7 – 3 تحليل التباين الداخلي (التفاعل الداخلي):

إن نموذج تحليل التباين ثنائي التصنيف لا يحدد التأثير المشترك بين المتحولين المدروسين أو ما يسمى التفاعل الداخلي بين المتحولات، لذلك سوف ندرس هذا النموذج لتبيان مدى التفاعل أو التأثير الداخلي بين المتحولات.

7−3−1 النموذج :

ندرس المثال السابق نفسه، نفرض أن متوسط عدد الأطفال في الأسرة المتعلق بجميع المتوافقات الممكنة للمستوى التعليمي والفئات العمرية للزوجة هي قيم مقدرة لمتحول عشوائي موّزع توزعا طبيعيا وسطه الحسابي يساوي:

$$\mu_{im} = \mu + \alpha_i + \beta_m + u_{im} \qquad (11-7)$$

حيث أن :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \qquad , \sum_{m=1}^{q} \beta_m = 0 \qquad , \sum_{i=1}^{k} u_{im} = 0 \qquad (12-7)$$

لاختبار الفرضيات المتعلقة بـ α_i و B_m و u_{im} ، فإنه من الضروري أن نلجأ إلى اختبار أكثر من مشاهدة لكل متوافقة من المستوى التعليمي والفئات العمرية للزوجة، من أجل الوصول إلى تقدير للخطأ التجريبي.

لنرمز بـ X_{imj} إلى المشاهدة ذات الرقم j من المستوى التعليمي i ومن الفئة العمرية m، وحيث أن $j = 1,2,3,\ldots n$ تمثل عدد المشاهدة من كل متوافقة للمستوى التعليمي وعمر الزوجة، ومن ثم فإن النموذج النظري الموافق يكون:

$$\mu_{imj} = \mu + \alpha_i + \beta_m + u_{im} + e_{im} \qquad (13-7)$$

من أجل:

$$i = 1,2,3\ldots.k$$
$$m = 1,2,3,..q$$
$$j = 1,2,3,..n$$

e_{imj} يمثل متحولات عشوائية مستقلة وموزعة توزعا طبيعيا وسطها الحسابي معدوم وتباينهما موحد ويساوي σ^2.

7-3-2 اختبار الفرضيات:

إن اختبار الفرضيات بالاعتماد على أسس تحليل التباين يتم بعد دراسة النقاط الآتية:

تحديد الفرضيات:

الفرضية الابتدائية:

$$H_0 : \begin{cases} \alpha_i = 0 & i = 1,2,3,\ldots.k \\ B_m = 0 & m = 1,2,3,\ldots q \\ e_{imj} = 0 & j = 1,2,3,\ldots n \end{cases} \qquad (14-7)$$

الفرضية البديلة:

$$H_1 : \begin{cases} \alpha_i \neq 0 \\ B_m \neq 0 \\ e_{imj} = 0 \end{cases} \qquad (15-7)$$

من أجل قيمة واحدة لـ i وm و j على الأقل.

حساب التباينات :

يمكن تجزئة التباين الكلي إلى عدة تباينات كالتالي : تباين بين قيم A_i و تباين بين قيم B_m و تباين للتأثير الداخلي بين قيم A_i و B_m ثم تباين الأخطاء العشوائية، يسمى " تباين التأثير المتبادل بين المتحولات بالتفاعل الداخلي أو بالتبادل الداخلي "

ويمكن التعبير عن معادلة تحليل التباين ، كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}(x_{im}-\bar{x}_i)^2 = q.n\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{x})^2 + k.n\sum_{m=1}^{q}(x_m-\bar{x})^2 + n\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{q}(x_{im}-\bar{x}_i-\bar{x}_m+\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}(x_{imj}-\bar{x}_{im})^2 \qquad (16-7)$$

حيث أن :

$\bar{x}$ الوسط الحسابي العام لجميع المعطيات .

$\bar{x}_i$ الوسط الحسابي لجميع قيم A_i .

$\bar{x}_m$ الوسط الحسابي لجميع قيم B_m .

$\bar{x}_{im}$ الوسط الحسابي لجميع قيم A_i المتوافقة مع B_m .

وبالتالي :

$$SST = SSA + SSB + SSU + SSE \qquad (17-7)$$

يتم اختبار الفرضية H_0 المتعلقة بـ α_I عن طريق تحديد :

$$\tilde{F}_A = \frac{\dfrac{SSA}{(k-1)}}{\dfrac{SSE}{k.q(m-1)}} = \frac{k.q(m-1)SSA}{(k-1)SSE} \qquad (18-7)$$

والتي تخضع لتوزيع F بـ $k.q(m-1)$ درجة حرية للصورة و$(k-1)$ للمخرج.

نقبل الفرضية H_0 بالنسبة لـ α_i ، إذا كانت قيم $\tilde{F}_A$ المقدرة أصغر من قيمة $F_{1-\alpha}$ الجدولية المقابلة لمستوى دلالة معين α ولعدد درجات حرية $k.q(m-1)$ و $(k-1)$ للمخرج.

بصورة مشابهة، يتم اختبار الفرضية المتعلقة بـ B_m بتحديد $\tilde{F}_B$ كالآتي:

$$\tilde{F}_B = \frac{\dfrac{SSB}{(q-1)}}{\dfrac{SSE}{(q-1)(k-1)}} = \frac{k.q(m-1)SSB}{(q-1)SSE} \qquad (19-7)$$

نرفض الفرضية H_0 بالنسبة لـ B_m ، إذا كانت قيم $\tilde{F}_B$ المقدرة أكبر من قيمة $F_{1-\alpha}$ الجدولية المقابلة لمستوى دلالة معين α ولعدد درجات حرية $k.q(m-1)$ و $(k-1)$ للمخرج.

يمكننا بشكل مشابه، اختبار الفرضية المتعلقة بـ u_{im} بتحديد $\tilde{F}_u$ كما يلي :

$$\tilde{F}_u = \frac{\dfrac{SSU}{(k-1)(q-1)}}{\dfrac{SSE}{k.q(m-1)}} = \frac{k.q(m-1)SSU}{(k-1)(q-1)SSE} \qquad (20-7)$$

نرفض الفرضية H_0 بالنسبة لـ U_m ، إذا كانت قيم $\tilde{F}_u$ المقدرة أكبر من قيمة $F_{1-\alpha}$ الجدولية المقابلة لمستوى دلالة معين α ولعدد درجات حرية $(k-1)(q-1)$ و $k.q(m-1)$ للمخرج.

وبالتالي يمكننا وضع جدول تحليل التباين، كالآتي:

البيان / مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع مربع الانحرافات	متوسط المربعات	قيمة مؤشر الاختبار
بين قيم A_i	$k-1$	SSA	$MSA=\dfrac{SSA}{k-1}$	$\tilde{F}_A=\dfrac{MSA}{MSE}$
بين قيم B_m	$q-1$	SSB	$MSB=\dfrac{SSB}{q-1}$	$\tilde{F}_B=\dfrac{MSB}{MSE}$
التباين الداخلي	$(k-1)(q-1)$	SSU	$MSU=\dfrac{SSU}{(k-1)(q-1)}$	$\tilde{F}_u=\dfrac{MSU}{MSE}$
تباين الأخطاء	$k.q(m-1)$	SSE	$MSE=\dfrac{SSE}{k.q(m-1)}$	
التباين الكلي	$m.q.k-1$	SST		

مثال $(7-2)$:

نريد اختبار تأثير المستوى التعليمي وعمر الزوجة في متوسط عدد الأطفال لعدة أسر . تم جمع المعلومات عن متوسط عدد أفراد الأسر لجميع المتوافقات الممكنة من مستويين تعليميين ولثلاث فئات عمرية مختلفة وكانت النتائج كالآتي :

متوسط عدد أفراد الأسرة	ملمّ			ثانوية		
	$m=1$ 20–24	$m=2$ 25–29	$m=3$ 30–34	$m=1$ 20–24	$m=2$ 25–29	$m=3$ 30–34
1	3	4	6	2	4	4
2	4	5	7	3	5	6
3	2	3	5	4	5	6
4	3	5	7	3	5	4

والمطلوب تحديد تأثير كل من المستوى التعليمي وعمر الزوجة على متوسط عدد أفراد الأسرة من خلال تحليل التباين ، ودراسة التفاعل الداخلي للمستوى التعليمي وعمر الزوجة.

الحل:

النموذج الرياضي:

$$\mu_{imj} = \mu + \alpha_i + \beta_m + u_{im} + e_{im}$$

من أجل:

$$i = 1,2,3....k$$
$$m = 1,2,3,..q$$
$$j = 1,2,3,..n$$

$1-$ نضع الفرضيات:

الفرضية الابتدائية H_0 :

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$
$$: B_1 = B_2 = B_3 = 0$$
$$: e_{imj} = 0$$

الفرضية البديلة H_1 :

$$H_1 : \alpha_i \neq 0$$
$$: B_m \neq 0$$
$$: e_{imj} \neq 0$$

على الأقل من أجل قيمة واحدة لـ i ، m ، j حيث أن

$$i = 1,2$$
$$m = 1,2,3$$
$$j = 1,2,3,4$$

2 – إيجاد القيمة الفعلية لإحصائية الاختبار:

لإيجاد القيمة الفعلية لمؤشر الاختبار $\tilde{F}$: نشكل الجدول المساعد الآتي:

متوسط عدد أفراد الأسرة k	ملمّ $i=1$			ثانوية $i=2$			المجموع
	$m=1$ 20–24	$m=2$ 25–29	$m=3$ 30–34	$m=1$ 20–24	$m=2$ 25–29	$m=3$ 30–34	
1	3	4	6	2	4	4	
2	4	5	7	3	5	6	
3	2	3	5	4	5	6	
4	3	5	7	3	5	4	
X_{im}	12	17	25	12	19	20	$X = 105$
$\sum_{j=1}^{4} X_{imj}^2$	38	75	159	38	91	104	$T = 505$
$\frac{X_{im}^2}{4}$	36	72.25	156.3	36	90.25	100	
SSE_{im}	2	2.75	2.75	2	0.75	4	$SSE = 14.25$

ويمكن إتمام جدول الحسابات على النحو الآتي:

$$X_{im} = \sum_{j=1}^{n} X_{imj}$$

$$X = \sum_{i=1}^{k=2} \sum_{m=1}^{q=3} X_{im} = 105$$

$$T = \sum_{i=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} X_{imj}^{2} = 505$$

$$C = \frac{X^2}{n.k.q} = \frac{(105)^2}{.(4).(3).(2)} = 459.375$$

$$SSE_{im} = \sum_{j=1}^{n} X_{imj}^{2} - \frac{X_{im}^{2}}{n}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k=2} \sum_{m=1}^{q=3} SSE_{im} = 14.25$$

$$SST = T - C = 505 - 459.375 = 45.625$$

إن الفرق $(SST - SSE)$ يمثل مجموع مربعات انحرافات مجموعة العوامل التي يمكن التحكم بها. ويمكن تجزئتها إلى ثلاثة أجزاء، يتعلق الجزءان الأوليان بالعاملين المستوى التعليمي وعمر الزوجة، أما الجزء الثالث يعود إلى التفاعل الداخلي بين العاملين السابقين.

ومن أجل تحديد التباينات المختلفة، يتوجب علينا حساب قيم الجدول الآتي:

المستوى التعليمي i	عمر الزوجة m 1	2	3	X_i
1	12	17	25	54
2	12	19	20	51
X_m	24	36	45	105

حيث أن:

من أجل كل i:

$$X_i = \sum_{m=1}^{q} X_{im}$$

من أجل كل m:

$$X_m = \sum_{i=1}^{k} X_{im}$$

و

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{m=1}^{q} X_m = X$$

ومنه يمكننا حساب مجموع مربع الانحرافات لكل من عاملي المستوى التعليمي وعمر الزوجة، وفق ما يلي :

$$SSA = \frac{1}{q.n} \sum_{i=1}^{k} X_i^2 - C$$ بالنسبة للمستوى التعليمي

$$SSB = \frac{1}{k.n} \sum_{m=1}^{q} X_m^2 - C$$ بالنسبة لعمر الزوجة

وبالتعويض من قيم الجدولين ينتج لدينا :

وبشكل مشابه يمكن حساب، SSB وحيث أن :

$$SSA = \frac{1}{(3).(4)} \left[(54)^2 + (51)^2\right] - 459.375 = 0.375$$

$$SSB = \frac{1}{(2).(4)} \left[(24)^2 + (36)^2 + (45)^2\right] - 459.375 = 27.75$$

وبحساب الفرق :

$$SSU = SST - SSE - SSA - SSB = 45.625 - 14.25 - 0.375 - 27.75 = 3.25$$

وهو يمثل مجموع مربعات الانحرافات للتفاعل الداخلي بين المستوى التعليمي وعمر الزوجة.

جدول تحليل التباين:

بالاعتماد على المعلومات السابقة يمكننا تحديد جدول تحليل التباين، كالآتي:

البيان / مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع مربع الانحرافات	متوسط المربعات	قيمة مؤشر الاختبار
بين قيم A_i	$k-1=$ $2-1=1$	$SSA=0.375$	$MSA=0.375$	$\widetilde{F}_A=0.47$
بين قيم B_m	$q-1=$ $3-1=2$	$SSB=27.75$	$MSB=13.875$	$\widetilde{F}_B=17.53$
التباين الداخلي U_{im}	$(k-1)(q-1)=$ $(1).(2)=2$	$SSU=3.25$	$MSU=1.625$	$\widetilde{F}_U=2.05$
تباين الأخطاء	$k.q(n-1)=$ 18	$SSE=14.25$	$MSE=0.7917$	
التباين الكلي	$k.q.n-1=$ 23	$SST=45.625$		

3 – إيجاد القيمة الجدولية $\widetilde{F}_{0.95(1,18)}=4.41$ ، $\widetilde{F}_{0.95(2,18)}=3.55$.

4 – المقارنة واتخاذ القرار:

نلاحظ أن القيمة الفعلية المحسوبة $(\widetilde{F}_A=0.47)$ هي أصغر من القيمة الجدولية $(\widetilde{F}_{0.95(1,18)}=4.41)$ ، لذلك نقبل H_0 والقائلة بأنه لا يوجد تأثير للمستوى التعليمي للزوجة على عدد الأطفال في الأسرة.

نلاحظ أن القيمة الفعلية المحسوبة $(\tilde{F}_B = 17.53)$ هي أكبر من القيمة الجدولية $(\tilde{F}_{0.95(2,18)} = 3.55)$ ، لذلك نرفض H_0 والقائلة بأنه لايوجد تأثير لعمر الزوجة على عدد الأطفال في الأسرة.

نلاحظ أن القيمة الفعلية المحسوبة $(\tilde{F}_U = 2.05)$ هي أصغر من القيمة الجدولية $(\tilde{F}_{0.95(2,18)} = 3.55)$ ، لذلك نقبل H_0 والقائلة بأنه لا يوجد تأثير متبادل للمستوى التعليمي ولعمر للزوجة على عدد الأطفال في الأسرة.

تمارين عامة

1 – تبين البيانات الآتية الإنتاجية(بالوحدة)لخمسة عمال من خلفيات متباينة من حيث مستوى التعليم والتدريب على ثلاث آلات مختلفة الصنع والمنشأ.

العامل	الآلة		
	A	B	C
1	32	44	29
2	38	40	30
3	25	36	38
4	35	47	32
5	30	43	41

والمطلوب اختبار مدى تأثير كل من مستوى التعليم والتدريب على إنتاجية الآلات مستوى دلالة $\alpha = 0.05$.

2 – تم استخدام أربعة من طرق العرض لمنتج معين في خمسة أنواع من المخازن التجارية، فكانت قيم إجمالي المبيعات الشهرية(بالآلاف)، كما في الجدول الآتي:

المخازن	طرق العرض			
	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	50	51	55	59
B_2	59	61	60	65
B_3	55	56	60	67
B_4	69	70	66	77
B_5	70	72	70	78

والمطلوب:

– اختبار فيما إذا كان يوجد فروق بين تأثير طرق العرض على إجمالي المبيعات.

– اختبار فيما إذا كان يوجد فروق بين تأثير الأنواع المختلفة من المخازن على إجمالي المبيعات. وذلك ضمن مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ثم $\alpha = 0.01$.

3 – قامت مجموعة من الطلاب بإجراء تجربة لمعرفة فيما إذا كان يوجد تأثير للمستوى التعليمي للأسرة وتأثير مكان الإقامة على متوسط عدد الأطفال ومن أجل ذلك تم جمع المعلومات اللازمة ووضعت في الجدول التالي:

مكان الإقامة	مستوى تعليمي			
	إعدادية	ثانوية	جامعية	عليا
ريف	6	5	4	2
أحياء شعبية	5	5	4	1
مدينة	4	4	3	1

والمطلوب اختبر ضمن مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ فيما إذا كان يوجد تأثير للمستوى التعليمي أو لمكان الإقامة على متوسط عدد أفراد الأسرة.

4 – مقارنة المستوى العلمي لثلاث مدارس، عمدنا إلى جمع المعلومات عن عشرة طلبة من كل مدرسة. يمثل الرقم الأول مجموع علامات الطالب في كل المقررات وهي من 260 ، ويمثل الرقم الثاني علامة الطالب في مقرر الرياضيات وهي من 100 ، كما تظهر في الجدول الآتي:

المدرسة i	j العلامة					
	الأولى		الثانية		الثالثة	
	Y	X	Y	X	Y	X
1	230	80	180	90	210	80
2	210	90	170	80	220	70
3	130	50	165	70	240	60
4	170	60	175	80	160	55
5	160	50	160	85	140	45
6	150	40	140	65	240	55
7	140	30	135	60	230	60
8	240	85	135	70	100	40
9	220	95	250	95	250	90
10	190	70	255	95	210	90

والمطلوب تحديد إذا ما كان هناك فرق بين مستويات الطلبة ، وذلك بناءا على تحليل التباين المشترك (التفاعل الداخلي) ضمن مستوى دلالة $\alpha = 0.05$.

5 – لدراسة أثر عدد من البرامج التدريبية A, B, C على مستوى أداء الخريجين من حملة الإجازة من التخصصات(الاقتصاد، تمويل ومصارف، محاسبة)، قامت دائرة التطوير والتدريب في إحدى الشركات. بإلحاق ستة موظفين من كل تخصص بكل برنامج من البرامج التدريبية الثلاثة، وبعد انتهاء فترة التدريب، قامت هذه الدائرة بإجراء امتحان قدرات للمتدربين حصلوا فيها على النتائج الآتية:

التخصص	البرنامج					
	A		*B*		*C*	
اقتصاد	75	88	70	80	70	69
	72	85	73	75	91	82
	80	90	80	83	100	93
تمويل ومصارف	82	80	60	78	61	70
	90	81	80	79	73	83
	93	72	81	74	84	85
محاسبة	88	90	70	92	69	73
	87	88	73	82	70	80
	85	95	72	91	71	73

والمطلوب: اختبار الفرضيات الآتية:

- هل يوجد أثر للتخصص على مستوى الأداء.

- هل يوجد أثر للبرنامج التدريبي على مستوى الأداء.

- هل يوجد تفاعل داخلي من التحقق والبرنامج التدريبي. وذلك ضمن مستوى دلالة $\alpha = 0.05$.