الفصل الثاني

بعض قوانين التوزيع الاحتمالية

2 – 1 مقدمة:

لقد درسنا في مبادئ الإحصاء المتحولات العشوائية المنقطعة،وكيفية إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي له.ولكن في الحياة العملية توجد بعض المتحولات العشوائية التي تعبّر عن الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والسكانية والإدارية..الخ،وتخضع لقوانين توزيع احتمالية محددة، وبالآتي تكون خواصها معروفة وتسهل وتفسر الكثير من الظواهر التطبيقية التي تخضع لها،ومن هذه التوزيعات التي نتناولها في هذا البحث التوزيعات الآتية:

1 – قانون التوزيع المنتظم للمتحول المنقطع.

2 – قانون توزيع ذي الحدين،أو قانون التوزيع الثنائي للمتحول المنقطع.

3 – قانون توزيع بيرنوللي للمتحول المنقطع.

4 – قانون توزيع بواسون للمتحول المنقطع.

5 – قانون التوزيع المنتظم للمتحولات المستمرة.

6 – قانون التوزيع الطبيعي العام.

7 – قانون التوزيع الطبيعي المعياري.

8 – قانون توزيع كاي مربع.

9 – قانون توزيع ستيودنت.

10 – قانون توزيع فيشر سينديكور.

2 – 2 قانون التوزيع المنتظم للمتحول المنقطع :

إذا كان X متغيراً عشوائياً، يأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ باحتمالات متساوية، فأن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X المنقطع يعطى بالعلاقة :

$$p(X = x_i) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & X = x_1, x_2, x_3, ..x_n \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (1-2)$$

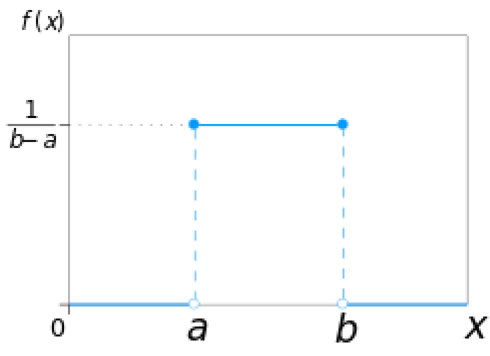
حيث n عدد قيم المتغير العشوائي المنقطع X .

كما ويحقق الخواص الآتية :

– إن جميع الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي $X > 0$ ، أي :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad 0 \le p_i \le 1 \qquad (2-2)$$

ويرسم الشكل البياني الآتي :



الشكل (2-1)

إن متوسط هذه القيم يسمى بالتوقع الرياضي، ويعطى بالعلاقة الآتية :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \qquad (3-2)$$

وإن تباينها يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left[x_i - E(x)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-\bar{x}\right]^2 = \sigma^2 \qquad (4-2)$$

وكأمثلة على المتحولات الخاضعة لهذا التوزيع المنتظم نذكر المتحولات الآتية :

1 – نتيجة رمي حجر النرد : هو متحول عشوائي X يأخذ القيم الاحتمالية الممكنة الآتية :

X_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

توقعه الرياضي يساوي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(21)=3.5$$

وإن تباينها يساوي :

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left[x_i - E(x)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}\left[x_i-3.5\right]^2 = 2.92$$

2 – نتيجة الولادة : هي متحول عشوائي X له الحالتان والاحتمالان الآتيان :

X_i	ذكر	أنثى	$\sum$
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

3 – نتيجة توقف عجلة الرهان: هي متحول عشوائي X ،يأخذ القيم و الاحتمالات الآتية:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

توقعه الرياضي يساوي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(45)=4.5$$

وإن تباينها يساوي:

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left[x_i - E(x)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}\left[x_i-4.5\right]^2 = 8.25$$

4 – نتيجة استعارة مجموعة كتب خلال أسبوع معين من مكتبة الكلية: هي متحول عشوائي X ،يأخذ القيم والاحتمالات الآتية:

اليوم	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	$\sum$
X_i	65	40	55	35	75	
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

توقعه الرياضي يساوي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}(270)=54$$

وإن تباينها يساوي:

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left[x_i-E(x)\right]^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}\left[x_i-54\right]^2=224$$

2 – 2 قانون توزيع بيرنوللي(التوزيع على نقطتين)للمتحول المنقطع **Bernulli Tria**:

إن تجربة بيرنوللي هي عبارة عن تجربة واحدة فقط لها نتيجتين اثنتين: إما تحقق أو عدم تحقق.وكأمثلة على المتحولات الخاضعة لهذا التوزيع نذكر المتحولات الآتية:

$1-$ رمي قطعة نقود على الأرض: إما أن يظهر شعار أو كتابة.

$2-$ صندوق يحوي على كرات بيضاء وكرات سوداء،فعندما نقوم بسحب كرة من هذا الصندوق فإن هذه الكرة سوف تكون إما بيضاء وإما سوداء،وبالآتي فإن نتيجة التجربة إما تحقق أو عدم تحقق.

لنرمز بـ S لحالة التحقق أي النجاح،ونرمز بـ f لحالة غير التحقق،أي الفشل،وبالآتي فإن فضاء إمكانات تجربة بيرنوللي تصبح كالآتي: $\Omega=\{S,f\}$ ،ومنه يمكن أن نعّرف متحولاً عشوائياً X يأخذ قيمتين اثنتين فقط كالآتي:

$X=1$ في حالة النجاح S ،و $X=0$ في حالة الفشل f ،ويمكن كتابتهما على الشكل الآتي:

في حالة النجاح S : $X=1$

في حالة الفشل f : $X=0$

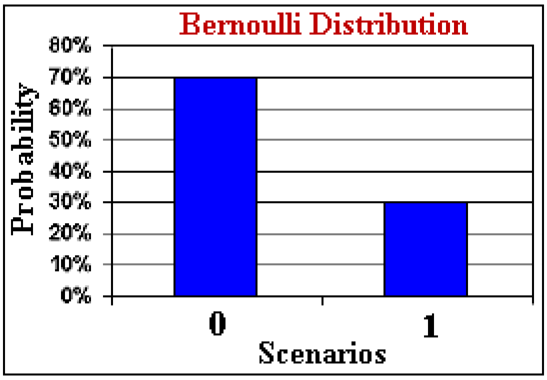
لنفترض أن احتمال تحقق النجاح S يساوي p ،وعندها يكون لدينا احتمال الفشل يساوي $q=1-p$ ، ونكتب ذلك كالآتي:

$$p(X=1)=p$$
$$p(X=0)=q=1-p$$

ويمكن وضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

X_i	0	1	$\sum$
$p(X=x_i)$	q	p	1

ويدعى هذا الجدول بجدول التوزيع الاحتمالي لتجربة بيرنوللي، ويرسم أشكالاً بيانية مختلفة، بحسب قيم p,q، كما هو موضح بالأشكال الآتية:



الشكل (2-2)

ومما سبق يمكن تعريف قانون التوزيع الاحتمالي لتجربة بيرنوللي بالعلاقة الآتي:

$$p(X=x_i)=f(x)=\begin{cases} p^x q^{1-x} & X=0,1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (5-2)$$

حيث أن $q=1-p$، وأن: $0\le p\le 1$ و $\sum_{1}^{2} p_i=1$

تقوقعه الرياضي $E(X)$ ،ويعّرف بالعلاقة الآتية :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0.q+1.p=p \qquad (6-2)$$

وإن تباينه $\sigma^2(X)$ ،يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left[x_i - E(x)\right]^2 = q[0-p]^2 + p[1-p]^2 \\ &= q.p^2 + p.q^2 = q.p(p+q) = p.q\end{aligned} \qquad (7-2)$$

وإن انحرافه المعياري $\sigma(X)$ ،يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\sigma(X)=\sqrt{p.q} \qquad (8-2)$$

مثال $(1-2)$:

نلقي قطعة نقود أرضاً مرة واحدة،ولنفترض أن X متحول عشوائي يعبر عن ظهور الصورة،**والمطلوب**:

$1-$ إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي $f(x)$ ،وارسم شكله البياني،وذلك بفرض أن قطعة النقود متوازنة

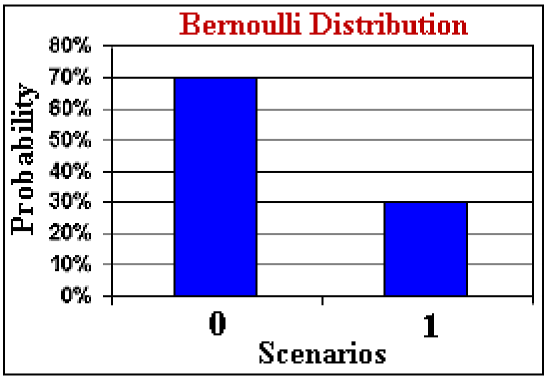
$2-$ إيجاد توقع وتباين X .

الحل:

$1-$ نلاحظ أن فضاء إمكانات التجربة هو $X=\{0,1\}$ ،وبالآتي فإن جدول التوزيع الاحتمالي النظري يساوي:

X_i	0	1	$\sum$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

ويرسم الشكل البياني الآتي :



الشكل(2-3)

2 – توقعه الرياضي هو:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

تباينه يساوي :

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(x)]^2 = p.q$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3 – 2 قانون التوزيع الثنائي (توزيع ذو الحدين) للمتحول المنقطع :

عند تكرار محاولة بيرنوللي n مرة،فإن حادث تحقق الحالة المرغوبة k مرة($0 \le k \le n$)وعدم تحققها $n-k$ مرة،يمكن أن يحصل بعدد المتوافقات C_n^k طريقة،وبما أن احتمال تحقق k نجاحاً في كل طريقة يساوي $p^k q^{n-k}$ ،وبالتالي فإن احتمال أن نحصل على k تحققاً في جميع الطرق يساوي عدد المتوافقات C_n^k مضروباً باحتمال تحقق k مرة في إحدى الطرق هو $p^k q^{n-k}$ ،أي :

$$p(X = x) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (9-2)$$

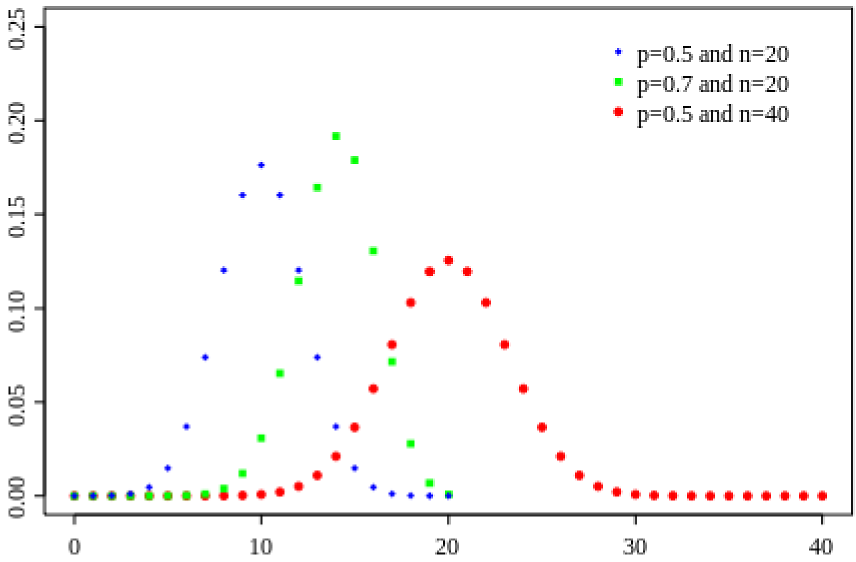
ونقول أن المتحول العشوائي X والذي يعبر عن عدد مرات النجاح عند تكرار محاولة بيرنوللي n مرة له توزيع من نوع ذي الحدين ويسمى بقانون التوزويع الثنائي.

ويمكننا وضع الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم X في الجدول كالآتي :

X_i	0	1	2	3	$\cdots$	k	n
$p_k(X = k)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$C_n^n p^n q^{n-n}$

نلاحظ أن الاحتمالات المقابلة لقيم X ما هي إلا عبارة عن مفكوك ثنائي الحد $(p+q)^n$ لذلك يسمى بقانون توزيع ثنائي الحد.

ويرسم هذا التوزيع الشكل البياني الآتي :



الشكل (**2–4**)

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X الخاضع لقانون التوزيع الثنائي،يساوي:

$$E(X) = n.p \qquad (10-2)$$

بينما نجد تباينه يساوي:

$$\sigma(X) = n.p.q \qquad (11-2)$$

مثال $(2-2)$:

لنفترض أنه لدينا 200 قطعة من الخبز وفيها 150 قطعة من النوع الأول، 50 من النوع الثاني.وإذا سحبنا منها عينة عشوائية من 5 قطع(السحب مع الإعادة)حتى لا يتغير الاحتمال p ،فاحسب الاحتمالات المقابلة لعدد قطع النوع الأول التي يمكن أن تظهر في العينة واحسب توقعه وتباين .

الحل:

بما أن السحب جرى مع الإعادة،فإن احتمال ظهور قطع النوع الأول من الخبز في كل سحبة(تجربة)لا يتغير ويبقى ثابتاً ويساوي:

$$P = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

وبذلك نجد:

$$q = 1 - P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

نرمز إلى عدد القطع من النوع الأول التي يمكن أن تظهر في العينة بالرمز X ،فنجد أن الاحتمالات المطلوبة تحسب من قانون التوزيع الثنائي لان الظاهرة ثنائية وفيها وجهان(نوع أول ونوع ثاني) ولأن احتمال تحقق النوع الأول معلوم وثابت.

وبذلك يأخذ المتحول العشوائي X القيم الممكنة الآتية:

$$X = 0,1,2,3,4,5$$

وتحسب الاحتمالات المقابلة لهذه القيم كالآتي:

إن احتمال أن لا تظهر أية قطعة من النوع الأول يساوي:

$$P(X = 0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1.q^5 = 1.\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

وإن احتمال أن تظهر قطعة واحدة من النوع الأول يساوي:

$$P(X = 1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5.p.q^4 = 5.\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15}{1024}$$

وإن احتمال أن تظهر قطعتين واحدة من النوع الأول يساوي:

$$P(X=2)=C_5^2\,p^2q^3=10.p^2.q^3=10.\left(\frac{3}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{90}{1024}$$

وإن احتمال أن تظهر ثلاث قطع من النوع الأول يساوي:

$$P(X=3)=C_5^3\,p^3q^2=10.p^3.q^2=10.\left(\frac{3}{4}\right)^3.\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{270}{1024}$$

وإن احتمال أن تظهر أربع قطع من النوع الأول يساوي:

$$P(X=4)=C_5^4\,p^4q^1=5.p^4.q^1=5.\left(\frac{3}{4}\right)^4.\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$$

وإن احتمال أن تظهر خمس قطع من النوع الأول يساوي:

$$P(X=5)=C_5^5\,p^5q^0=1.p^5.q^0=1.\left(\frac{3}{4}\right)^5.\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$$

نضع الاحتمالات السابقة في الجدول الآتي:

X_i	0	1	2	3	4	5
$p_k(X=k)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X هو:

$$E(X)=n.p=5.\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

أما تباينه ،يساوي:

$$\sigma^2(X) = n.p.q = 5.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{15}{16}$$

أما انحرافه المعياري، يساوي:

$$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{5.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

مثال $(3-2)$:

إذا كان 30% من الطلاب في إحدى الكليات يملكون سيارات، فإذا علمت أنه يوجد في إحدى القاعات 5 طلاب، ولنفترض أن X متحول عشوائي يعبر عن عدد الطلاب الذين يملكون سيارات، **والمطلوب**:

1 – إيجاد الاحتمالات المقابلة للقيم الممكنة.

2 – إيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتحول العشوائي X .

3 – حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X > 4), P(X \geq 2), P(X \leq 3), P(2 < X \leq 4)$$

الحل:

1 – نلاحظ أن X يخضع لقانون التوزيع الثنائي، ويأخذ القيم الآتية:

$$X = 0,1,2,3,4,5$$

حيث أن $P = 0.3$ و $q = 0.7$ و $n = 5$

نجد الاحتمالات المقابلة لكل قيمة:

– احتمال أن لا يملك ولا طالب سيارة، يساوي:

$$P(X=0)=C_5^0 p^0 q^5 = 1.q^5 = 1.(0.3)^0.(0.7)^5 = 0.16807$$

- احتمال أن يملك طالب واحد سيارة،يساوي:

$$P(X=1)=C_5^1 p^1 q^4 = 5.p^1.q^4 = 5.(0.3)^1.(0.7)^4 = 0.36015$$

- احتمال أن يملك طالبين كل واحد منهم سيارة،يساوي:

$$P(X=2)=C_5^2 p^2 q^3 = 10.p^2.q^3 = 10.(0.3)^2.(0.7)^3 = 0.3087$$

- احتمال أن يملك ثلاثة كل واحد سيارة،يساوي:

$$P(X=3)=C_5^3 p^3 q^2 = 10.p^3.q^2 = 10.(0.3)^3.(0.7)^2 = 0.1323$$

- احتمال أن يملك أربعة كل واحد منهم سيارة،يساوي:

$$P(X=4)=C_5^4 p^4 q^1 = 5.p^4.q^1 = 5.(0.3)^4.(0.7)^1 = 0.02835$$

- احتمال أن يملك خمسة كل واحد منهم سيارة،يساوي:

$$P(X=5)=C_5^5 p^5 q^0 = 1.p^5.q^0 = 1.(0.3)^5.(0.7)^0 = 0.00243$$

2 – حساب التوقع والتباين:

$$E(X)=n.p=5.(0.3)=1.5$$

$$\sigma^2(X)=n.p.q=5.(0.3).(0.7)=1.05$$

3 – حساب الاحتمالات:

$$P(X>4)=P(X=5)=0.00243$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]$$

$$=1-(0.16807+0.36015)$$
$$P(X\geq 2)=0.47178$$

$$P(X\leq 3)=1-P(X\geq 4)$$

$$=1-(0.02835+0.00243)$$
$$P(X\leq 3)=0.96917$$

$$P(2<X\leq 4)=P(X=3)+P(X=4)$$

$$=(0.1323+0.02835)$$
$$P(2<X\leq 4)=0.16065$$

مثال $(2-4)$:

صندوق يحتوي 5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.نسحب كرة من الصندوق ثم نعيدها إليه 6 مرات.ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد الكرات الحمراء التي يمكن أن تظهر نتيجة هذا السحب.**والمطلوب**:

$1-$ حساب عدد القيم الممكنة للمتحول العشوائي X والاحتمالات المقابلة لكل قيمة.

$2-$ حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لـ X.

$3-$ حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X\geq 2),P(X\leq 3),P(X\geq 4),P(2<X\leq 4)$$

الحل:

$1-$ إن المتحول X يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة خلال التجارب الست، .و يأخذ القيم الآتية:

$$X=0,1,2,3,4,5,6$$

بما أن الظاهرة ثنائية(حمراءأو بيضاء)،وأن السحب جرى مع الإعادة فإن احتمال سحب كرة حمراء يساوي مقداراً ثابتاً هو: $P=\frac{3}{8}$ و $q=\frac{5}{8}$.

وتحسب الاحتمالات المقابلة لتلك القيم كالآتي:

إن احتمال أن لا تظهر أية كرة حمراء يساوي:

$$P(X=0)=C_6^0 p^0 q^6 = 1.q^6 = 1.\left(\frac{5}{8}\right)^5 = 0.09536$$

إن احتمال أن تظهر كرة حمراء واحدة يساوي:

$$P(X=1)=C_6^1 p^1 q^5 = 6.p.^1 q^5 = 6\left(\frac{3}{8}\right).\left(\frac{5}{8}\right)^5 = 0.2146$$

إن احتمال أن تظهر كرتين حمراء يساوي:

$$P(X=2)=C_6^2 p^2 q^4 = 6.p.^2 q^4 = 15\left(\frac{3}{8}\right)^2.\left(\frac{5}{8}\right)^4 = 0.3219$$

إن احتمال أن تظهر ثلاث كرات حمراء يساوي:

$$P(X=3)=C_6^3 p^3 q^3 = 20.p.^3 q^3 = 20\left(\frac{3}{8}\right)^3.\left(\frac{5}{8}\right)^5 = 0.100574$$

إن احتمال أن تظهر أربع كرات حمراء يساوي:

$$P(X=4)=C_6^4 p^4 q^2 = 15.p.^4 q^2 = 15\left(\frac{3}{8}\right)^4.\left(\frac{5}{8}\right)^2 = 0.1159$$

إن احتمال أن تظهر خمس كرات حمراء يساوي:

$$P(X=5)=C_6^5 p^5 q^1 = 6.p.^5 q^1 = 6\left(\frac{3}{8}\right)^5 .\left(\frac{5}{8}\right)^1 = 0.0278$$

إن احتمال أن تظهر ست كرات حمراء يساوي:

$$P(X=6)=C_6^6 p^6 q^0 = 1.p.^6 q^0 = 1\left(\frac{3}{8}\right)^6 .\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 0.0028$$

نضع الاحتمالات السابقة في الجدول الآتي:

X_i	0	1	2	3	4	5	6
$p_k(X=k)$	0.09536	0.2146	0.3219	0.100574	0.1159	0.0278	0.0028

2 – التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X هو:

$$E(X)=n.p=6(\frac{3}{8})=\frac{18}{8}=2.25$$

أما تباينه، يساوي:

$$\sigma^2(X)=n.p.q=6(\frac{3}{8})(\frac{5}{8})=\frac{45}{32}=1.40625$$

أما انحرافه المعياري، يساوي:

$$\sigma(X)=\sqrt{n.p.q}=\sqrt{6(\frac{3}{8})(\frac{5}{8})}=\sqrt{\frac{45}{32}}=\frac{3\sqrt{10}}{8}=1.1858$$

3 – حساب الاحتمالات:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$
$$= 1 - [0.2146 + 0.09536]$$
$$= 1 - 0.30996$$
$$= 0.69004$$

$$P(X \leq 3) = [1 - P(X > 3)]$$

$$= [1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6))]$$

$$= [1 - (0.1159 + 0.0278 + 0.0028)]$$
$$P(X \leq 3) = 0.8535$$

$$P(X \geq 4) = [1 - P(X \leq 3)]$$

$$= [1 - (P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0))]$$

$$= [1 - (0.100574 + 0.3219 + 0.2146 + 0.09536)]$$
$$= 0.482166$$

$$P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= (0.100574 + 0.1159)$$
$$= 0.216474$$

4 – 2 قانون بواسون للمتحول المنقطع **Poisson Distribution**:

يستخدم هذا القانون في التجارب الثنائية التي يتولد عنها نتيجتان متنافيتان،ضمن شرطين أساسيين هما:

1 – أن يكون احتمال تحقق حادث النجاح المطلوب في التجربة الواحدة P صغيراً جداً.

2 – أن يكون عدد التجارب n كبيراً جداً،بحيث يكون:

$$\lim_{n\to\infty} n.p=\lambda \qquad (12-2)$$

حيث أن: $\lambda > 0$.

لنفترض أن X متحول عشوائي،يمثل عدد مرات تحقق الحادث الملائم فتكون القيم الممكنة هي:

$$X = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots,k,k+1,\ldots\ldots.n$$

إن احتمال تحقق الحادث الملائم k مرة من أجل n مرة،يمكن حسابه من قانون التوزيع الثنائي كالآتي:

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ولكن بما أن عدد التجارب n كبيراً جداً،فإن عملية الحساب ستكون معقدة وطويلة.لذلك نفرض أن:

$P = \dfrac{\lambda}{n}$ وبالتالي $q = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ ،فإننا نجد أن:

$$P_k = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \qquad (13-2)$$

$$P_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

وبأخذ نهاية طرفي العلاقة السابقة عندما n تسعى إلى اللانهاية،نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda^k}{n^k}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)(n-k)}{n^k(n-k)!}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \qquad (14-2)$$

من العلاقة السابقة نجد أن نهاية الحد الأول تساوي:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)(n-k)}{n^k(n-k)!} = 1$$

وذلك لأن مرتبة البسط والمقام متساوية.

وإن نهاية الحد الثاني تساوي نفسه،أي أنه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

وذلك لأنه لا يحتوي على المقدار n .

وإن نهاية الكسر الذي في مقام الحد الثالث يساوي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$$

وذلك لأن $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$ و وبالتالي فإن: $\lim_{n\to\infty} (1)^k = 1$.

ولحساب نهاية الكسر في بسط الحد الثالث الذي يساوي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

نحن نعلم ومن التحليل الرياضي أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (15-2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} \qquad (16-2)$$

لنفترض أن $\frac{1}{x} = \frac{\lambda}{n}$ ، فنجد أن: $n = x.\lambda$.

يمكن كتابة العلاقة $(16-2)$ على الشكل الآتي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x.\lambda}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\lambda}=\left[e^{-1}\right]^{\lambda}=e^{-\lambda}$$

ثم نعوض كل ذلك في العلاقة $(14-2)$ ،فنجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}P_k=P(X=k)=1.\frac{(\lambda)^k}{k!}.\frac{e^{-\lambda}}{1}$$

ومنه نحصل على أن:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} \qquad (17-2)$$

حيث أن $k=0,1,2,3,4,......\infty$.وهو قانون توزيع بواسون.

خواصه:

1 $-P(X=k)\geq 0$ مهما كانت قيمة k .

2 – إن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (18-2)$$

ومن نشر التوابع وفق سلسلة صحيحة ،نجد أن :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}+\ldots\ldots\right) \qquad (19-2)$$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$$

كما ونجد أن التوقع الرياضي للمتحول X الخاضع لتوزيع بواسون يساوي:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k.P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k.e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k.e^{-\lambda}\,\frac{\lambda.\lambda^{k-1}}{k(k-1)!}$$

$$= \lambda.e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$E(X) = \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda.e^{0} = \lambda \qquad (20-2)$$

ونجد التباين يساوي:

$$\sigma^2(X) = \mu_2(X) - [\mu_1(X)]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2.f(x) - \lambda^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2.e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$

نعوض k بما يساويه $k(k-1)+k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)+k].e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^2.\lambda^{k-2}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k.e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1).e^{-\lambda} \frac{\lambda^2.\lambda^{k-2}}{k(k-1)(k-2)!} + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda^2.e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2$$

بما أن نشر التوابع حسب العلاقة$(2-19)$ يعطينا :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

فإن :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{\lambda}$$

ومنه فإن :

$$\sigma^2(X) = \lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2$$
$$= \lambda^2.e^{0} + \lambda - \lambda^2$$

وبالتالي :

$$\sigma^2(X) = \lambda \qquad (21-2)$$

ومنه الانحراف المعياري يساوي :

$$\sigma(X)=\sqrt{\lambda} \qquad (22-2)$$

مثال $(2-5)$:

معجم يحتوي على 400 خطأ موزعة عشوائياً على صفحاته التي تبلغ عددها 600 صفحة، **والمطلوب**:

1 – إيجاد صيغة التوزيع الاحتمالي الذي يخضع له X عدد الأخطاء في صفحة واحدة.

2 – إيجاد احتمال وجود 0,1,2,3,4 خطأ في صفحة ما تم اختيارها عشوائياً.

3 – إيجاد توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

1 – المتحول العشوائي X يمثل عدد الأخطاء الموجودة في إحدى صفحات المعجم ويخضع بالأساس لقانون التوزيع الثنائي، وبالآتي:

$P=\dfrac{1}{600}$ و $n=400$، وباعتبار أن n كبيرة، فإن توزيع X يؤول إلى توزيع بواسون بوسيط λ حيث:

$$\lambda=n.p=400.\frac{1}{600}=\frac{2}{3}$$

ومنه نحصل على صيغة توزيع بواسون :

$$P(X=k)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k!}$$

حيث $k=0,1,2,3,4$

2 – إيجاد الاحتمالات الآتية :

– احتمال عدم وجود أي خطأ في صفحة ما :

$$P(X=0)=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{0}}{0!}=0.5134$$

– احتمال وجود خطأ واحد في صفحة ما :

$$P(X=1)=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1}}{1!}=0.3423$$

– احتمال وجود خطأين في صفحة ما :

$$P(X=2)=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{2!}=0.1141$$

– احتمال وجود ثلاثة أخطاء في صفحة ما :

$$P(X=3)=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}{3!}=0.0254$$

– احتمال وجود أربعة أخطاء في صفحة ما :

$$P(X=4)=e^{-\frac{2}{3}}.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}{4!}=0.0042$$

3 – توقعه الرياضي وتباينه:

$$E(X) = \lambda = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2(X) = \lambda = \frac{2}{3}$$

5 – 2 قانون التوزيع المنتظم للمتحولات المستمرة :

إذا كان X متحول عشوائي مستمر، يأخذ جميع قيمه الممكنة في المجال $[a,b]$، فإن قانون التوزيع المنتظم لـ X المستمر يعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le X \le b \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (23-2)$$

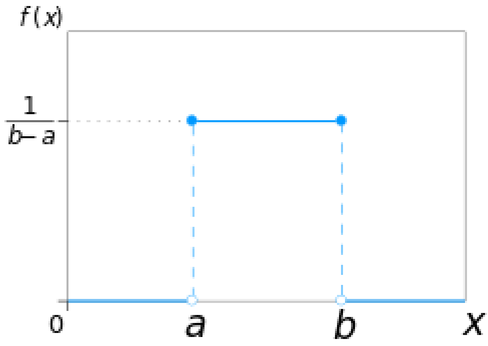
ويسمى هذا التوزيع أيضاً بالتوزيع المستطيلي.

ومن خواصه أنه يحقق الشرطين الآتيين:

1 – $f(x) \ge 0$

2 – $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$

وهو يرسم الشكل البياني الآتي:



الشكل (2-4)

وإن توقعه الرياضي يساوي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right]=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad (24-2)$$

وإن تباينه يساوي:

$$\sigma^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E)^2.dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^3}{24}-\frac{(a-b)^3}{24}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{2(b-a)^3}{24}\right]=\frac{(b-a)^2}{12}$$

وبالتالي فإن :

$$\sigma^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (25-2)$$

مثال$(2-6)$:

إذا كان X متحولاً عشوائياً وقانون توزيعه يعطى بالعلاقة :

$$f(x)=\begin{cases} k & a\le X\le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1− تعين قيمة الثابت k حتى يكون $f(x)$ قانون توزيع احتمالي لـ X .

2 – إذا كان $a = 6$ و $b = 10$ عين k ثم أحسب $P(7 \le X \le 9)$.

3 – إيجاد توقع وتباين X .

الحل:

1 – حتى يكون $f(x)$ قانون توزيع احتمالي يجب أن يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k..dx = 1$$

$$k\int_{-\infty}^{+\infty} dx = 1$$

$$\left[k(x)\right]_a^b = 1 \Rightarrow k\left[b-a\right] = 1$$

$$k = \frac{1}{b-a}$$

2 – عندما $a = 6$ و $b = 10$ فإن : $k = \frac{1}{10-6} = \frac{1}{4}$ ، وبالتالي يصبح قانون التوزيع الاحتمالي المنتظم لـ X المستمر بالشكل الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \le X \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– احتمال $P(7 \le X \le 9)$:

$$P(7 \le X \le 9) = \frac{1}{4}\int_{7}^{9} dx = \frac{1}{4}[x]_7^9$$

$$= \frac{1}{4}[9-7] = \frac{1}{2}$$

3 – توقعه الرياضي وتباينه :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx$$

أو يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{7+9}{2} = 8$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - E(X))^2.dx$$

أو يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(9-7)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

6 – 2 **قانون التوزيع الطبيعي العام:**

يعتبر التوزيع الطبيعي من أشهر وأهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وهو يعرف بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \qquad (26-2)$$

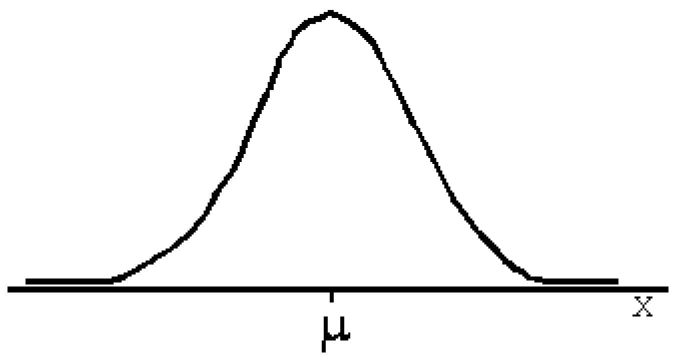
حيث أن: $-\infty < X < +\infty$

$\overline{x}$ المتوسط الحسابي

σ الانحراف المعياري لـ X .

يرمز له بالرمز $\mu(\overline{x},\sigma^2)$ ويسمى بقانون (غوص– لابلاس).

يرسم منحنياً متناظراً حول $\overline{x}$ كما هو مبين في الشكل الآتي:



الشكل (5-2)

خواص التوزيع الطبيعي العام:

1 – قيم التوزيع دائماً موجبة $f(x) > 0$.

2 – إن المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي ومحور OX يساوي الواحد،أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

3 – التوقع الرياضي للمتحول المستمر يعرف بالعلاقة:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx$$

وهو يساوي في حالة التوزيع الطبيعي ما يلي:

$$E(X)=\bar{x} \qquad (27-2)$$

4 – إن تباين المتحول المستمر يعرف بالعلاقة:

$$\sigma^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2.f(x).dx$$

وهو يساوي في حالة التوزيع الطبيعي ما يلي:

$$\sigma^2(X)=\sigma^2 \qquad (28-2)$$

وبالتالي فإن انحرافه المعياري يساوي:

$$\sigma(X)=\sigma$$

5 – إن احتمال أن يقع X في المجال $[a,b]$ يساوي:

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x).dx \qquad (29-2)$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}.dx$$

وهو يساوي المساحة الواقعة تحت المنحنى والمحصورة بين النقطتين a,b .

ومن المتحولات الكثيرة التي تخضع لهذا التوزيع ،نذكر المتحولات الآتية :

– درجة الطالب في الامتحان.

– طول المولود أو وزنه لحظة الولادة.

– نسبة الذكاء لطلاب مرحلة معينة.

– مدة حياة الإنسان.

– حجم الإنتاج اليومي في إحدى الشركات...الخ.

ومع أن هذا التوزيع من أكثر التوزيعات انتشاراً،إلا أن عملية حساب الاحتمالات فيه اصطدمت بعدة عوائق رياضية وحسابية. ولقد تم تجاوز هذه العقبات بالاعتماد على حالة خاصة منه تسمى(التوزيع الطبيعي المعياري)لأنها تستخدم كمعيار عند حساب الاحتمالات.

7 – 2 قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

وهو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي العام،ويتميز بأن:

1 – متوسطه الحسابي يساوي الصفر $\bar{x}$.

2 – تباينه يساوي الواحد $\sigma^2 = 1$.

3 – إن المساحة تحته تساوي الواحد.

4 – إنه متناظر بالنسبة للمحور العمودي.

5 – ويرمز له بـ$N(0,1)$.

وبذلك فإن معادلته تأخذ الشكل الآتي:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (30-2)$$

يرمز لتابع التوزيع الطبيعي المعياري بـ $\Phi(z)$ ،ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$P(X\leq x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\Phi(x).dx$$

$$P(X\leq x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}.dx \qquad (31-2)$$

نرمز للطرف الأيمن بالعلاقة الآتية :

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{1}{2}x^2}.dx \qquad (32-2)$$

وهكذا نحصل على أن:

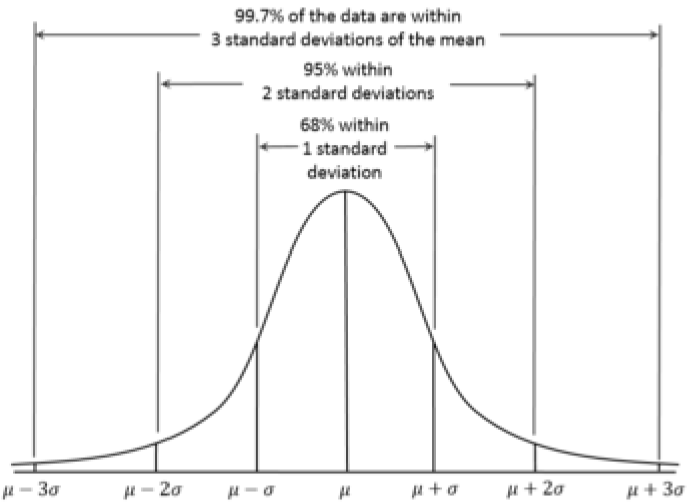
$$P(X\leq z)=\Phi(z) \qquad (33-2)$$

ونعلم أنه:

$$P(X\geq z)=1-\Phi(z) \qquad (34-2)$$

وبالرجوع إلى جداول خاصة في نهاية الكتاب تعطينا الاحتمالات المقابلة لقيم Z ،وذلك من أجل قيم $Z \geq 0$

وإن العلاقة $(33-2)$ تعطينا المساحة المحصورة تحت المنحنى من $-\infty$ حتى نقطة محددة $X = Z$ ،وتمثل احتمال وقوع المتحول X في $]-\infty, Z]$ ،كما في الشكل البياني الآتي:



الشكل (2-5)

ولحساب قيم تابع التوزيع المقابلة للقيم السالبة نعلم أنه إذا كانت $Z > 0$ ،فإن الاحتمالات المقابلة للقيم السالبة $(-Z)$ تحسب من العلاقة الآتية:

$$\Phi(-Z) = 1 - P(X = Z) = 1 - \Phi(Z) \qquad (35-2)$$

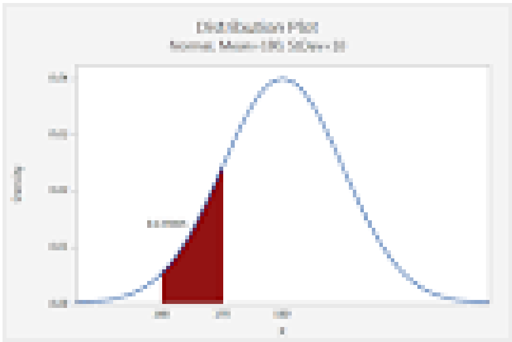
وكذلك يمكن حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(-Z \leq X \leq Z) = \Phi(Z) - \Phi(-Z) = \Phi(Z) - 1 + \Phi(Z)$$

$(36-2)$

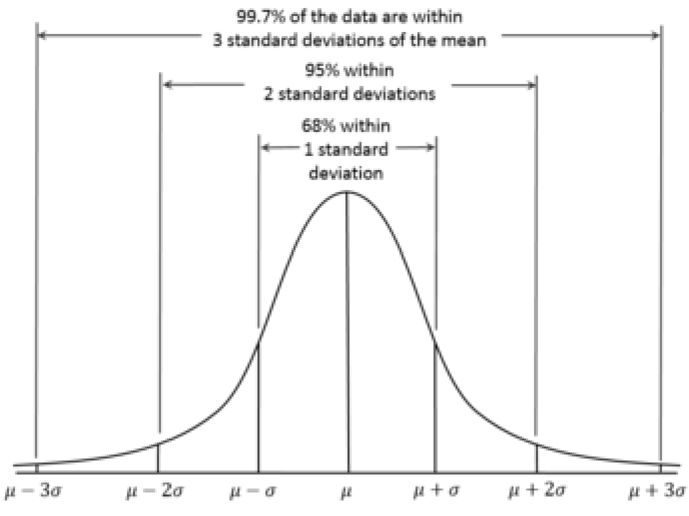
$$P(-Z \leq X \leq Z) = 2\Phi(Z) - 1$$

ويمثل هذا الاحتمال وقوع المتحول X في المجال $[-Z, Z]$ ،كما في الشكل البياني الآتي:



الشكل (2–6)

ومن أهم خصائص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري أنه متناظر بالنسبة للمحور الشاقولي والمساحة تحته تساوي الواحد،وموزعة على الشكل الآتي:



الشكل (2– 7)

ويمكن التعبير عن المساحة المحصورة تحت المنحنى بالاحتمالات،أي:

$$P(-1 \le X \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(Z) - 1$$
$$= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

$$P(-2 \le X \le 2) = 2\Phi(2) - 1$$
$$= 2(0.9772) - 1 = 0.9544$$

$$P(-3 \le X \le 3) = 2\Phi(3) - 1$$
$$= 2(0.9987) - 1 = 0.9974$$

أما بالنسبة للمساحة المحصورة تحت المنحنى وفوق المحور OX وبين المستقيمين $X = a$ و $X = b$ حيث $a < b$ تساوي الاحتمال الآتي:

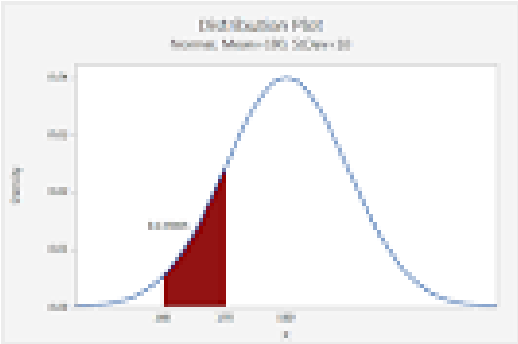
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \Phi(x).dx \qquad (37-2)$$

وهي تمثل احتمال وقوع X في المجال $[a,b]$ ،ويحسب هذا الاحتمال من تابع التوزيع غلى الشكل الآتي :

$$P(a \le X \le b) = \int_{-\infty}^{b} \Phi(x).dx - \int_{-\infty}^{a} \Phi(x).dx$$

$$P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (38-2)$$

وهي تمثل بيانياً على الشكل الآتي:



الشكل (2–8)

8 – 2 قانون التوزيع χ^2 (كاي مربع):

وهو توزيع احتمالي خاص يستخدم لاختبار مدى تطابق المعطيات الميدانية أو التجريبية مع المعطيات الفرضية أو الضابطة.

ويعرف هذا القانون بالعلاقة الآتية :

$$\chi_n^2(x) = \frac{X^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad (39-2)$$

حيث أن $x > 0$ وأن $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ هو قيمة تكامل غاما بوسيط $p = \frac{n}{2}$ والمعرف بالعلاقة الآتية :

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty X^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}.dx \qquad (40-2)$$

خواص توزيع χ^2 كالآتي:

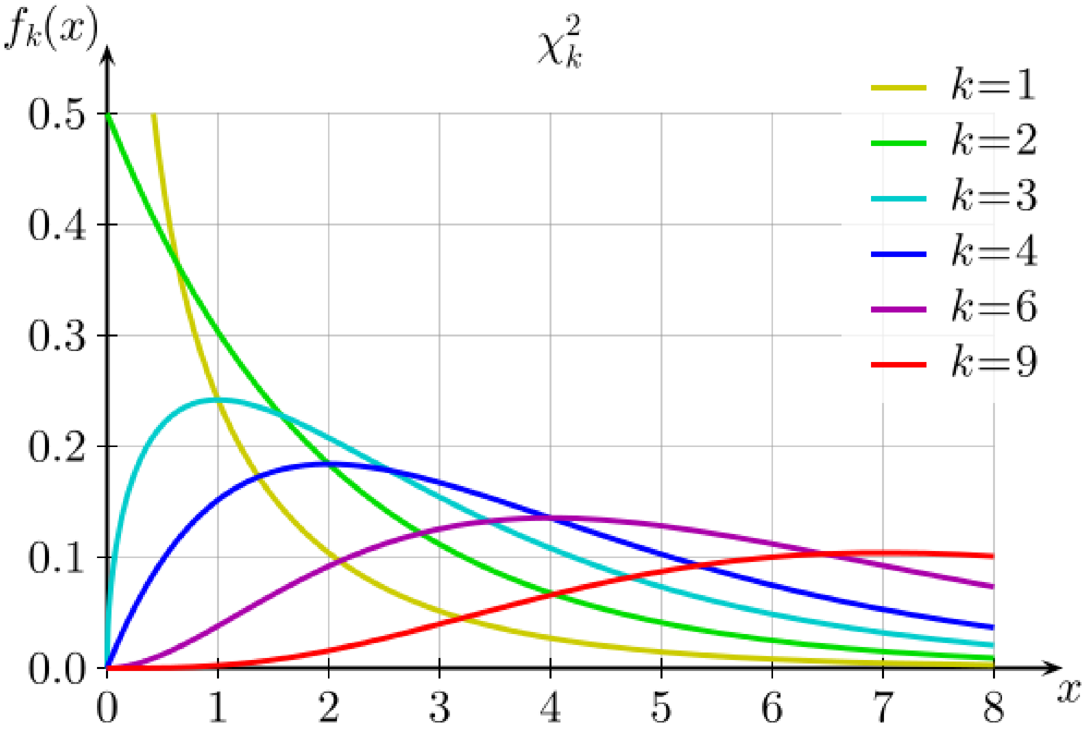
1- $\chi^2(x) \geq 0$.

2 – إن المساحة التي تحت المنحنى تساوي الواحد.

تابع التوزيع يساوي:

$$P(X \leq x_1) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{x_1} X^{\frac{n-2}{2}}.e^{-\frac{x}{2}}dx \qquad (41-2)$$

وذلك بشرط أن تكون $x_1 > 0$ ،ويرسم توزيع χ^2 أشكالاً بيانية مختلفة حسب درجات الحرية.



الشكل (2–9)

أما توقعه الرياضي $E(X)$ ،فيعطى بالعلاقة :

$$E(X)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{x_0}^{+\infty} x.X^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{n}{2}}dx=P_0 \qquad (42-2)$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty} .X^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1}e^{-\frac{n}{2}}dx$$

نفرض أن :

$$u = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2u \Rightarrow dx = 2du$$

أما حدود التكامل الجديد فهي:

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$
$$x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

بالتعويض نجد أن:

$$E(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} .(2u)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1} e^{-u} 2du$$

بإجراء الإصلاحات الرياضية، نجد أن:

$$E(X) = \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} .\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . \frac{n}{2} .\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n \qquad (43-2)$$

أي أن التوقع الرياضي يساوي عدد درجات الحرية n.

أما تباينه $\sigma^2(X)$، فيعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2(X) = \mu_2 - \mu_1^{\ 2} \qquad (44-2)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^2.X^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}.dx$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^2.X^{\left(\frac{n}{2}=2\right)-1}e^{-\frac{x}{2}}.dx \qquad (45-2)$$

نفرض أن:

$$u = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2u \Rightarrow dx = 2du$$

أما حدود التكامل الجديد فهي:

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$
$$x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

بالتعويض نجد أن:

$$\mu_2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} .(2u)^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1}e^{-u}2du \qquad (46-2)$$

بإجراء الإصلاحات الرياضية، نجد أن:

$$\mu_2 = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = 2n\left(\frac{n}{2}+1\right) = n^2 + 2n \qquad (47-2)$$

ومنه يكون:

$$\sigma^2(X) = n^2 + 2n - n^2$$

$$\sigma^2(X) = 2n \qquad (48-2)$$

أي أن التباين يساوي ضعفي عدد درجات الحرية .

أما الانحراف المعياري فيساوي:

$$\sigma(X) = \sqrt{2n} \qquad (49-2)$$

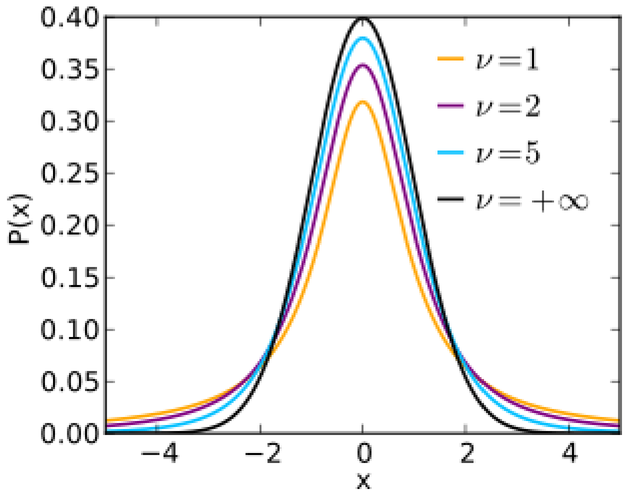
9 – 2 قانون توزيع ستيودنت :

أن الشكل العام لمنحنى هذا التوزيع يشبه منحنى التوزيع الطبيعي المعياري فهو متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات(أي مركزه الصفر) ولكن انحرافه المعياري يختلف عن الواحد.ويعرف هذا القانون على العلاقة الآتية:

$$T_k(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k.\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} . \left(1 + \frac{X^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} \qquad (50-2)$$

حيث أن $-\infty < X < \infty$ ،وأن k هو عدد صحيح موجب يسمى بعدد درجات الحرية.

ويرسم هذا القانون منحنيات مختلفة تبعاً لقيمة k وفيما يلي بعض منها:



الشكل **(2–10)**

خواصه:

1- $T_k(X) \geq 0$.

2 – إن المساحة التي تحت المنحنى تساوي الواحد، أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k(X).dx = 1$$

3 – توقعه:

$$E(X) = 0 \qquad (51-2)$$

4 – تباينه:

$$\sigma^2(X) = \frac{k}{k-2} \qquad (52-2)$$

حيث $k > 2$

إن أكثر العلاقات الاحتمالية تطبيقاً هي العلاقة :

$$P(X \geq t_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k.\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_0}^{+\infty} \left(1+\frac{X^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} .dx = P_0 \qquad (53-2)$$

يطبق قانون ستيودنت عندما يكون حجم العينة $(n < 30)$.

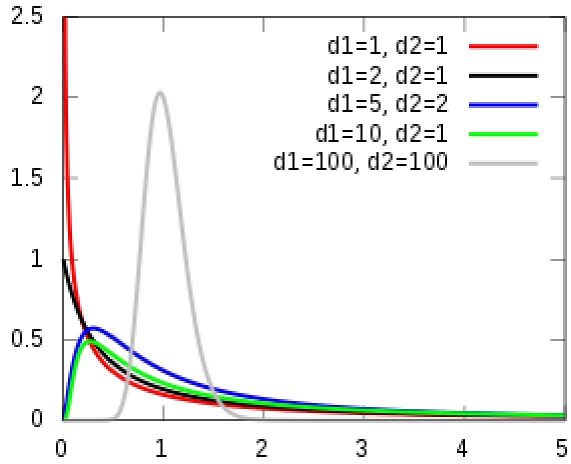
$10-2$ قانون توزيع(فيشر سينديكور):

هو توزيع احتمالي خاص ومعقد جداً يستخدم لاختبارات التجانس ولتحليل التباين ضمن المعطيات وبين العينات.ويعرف قانون توزيع فيشر على العلاقة الآتية:

$$\Gamma_{k.\ell}(X) = \frac{k^{\frac{k}{2}}.l^{\frac{\ell}{2}}.\Gamma\left(\frac{k+\ell}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)} . \frac{X^{\frac{k-2}{2}}}{(\ell + k.x)^{\frac{k+\ell}{2}}} \qquad (54-2)$$

حيث أن $0 < X < \infty$ ،وأن k, ℓ هو عددان صحيحان موجبان يسميان بعددي درجتي الحرية.

ويرسم هذا التابع منحنيات مختلفة تبعاً لقيمة k وفيما يلي بعض منها:



الشكل (2-10)

خواصه:

1- $F_{k,l}(X) \geq 0$.

2 – إن المساحة التي تحت المنحنى تساوي الواحد، أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{k,\ell}(X).dx = 1$$

3 – توقعه:

$$E(X) = \frac{\ell}{\ell - 2} \qquad (55-2)$$

4 – تباينه:

$$\sigma^2(X) = \frac{2\ell^2(k + \ell - 2)}{k(\ell - 2)^2(\ell - 4)} \qquad (56-2)$$

حيث $\ell > 4$.

ولحساب الاحتمالات نستخدم العلاقة الأكثر تطبيقاً الآتية :

$$F_{k,\ell}(X) = \frac{k^{\frac{K}{2}}.\ell^{\frac{\ell}{2}}.\Gamma\left(\frac{k+\ell}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)} \int_{F_0}^{\infty} \frac{X^{\frac{k-2}{2}}}{\left(\ell + k.x\right)^{\frac{k+\ell}{2}}} .dx = P_0 \qquad (57-2)$$

واعتماداً على هذه العلاقة يمكننا تحديد قيمة F_0 المقابلة للاحتمال P_0 وذلك من خلال الجداول الملحقة في آخر الكتاب وحسب درجتي الحرية k, ℓ .

تمرينات :

1 – إذا كان X هو طول الشخص البالغ وكان خاضعاً للتوزيع الطبيعي العام الذي متوسطه $\bar{x}=170$ ،وتباينه $\sigma^2=25$ ،**والمطلوب**:

– تحديد الصيغة الرياضية للتوزيع الاحتمالي للطول X .

– حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(160 \le X \le 185), P(X \le 160),$$
$$P(\bar{x}-2\sigma \le X \le \bar{x}+2\sigma), P(X \ge 180)$$

2 – إذا كان الإنتاج اليومي لإحدى المؤسسات X خاضعاً للتوزيع الطبيعي،وكان متوسطه $\bar{x}=1500$ ،وتباينه $\sigma^2=7800$ ،وكان الإنتاج المخطط خلال شهر يساوي 8000 قطعة.**والمطلوب**:

– حساب احتمال تنفيذ هذه الخطة .

– حساب احتمال تجاوزها بمقدار 2% .

3 – إذا كان X متحولاً عشوائياً يخضع لتوزيع χ^2 بـ 10 درجات حرية،**والمطلوب**:

– حساب $P(X>2)$.

– إيجاد قيمة X لكي يكون: $P(X>x=0.7)$.

4 – إذا كان لدينا 100 حاسوب،فإذا علمت أن احتمال أن يتعطل الحاسوب بسبب خلل في البرنامج هو 0.02 خلال العام،وأن احتمال أن يتعطل بسبب خلل في الذاكرة الكهربائية هو 0.03 خلال نفس العام. نسحب جهاز من هذه الأجهزة وبشكل عشوائي.**والمطلوب**:

– حساب احتمال تعطل الجهاز مرتين خلال العام.مرة بسبب خلل في البرنامج ومرة بسبب الدارة الكهربائية.

– حساب احتمال تعطل الجهاز خلال العام لمختلف الأسباب.

– حساب احتمال تعطل الجهاز أربع مرات خلال العام لمختلف الأسباب.

5 – اوجد الاحتمالات المقابلة لعدد الذكور في حالة 11 ولادة .

6 – إذا كان X متحولاً عشوائياً ويخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري،والمطلوب حساب الاحتمالات الآتية:

$$P(X < -3), P(X \leq 1), P(X \geq 3), P(X \leq 2)$$
$$P(-2 \leq X \leq 2), P(-3 \leq X \leq 3), P(X \leq -\infty)$$

7 – إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج نوع من اللمبات الكهربائية هي 0.02 وإن عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون.نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من 10 لمبات.**والمطلوب**:

– إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

– إيجاد احتمال الحصول على لمبة واحدة معيبة.

– إيجاد احتمال الحصول على لمبة معيبة على الأكثر.