الرياضيات الاقتصادية والمالية

القسم العملي

المحاضرة الأولى

المتواليات العددية

2020/3/17

علا البغدادي

المتواليات العددية

نطلق على كل سلسلة اعداد توجد علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي قبله متوالية.

المتوالية العددية: تابع معرف على مجموعة من الأعداد الطبيعية n, تسمى قيمة المتوالية او التابع a_n وكل عدد في السلسلة يسمى حد المتوالية حيث nهو رقم الحد.

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

حيث a1 هو الحد الأول

an هو الحد العام للمتوالية

أنواع المتواليات:

1-المتوالية الحسابية: هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها بدءا من الحد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب او سالب) للمقدار السابق له، يسمى المقدار الثابت الذي يضاف لأي حد بأساس المتوالية الحسابية ويرمز له بالحرف d

الحد العام للمتوالية الحسابية $a_n = a+(n-1)\,d$

أساس المتوالية الحسابية $d=a_n - a_{n-1}$

وكل حد من حدود المتوالية بدءا من حدها الثاني هو وسط حسابي للحدين المتساويان البعد عنه.

مجموع حدود متوالية حسابية

$$s_n=[2a+(n-1)d)]$$

وإذا أردنا كتابة العلاقة بدلالة الحد الأخير

$$s_n=\frac{n}{2}\,[a+a_n]$$

2-المتوالية الهندسية: هي متوالية أعاد كل حد من حدودها بدءا من الحد الثاني يساوي إلى الحد السابق له مضربا بمقدار ثابت (موجب أو سالب) المقدار الثابت هو أساس المتوالية الهندسية r والحد الأول a

أساس المتوالية الهندسية $r=\frac{a_n}{a_{n-1}}$

الحد العام للمتوالية الهندسية $a_n=a* r^{n-1}$

مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية بدءا من الحد الثاني يساوي جداء الحدين المتساويين في البعد عنه أي:

$$a_k^2 = a_{k-n} * a_{k+n}$$

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية $S_n = \frac{a - r * a_n}{1-r}$

المتوالية الهندسية اللانهائية

هي متوالية هندسية لانهائية إذا كان أساسها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن $|r| < 1$ وبملاحظة $\lim r^n = 0$

مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

تمارين ومسائل غير محلولة

1-اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية:

1) $a_{n=2^{n-1}}$

الحل:

الحد الأول عندما $n=1$، $a_{1=2^{1-1}} = 1$

الحد الثاني عندما $n=2$، $a_{2=2^{2-1}} = 2$

الحد الثالث عندما $n=3$، $a_{3=2^{3-1}} = 4$

الحد الرابع عندما $n=4$، $a_{4=2^{4-1}} = 8$

الحد الخامس عندما $n=5$، $a_{5=2^{5-1}} = 16$

2) $a_{n=\frac{n-1}{n+1}}$

الحل :

الحد الأول عندما $n=1$، $a_{1=\frac{1-1}{1+1}} = 0$

الحد الثاني عندما $n=2$, $a_{2=\frac{2-1}{2+1}} = \frac{1}{3}$

الحد الثالث عندما $n=3$، $a_{3=\frac{3-1}{3+1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

الحد الرابع عندما n=4، $a_{4=\frac{4-1}{4+1}} = \frac{3}{5}$

الحد الخامس عندما n=5، $a_{5=\frac{5-1}{5+1}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3) $a_{n=\frac{2^{n-1}}{n!}}$

الحل:

تذكر n! (nعاملي) جداء الاعداد الصحيحة الموجبة قطعا والتي أصغر أو تساوي n

الحد الأول عندما n=1 فإن n! =1 وبالتالي فإن الحد الأول= $a_{1=\frac{2^{1-1}}{1}}$ =1

الحد الثاني عندما n=2 فإن n! =2*1=2 وبالتالي فإن الحد الثاني = $a_{2=\frac{2^{2-1}}{2}}$ =1

الحد الثالث عندما n=3 فإن n! =3*2*1=6 وبالتالي فإن الحد الثالث $a_{3=\frac{2^{3-1}}{6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

الحد الرابع عندما n=4 فإن n! =4*3*2*1=24 وبالتالي فإن الحد الرابع $a_{4=\frac{2^{4-1}}{24}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

الحد الخامس عندما n=5 فإن n! =5*4*3*2*1=120 وبالتالي فإن الحد الخامس $a_{5=\frac{2^{5-1}}{120}} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

5) $a_{n=\frac{(-1)^n}{2n!}}$

الحل:

الحد الأول عندما يكون n=1، فإن $a_{1=\frac{(-1)^1}{2*1!}} = \frac{1}{2}$

الحد الثاني عندما يكون n=2، فإن $a_{2=\frac{(-1)^2}{2*2!}} = \frac{1}{4*3*2*1} = \frac{1}{24}$

الحد الثالث عندما يكون n=3 فإن $a_{3=\frac{(-1)^3}{2*3!}} = \frac{-1}{6*5*4*3*2*1} = \frac{-1}{720}$

الحد الرابع عندما يكون n=4 فإن $a_{4=\frac{(-1)^4}{2*4!}} = \frac{1}{8*7*6*5*4*3*2*1} = \frac{1}{40320}$

الحد الخامس عندما يكون n=5 فإن $a_{5=\frac{(-1)^5}{2*5!}} = \frac{-1}{9*10*8*7*6*5*4*3*2*1} = \frac{-1}{3628800}$

2-أوجد الحد العام لكل من المتواليات الاتية:

1,4,7,10

الحل 10-7=3، 7-4=4،4-1=3

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$$

الحل

الحد العام للمتوالية الهندسية= $a_n=2*\frac{4}{5}^{n-1}$

3-إذا علمت أن الحد رقم 21 والحد رقم 25 لمتوالية حسابية هما (64) و(106) على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية .

الحل : الحد العام للمتوالية الحسابية يعطى كمايلي $a_n = a+(n-1)\ d$

وبالتالي فإن الحد رقم (21) $64 = a+20d$

والحد رقم (35) $a+34\ d$ = **بطرح** المعادلة الأولى من الثانية تصبح المعادلة $14d = 42$ ومنه d=3أي أساس المتوالية نعوض في معادلة الحد العام 64=3*20+a فتكون a=64-60=4وهو الحد الأول

الحد الثاني 4+3=7

الحد الثالث 7+3=10

4-إذا علمت أن الحد الخامس والحد السابع لمتوالية هندسية هما: 324,2916 على الترتيب. اوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الحد العام للمتوالية الهندسية $a_n=a*\ r^{n-1}$ أي $a_5=a*\ r^4$ =324

و2916= $a_7=a*\ r^6$ بقسمة المعادلة الثانية على الأولى نجد أن و9= r^2 وبالتالي r=3

324=81*a يؤدي a=324/81=4 الحد الثاني=4*3=12 والحد الثالث=12*3=36 أو -3 فتكون الحد الأول 4والثاني -12والثالث36.

يتبع في المحاضرة القادمة تمارين المتواليات مع التمنيات بالتوفيق.