



منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد

منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد

رياضيات الاقتصاد والمالية

الدكتورة

أعيرة عبود

أستاذة في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

معد سليمان

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

مأمون النباش

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

الرياضيات الاقتصادية والمالية



منشور من جامعة منسرا
كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية والمالية

الدكتورة

أميرة محيىو

أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

محمى محمد سليمان

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

مأمون النبالش

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

مديرية الكتب والطبوعات الجامعية

١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

لطلاب السنة الثانية

المحتويات

الصفحة	الموضوع
--------	---------

٧ المحتويات

١٧ المقدمة

الباب الأول: الرياضيات المالية

الفصل الأول

المتواليات العددية

١٧	§ 1 - تمهيد وتعريف
١٧	1-1 تعريف المتوالية العددية
١٨	2-1 تعريف المتوالية المحدودة
١٩	3-1 تعريف المتوالية المتزايدة
١٩	4-1 تعريف نهاية متوالية
٢٠	§ 2 - المتوالية الحسابية
٢١	2-1 قانون الحد العام للمتوالية الحسابية
٢١	2-2 مجموع حدود المتوالية الحسابية
٢٥	§ 3 - المتوالية الهندسية
٢٥	3-1 قانون الحد العام للمتوالية الهندسية
٢٦	3-2 مجموع حدود متوالية هندسية
٢٦	3-3 المتوالية الهندسية اللانهائية
٢٩	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل الثاني

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

٣٣	§ 1 - مقدمة وتعريف
٣٣	1-1 تعريف الفائدة البسيطة
٣٤	2-1 تعريف الفائدة المركبة
٣٥	3-1 معادلة الفائدة المركبة
٣٨	1-4 جملة مبلغ عندما تكون مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر والأيام

- ٣٩ 1 - 5 جملة مبلغ قدره C ل s مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية $i\%$ والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة عندما تضاف الفائدة m مرة في السنة.
- ٤٢ 1-6 الفائدة المركبة المستمرة طيلة أيام السنة.
- ٤٣ § 2 - المعدل الحقيقي والمعدل الاسمي للفائدة
- ٤٤ 2 - 1 العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي للفائدة.
- ٤٧ § 3 - خصم الديون بفائدة مركبة
- ٤٩ § 4 - تسوية الديون بفائدة مركبة
- ٥١ تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل الثالث

الدفعات الدورية

- ٥٥ § 1 - مفهوم الدفعات
- ٥٥ 1 - 1 أنواع الدفعات
- ٥٦ 1 - 2 جملة الدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية
- ٥٧ 1 - 3 القيمة الحالية للدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية
- ٥٨ 1 - 4 جملة الدفعات الجزئية الدورية العادية
- ٦٠ 1 - 5 جملة الدفعات السنوية الدورية الفورية المتساوية r_0
- ٦٢ 1 - 6 جملة الدفعات الجزئية الفورية $v_{m,n}^*$
- ٦٢ § 2 - الدفعات الدائمة
- ٦٣ 2 - 1 القيمة الحالية للدفعات الدائمة
- ٦٥ تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل الرابع

استهلاك القروض

- ٦٩ § 1 - مفهوم استهلاك القروض
- ٦٩ 1-1 استهلاك القرض بدفعات سنوية غير متساوية
- ٧٢ 2-1 استهلاك القرض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً
- ٧٣ 3-1 معادلة حساب القسط المتساوي
- ٧٥ 4-1 العلاقة بين الاستهلاكات

الباب الثاني: النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية

الفصل الخامس

البرمجة الخطية

- ٧٩ § 1 - فروض البرمجة الخطية
- ٨٠ § 2 - بناء وصياغة النموذج الرياضي للمشكلة
- ٨٠ § 3 - النموذج الرياضي العام لمسائل البرمجة الخطية
- ٨٢ § 4 - تعاريف ومصطلحات خاصة بالبرمجة الخطية
- ٨٢ § 5 - طرائق حل مشاكل البرمجة الخطية
- المبحث الأول: الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية
- ٨٣ § 1 - كيفية تحديد منطقة حلول متراجحة خطية بمتغيرين
- ٨٤ § 2 - كيفية تحديد منطقة حلول جملة متراجحات خطية بمتغيرين
- ٨٦ § 3 - خطوات الحل البياني لمسألة برمجة خطية بمتغيرين
- ٩٨ § 4 - حالات خاصة
- ١٠٠ المبحث الثاني: الطريقة الجبرية في حل مسائل البرمجة الخطية
- المبحث الثالث: حل البرامج الخطية بطريقة سمبلكس
- ١٠٦ § 1 - المرحلة الأساسية الواجب اتباعها أثناء تطبيق طريقة السمبلكس
- ١٠٧ § 2 - كيفية الانتقال من النموذج العام إلى النموذج القياسي
- ١٠٨ § 3 - المراحل العملية الواجب اتباعها أثناء تطبيق طريقة سمبلكس
- ١٠٨ 3-1 حالة تعظيم الأرباح
- ١٠٨ أ- طريقة سمبلكس المختزلة (الطريقة المتطورة)
- ١١٤ ب- طريقة التحويلات الأولية
- ١١٧ ج- حالات خاصة عند تطبيق طريقة السمبلكس
- ١٢٥ 3-2 حالة تدنية التكاليف
- ١٢٥ أ- مفهوم الثنائية (البرنامج الأصلي والبرنامج المرافق)
- ١٢٥ ب- كيفية تكوين البرنامج المرافق
- ١٢٧ ج - مثال يوضح العلاقة بين البرنامج الأصلي والمنهاج المرافق
- ١٣٥ تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل السادس

النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات - نموذج ليونتيف -

١٣٩	§ 1 - أساسيات نموذج المدخلات والمخرجات
١٣٩	1-1 استخدامات النموذج
١٤٠	2-1 الخصائص العامة لجداول المدخلات والمخرجات
١٤٠	3-1 فرضيات النموذج العام لجداول المدخلات والمخرجات
١٤٠	§ 2 - الشكل العام لنموذج المدخلات والمخرجات
١٤٤	§ 3 - الصيغة الرياضية للنموذج
١٤٦	§ 4 - الشكل المصفوفي لنموذج المدخلات والمخرجات
١٤٧	§ 5 - حل النموذج
١٥٣	§ 6 - واقعية الخطط المقترحة
١٥٩	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل السابع

استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

المبحث الأول: مقدمة في الاحتمالات

١٦١	§ 1 - تعريف الاحتمال
١٦١	1-1 التعريف الكلاسيكي لاحتمال
١٦٢	2-1 تعريف الاحتمال ك تكرار نسبي
١٦٤	§ 2 - قوانين الاحتمالات
١٦٤	1-2 قوانين الجمع
١٦٥	2-2 قوانين الضرب
١٦٧	3-2 قانون الضرب في الحالة العامة

المبحث الثاني: المتغير العشوائي والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي

١٦٨	§ 1 - تعريف المتغير العشوائي
١٦٨	§ 2 - التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة
١٦٩	§ 3 - توزيع ثنائي الحدين
١٦٩	§ 4 - التوزيع الاحتمالي المستمر
١٧٠	§ 5 - التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع

١٧١	§ - 6 التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي
١٧٣	§ - 7 أهم خواص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي
	تمارين ومسائل غير محلولة
	المبحث الثالث: تطبيق التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية
١٧٤	§ - 1 أهمية التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية
١٧٦	§ - 2 المنفعة المتوقعة في المشروعات التجارية والصناعية
١٨٦	تمارين ومسائل غير محلولة

الباب الثالث: التوابع الاقتصادية

الفصل الثامن

الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى

١٨٩	§ - 1 تمهيد وتعريف
١٨٩	1-1 تعريف مشتق تابع
١٩١	2-1 تعريف تفاضل تابع
١٩١	3-1 تعريف المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى
١٩٣	4-1 المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات
١٩٤	5-1 التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لتابع متعدد المتحولات
١٩٥	6-1 التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات
١٩٧	7-1 المشتقات الجزئية للتوابع الضمنية
١٩٩	§ - 2 القيم القصوى للتوابع المتعددة المتحولات
٢٠٠	1-2 القيم القصوى الحرة لتابع ذو n متحول
٢٠٦	2-2 القيم القصوى المقيدة بشرط
٢٠٦	1. الطريقة المباشرة
٢٠٧	2. طريقة مضارب لاغرانج
٢١١	3-2 القيم القصوى المقيدة بأكثر من شرط
٢١٩	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل التاسع

المرونة

٢٢١	§ - 1 المرونة
-----	---------------

٢٢١	§ - 2 مرونة تابع
٢٢٤	§ - 3 خواص المرونة
٢٢٦	§ - 4 أنواع المرونات
٢٢٦	4-1 مرونة الطلب السعرية
٢٢٩	4-2 مرونة الطلب الدخلية
٢٣٢	4-3 مرونة العرض السعرية
٢٣٣	4-4 توازن السوق
٢٣٤	4-5 المرونة الجزئية للطلب
٢٣٥	4-6 مرونة الطلب التقاطعية
٢٤٤	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل العاشر

سلوك المستهلك

٢٤٧	§ - 1 مفهوم المنفعة
٢٤٩	§ - 2 المنفعة العظمى لمستهلك
٢٥٥	§ - 3 المنفعة الحدية لسلعة ومرونة تابع المنفعة
٢٥٦	§ - 4 منحنيات السواء
٢٦٣	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل الحادي عشر

توابع الإنتاج

٢٦٧	§ - 1 مفهوم توابع الإنتاج
٢٦٨	§ - 2 الحصول على أكبر حجم من المنتجات من خلال تكلفة معينة
٢٧٠	§ - 3 الحصول على حجم معين مسبقا من المنتجات بأقل تكلفة ممكنة
٢٧٥	§ - 4 الربح الأعظم في حالة عدم وجود أية قيود على استخدام عوامل الإنتاج
٢٧٧	§ - 5 توابع الإنتاج الضمنية والربح الأعظمي
٢٨٢	§ - 6 الإنتاجية الحدية ومرونة تابع الإنتاج
٢٨٣	§ - 7 منحنيات الناتج المتساوي
٢٨٥	§ - 8 مرونة الإحلال
٢٨٦	تمارين ومسائل غير محلولة

الفصل الثاني عشر
التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

٢٨٩	§ 1- تمهيد وتعريف
٢٨٩	1-1 التكامل غير المحدد
٢٨٩	2-1 التكامل المحدد
٢٩٠	3-1 العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد
٢٩٠	§ 2 - التطبيقات الاقتصادية للتكامل
٢٩٠	1-2 فائض المستهلك
٢٩٤	2-2 فائض المنتج
٣٠٣	3-2 تطبيقات التكامل في التحليل الحدي
٣٠٦	4-2 تطبيقات التكامل في تحليل الثروات الطبيعية
٣٠٩	5-2 تطبيقات التكامل في الاستثمار وتكوين رأس المال
٣١١	6-2 تطبيقات التكامل في الميل الحدي للاستهلاك والادخار
٣١٥	تمارين ومسائل غير محلولة
٣٢١	الملحق
٣٥١	المصطلحات العلمية
٣٥٩	المراجع

المقدمة

هدف مقرر الرياضيات المالية والاقتصادية شرح وصياغة وتعلم كيفية معالجة مختلف الظواهر المالية والاقتصادية والإدارية، وذلك باستخدام الأدوات الرياضية التي تساعد متخذ القرار في اتخاذ قرار صحيح أسهل، ومن أجل تحقيق هذا الهدف فقد قسم هذا الكتاب إلى ثلاثة أقسام تتضمن اثنتي عشرة فصلاً تضمنت الموضوعات الآتية:

يحتوي القسم الأول على أساسيات الرياضيات المالية وهو يتضمن أربعة فصول، يعالج للفصل الأول من ذلك القسم المسائل والمفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتواليات العددية، الحسابية والهندسية. وفي الفصل الثاني يتعرض لمفهوم الفائدة المالية البسيطة والمركبة وتطبيقاتهما في المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسكانية، وفي الفصل الثالث تعرضنا إلى مفهوم الدفعات الدورية بأنواعها المختلفة وتطبيقاتها في جميع المجالات، أما الفصل الرابع فقد تناول استهلاك القروض بدفعات سنوية أو جزئية غير متساوية، وموضوع استهلاك القروض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً.

أما القسم الثاني من الكتاب فقد ركز على الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الاقتصادية والإدارية فتضمن ثلاث فصول ففي الفصل الخامس تم البحث في طرق البرمجة الخطية لصياغة وحل أي مشكلة اقتصادية على اعتبار أنها من أهم العلوم الحديثة التي تعنى باستخدام النماذج الرياضية التي تهتم بالتوزيع الفعال للموارد المحدودة نسبياً بحيث ينتج عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة. وفي الفصل السادس تم التعرض للنموذج السكوني للمدخلات والمخرجات الذي يعتبر من أهم النماذج المستخدمة في التخطيط على المستوى القومي أو المستوى القطاعي، حيث كان الهدف الأساسي من دراسة هذا النموذج التحليل الكمي للتشايك بين القطاعات الاقتصادية خلال قيامها بنشاطها الإنتاجي، وبيان العلاقات بين المنتجين باعتبارهم مشترين للعناصر الداخلة في الإنتاج وبائعين لمنتجاتهم إلى المستخدمين النهائيين. أما الفصل السابع فيتعرض إلى استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية

والصناعية، على اعتبار أن لكل مشروع تجاري أو صناعي العديد من الخطط المتاحة له وعلى صاحب المشروع اختيار أنسبها من خلال تحديد صور الأحوال الاقتصادية المتوقعة وتحديد المنافع المتوقعة للخطط المتاحة له ومن ثم تحديد الأرباح والخسائر المتوقعة للمشروع من كل خطة من الخطط المتاحة له مقترنة بصور الحالة الاقتصادية.

أما القسم الثالث والأخير من الكتاب فقد ركز على التطبيقات الاقتصادية لما تم دراسته في مقرر الرياضيات في السنة الأولى، فتضمن أربعة فصول ففي الفصل الثامن تم التذكير بمبادئ الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى التي تعتبر من أهم مواضيع التحليل الاقتصادي الجزئي والكلّي. أما في الفصل التاسع تم التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمه للمشتقات، مع دراسة المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية. أما الفصل العاشر فقد تم بحث سلوك المستهلك وفكرتها نشأت من كون المستهلك يحصل على إشباع مادي أو رضا معنوي ناتج من استهلاك السلع أو الخدمات. عند تحليل سلوك المستهلك، نقصد بالمنفعة، بأنها مستوى الرضا أو الإشباع الذي يحصل عليه المستهلك من استهلاك سلعة أو الحصول على خدمة معينة. وفي الفصل الحادي عشر تم التعرض إلى توابع الإنتاج وخواصها وتطبيقاتها الاقتصادية وأخيراً في الفصل الثاني عشر تم دراسة التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

ولقد ضمنا كل فصل من هذه الفصول كثيراً من الأمثلة التطبيقية والمسائل المحولة لتوضيح القضايا النظرية، وألحقنا به قائمة بتمارين ومسائل غير محولة، كما ألحقنا بآخر الكتاب ملحقاً يضم موجزاً لبعض المفاهيم الرياضية الأساسية والتي يمكن للطلاب العودة إليها على سبيل التذكير حين الحاجة، كمواضيع المصفوفات والمحددات وحلول جمل المعادلات والتوابع غير الخطية المتعددة المتغيرات والمشتقات وقواعد التكامل.

هذا الكتاب يمثل جهداً مشتركاً لمؤلفيه الثلاثة، إلا أنه يمكن القول أن القسم الأول، الرياضيات المالية كان من إعداد الدكتور مأمون النباش، والفصول الخامس

والمعادس والمسابيع من إعداد الدكتورة أميرة عبيدو والفصول الثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر والثاني عشر من إعداد الدكتور محمد معد سليمان.

ويأمل المؤلفون أن تساهم هذه الجهود المشتركة من الرياضيات الاقتصادية في إثراء المكتبة العربية وأن يساعد الباحثين والمهتمين في هذا المجال، ونسأل الله أن نكون قد وفقنا بما عرضناه في هذا الكتاب من مادة علمية بصورة مبسطة وواضحة وسهلة الاستخدام، ومضمون علمي جيد وجديد.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

الفصل الأول

المتواليات العددية

1.8. تمهيد وتعريف:

لنتأمل مجموعات الأعداد المتتالية المرتبة وفق نظام معين:

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, \dots$$

إن هذه الأعداد تتوالى عدداً بعد آخر، وكل عدد يزيد بواحد عن العدد الذي يسبقه بينما مجموعة الأعداد التالية:

$$(2) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

فيها حاصل قسمة كل عدد على العدد الذي يسبقه يساوي $\frac{1}{2}$. وأخيراً المجموعة:

$$(3) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

في هذه المجموعة المقام يزيد بمقدار واحد في كل عدد عن العدد الذي يسبقه.

كل من أعداد هذه المجموعات تسمى متوالية أعداد نظراً لوجود علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي يليه بالترتيب.

1-1- تعريف متوالية الأعداد:

تعرف متوالية الأعداد بأنها تابع معرف على مجموعة الأعداد الطبيعية N

ونرمز لقيم هذا التابع بـ $f(n) = a_n$ ، حيث تسمى حدود المتوالية، ونسمي العدد n برقم الحد a_n .

نكتب المتوالية بالشكل: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

أو بشكل مختصر: $\{a_n\}, \quad n \in N$

يسمى العدد a_1 بالحد الأول للمتوالية والعدد a_2 بالحد الثاني للمتوالية، والعدد

a_n بالحد العام للمتوالية (الحد النوني).

أمثلة على المتواليات:

1- المتوالية: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ حدها العام $a_n = n$

2- المتوالية: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ حدها العام $a_n = \frac{1}{2^n}$

3- المتوالية: $-1, +1, -1, \dots, +1, -1, \dots$ حدها العام $a_n = (-1)^n$

4- المتوالية: $2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ حدها العام $a_n = 2$

المتوالية الأخيرة تعتبر مثالاً على المتوالية الثابتة.

مثال:

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتوالية التي حدها العام: $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

الحل: بأخذ $n = 1, 2, 3, 4$ على التوالي نجد أن:

$$a_1 = \frac{1}{2^0} = 1, a_2 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \dots$$

وتكون المتوالية المطلوبة هي:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

مثال:

أوجد الحد العام للمتوالية:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$$

الحل: يمكن كتابة حدود المتوالية كما يلي:

$$a_1 = \frac{1}{1^2}, a_2 = \frac{1}{2^2}, a_3 = \frac{1}{3^2}, a_4 = \frac{1}{4^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

نستنتج أن الحد العام هو:

• إذا حدد في متوالية الحد الأخير سميت متوالية منتهية، وعندما يكون عدد حدودها

غير منتهى سميت المتوالية غير منتهية.

1-2 تعريف المتوالية المحدودة:

نسمى المتوالية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث أنه من أجل أي

$$n \in \mathbb{N} \text{ فإن } |a_n| \leq M \text{ محققة.}$$

وفي الحالة المعاكسة تسمى المتوالية غير محدودة.

مثال: المتواليتان $a_n = \frac{1}{n^4}$, $a_n = (-1)^n$ محدودتان.

$$\left| \frac{1}{n^4} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n^4} \leq 1$$

لأن المتوالية الأولى:

$$|(-1)^n| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

وكذلك المتوالية الثانية:

3-1 - تعريف المتوالية المتزايدة:

نسمى المتوالية $\{a_n\}$ متزايدة إذا كان من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ تكون

$$a_{n+1} > a_n$$

المتراجحة التالية محققة:

وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متناقصة، إذا كان من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ تكون

$$a_{n+1} < a_n$$

المتراجحة التالية محققة:

مثال:

$$\text{بين أن المتوالية: } a_n = \frac{n}{n+1} ; n=1,2,3,\dots$$

الحل: لأجل ذلك يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ فإن المتراجحة:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \text{أو} \quad a_{n+1} > a_n \quad \text{محققة.}$$

بالفعل هذا محقق فبعد تبديل كل n بـ $n+1$ وإجراء الطرح نجد أن:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

مثال: المتوالية $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ متناقصة لأن:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \quad \text{مهما كانت قيمة } n. \quad \text{وبالتالي فإن } a_{n+1} < a_n \quad \text{متوالية متناقصة.}$$

4-1 - تعريف نهاية متوالية:

لتكن $\{a_n\}$ متوالية ما ، نقول عنها أنها متقاربة ونهايتها L . ونكتب:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

عندما نتقارب حدودها من L من أجل قيم n كبيرة بقدر كاف، وإذا لم تكن

المتوالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثال: حدد فيما إذا كانت المتوالية $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل: إن حدود المتوالية: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. تكون من العدد $L=0$ عندما

تأخذ n قيمة أكبر فأكبر.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

إن المتوالية متقاربة

مثال:

تنتج شركة شمعات اشتعال محركات، نسبة الشمعات العاطلة منها 2% واحتمال الحصول على شمعة عاطلة واحدة على الأقل في عينة عشوائية مكونة من n شمعة هو: $f(n) = 1 - (0.98)^n$ والمطلوب:

أوجد الحدود $a_5, a_{10}, a_{25}, a_{100}, a_{200}$ من هذه المتوالية واحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

وفسر الجواب.

الحل: لدينا متوالية معرفة بالعلاقة التالية: $a_n = f(n) = 1 - (0.98)^n$ وبحساب هذه الحدود وفق العلاقة السابقة نجد أن الحدود المطلوبة هي:

$$a_5 = 0.10, a_{10} = 0.18, a_{25} = 0.40, a_{100} = 0.87, a_{200} = 0.98$$

فعلى سبيل المثال احتمال الحصول على شمعة اشتعال عاطلة على الأقل في

عينة عشوائية مكونة من 25 شمعة 0.4 أي 40%. لحساب $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ نكتب:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (0.98)^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (0.98)^n = 1 - 0 = 1$$

ويفسر الجواب كالآتي، إذا كان حجم العينة كبيراً بقدر كاف فإنها تحوي على

شمعة عاطلة واحدة على الأقل.

سنقتصر في دراستنا في هذا الفصل على المتواليات الحسابية والمتواليات

الهندسية. وللمتواليات تطبيقات عديدة منها في مجال حساب القيمة الحالية للقروض،

وإيجاد أقساط الدفعات المالية.

§2 المتوالية الحسابية:

المتوالية الحسابية هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها، بدءاً من الحد

الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب أو سالب) للمقدار السابق له، يسمى المقدار

الثابت الذي يضاف لأي حد من حدودها بأساس المتوالية الحسابية ونرمز له بالحرف d كما نرمز للحد الأول منها بالرمز a .

تسمى المتوالية الحسابية متزايدة إذا كان كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه (أي أنه إذا كان $d > 0$). ونسمى المتوالية الحسابية متناقصة إذا كان أي حد فيها أقل من الحد السابق له (أي أنه إذا كان $d < 0$).

2-1 قانون الحد العام للمتوالية الحسابية:

إن أي حد من حدود متوالية حسابية يساوي إلى حدها الأول $a = a_1$ مضافاً إليه عدد الحدود السابقة له مضروباً بأساس المتوالية d ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالقانون:

$$a_n = a + (n-1)d, \quad n \in N$$

يعطى أساس المتوالية الحسابية بالعلاقة:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

• كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحددين المتساويان البعد عنه، أي أن:

$$a_k = \frac{a_{k-n} + a_{k+n}}{2}, \quad k \in N, \quad n \in N, \quad k-n > 0$$

• في كل متوالية حسابية يكون فيها: $a_k + a_l = a_n + a_m$ بشرط: $k+l = n+m$

• إن كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحددين

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \text{السابق واللاحق له، أي أن:}$$

2-2 مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الحسابية:

لنكن لدينا المتوالية الحسابية التالية:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_3 = a + 2d, \dots, a_n = a + (n-1)d$$

ونرمز لمجموعها بـ S_n فنكتب:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + a + (n-1)d$$

هذا المجموع يمكن كتابته على الشكل التالي وذلك بإعادة ترتيبه بالعكس:

$$S_n = a + (n-1)d + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a$$

بجمع كل حدين متقابلين بالترتيب من المجموعين السابقين نحصل على:

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d]$$

إن عدد الحدود في هذا المجموع n حد وبالتالي يكون:

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

ومنه:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

وهذه العلاقة تمثل مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية حسابية.

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بدلالة الحد الأخير بالشكل التالي:

$$S_n = \frac{n}{2} [a + a_n]$$

من خلال العلاقة الأخيرة يمكننا حساب مجموع متوالية حسابية بمعرفة حديها

الأول والأخير وعدد حدودها.

• اعتماداً على قانون الاستقرار الرياضي يمكن إثبات أن مجموع أعداد طبيعية متماثلة الأس:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

أمثلة على المتوالات الحسابية:

مثال:

أوجد عدد الحدود ومجموع متوالية حسابية حدها الأول 0 وأساسها $d = \frac{1}{2}$

وحدها الأخير يساوي 5.

الحل: من نص المسألة نجد أن: $a = 0$, $d = \frac{1}{2}$, $a_n = 5$

باستخدام العلاقة: $a_n = a + (n-1)d$

نجد:

$$n-1 = \frac{a_n - a}{d}$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$$

$$n = \frac{5-0}{\frac{1}{2}} + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{11}{2}(0+5) = \frac{55}{2} = 27.5$$

مثال:

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحدود لمتوالية حسابية حدها الأخير

$$a_2 + a_5 = 32.5 \quad \text{و} \quad S_{15} = 412.5 \quad \text{و} \quad a_n = 55$$

الحل:

نطلقاً من:

$$a_2 + a_5 = 32.5$$

$$(a + d) + (a + 4d) = 32.5$$

$$2a + 5d = 32.5 \quad (1)$$

$$S_{15} = 412.5$$

ومن الفرض نجد أن:

$$\frac{15}{2}(a + a_{15}) = 412.5$$

$$15a + 105d = 412.5 \quad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على: $a = 10$, $d = 2.5$

وبالتعويض في العلاقة:

$$n = \frac{55-10}{2.5} + 1 = 19$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 \quad \text{نجد أن:}$$

مثال: إذا كانت العلاوة السنوية لراتب مدير مصنع هي 600 ل.س، وكان راتبه في

آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 ل.س وإجمالي دخله طوال فترة عمله في

هذه الوظيفة هو 10500 ل.س. والمطلوب:

احسب قيمة الراتب لمدير المصنع عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

الحل:

بفرض أن مقدار الراتب عند بداية التعيين هي a ، ومقدار الزيادة السنوية هي $d = 600$ ، فإن الراتب في السنة الثانية سيكون $a + 600$ والراتب في السنة الأخيرة هو 3300 ل.س. وهو يمثل الحد الأخير من متوالية حسابية متزايدة أساسها $d = 600 > 0$.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$3300 = a + (n-1)600 \quad (1)$$

وإن مجموع ما يتقاضاه يمثل مجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$10500 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)600] \quad (2)$$

$$a = 3900 - 600n$$

من المعادلة (1) نجد أن:

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$10500 = \frac{n}{2}[2(3900 - 600n) + (n-1)600]$$

بعد الإصلاح نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمتحول n وهي من

الشكل:

$$n^2 - 12n + 35 = 0$$

$$(n-7) \cdot (n-5) = 0$$

ومنه نجد أن $n = 7$ أو $n = 5$

من أجل $n = 7$ تكون قيمة $a = -300$ مرفوضة.

ومن أجل $n = 5$ تكون قيمة $a = 900$ مقبولة.

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات ومقدار الراتب عند بداية التعيين

هو 900 ل.س.

مثال: أودع محمد مبلغ 1000 ل.س. بفائدة بسيطة شهرية 1% في أحد المصارف.

احسب رصيده في نهاية سنة من تاريخ الإيداع.

الحل: إن المبلغ المودع في بداية السنة وقدره 1000 ل.س يمثل الحد الأول لمتوالية حسابية، حدود هذه المتوالية هي:

$$1000, 1010, 1020, 1030, 1040, \dots$$

نرى أن أساسها هو $d = 10$. لحساب الرصيد في نهاية السنة نوجد الحد a_{12} :

$$\begin{aligned} a_{12} &= a + (n-1) \cdot d \\ &= 1000 + (12-1)10 = 1110 \text{ س.م} \end{aligned}$$

3.8 المتوالية الهندسية:

المتوالية الهندسية هي متوالية أعداد، كل حد من حدودها بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد السابق له مضروباً بمقدار ثابت (موجب أو سالب)، نسمي المقدار الثابت بأساس المتوالية الهندسية ونرمز له بالرمز r ، ونرمز للحد الأول فيها بالحرف a .

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

يحسب أساس المتوالية الهندسية من العلاقة:

$$20, 10, 5, \frac{5}{2}, \dots$$

فمثلاً المتوالية:

$$a = 20 \text{ هي متوالية هندسية أساسها } r = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول}$$

يعطى الشكل العام لمتوالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وعدد حدودها n بالشكل الآتي:

$$a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \dots, a \cdot r^{n-1}$$

3-1 قانون الحد العام للمتوالية الهندسية:

كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد الأول a مضروباً بأساس المتوالية r المرفوع إلى قوة تساوي إلى عدد الحدود السابقة لذلك الحد. أي أن:

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

• مربع كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي جداء الحدين

$$a_k^2 = a_{k-n} \cdot a_{k+n} \quad \text{المتساويين في البعد عنه أي:}$$

• في كل متوالية هندسية تكون المساواة: $a_k \cdot a_\ell = a_n \cdot a_m$ محققة بشرط:

$$k + \ell = n + m$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

2-3- مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \dots, a \cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r :

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{بشرط: } r \neq 1 \quad \text{ومنه:}$$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد ($r=1$) فإن المتوالية

تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \dots, a$ ويكون مجموعها $n \cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r \cdot a_n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

3-3- المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانهاية إذا كان أساسها r

بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-r^n) = \frac{a}{1-r} (\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

2-3- مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \dots, a \cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r :

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{بشرط: } r \neq 1 \quad \text{ومنه:}$$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد ($r=1$) فإن المتوالية

تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \dots, a$ ويكون مجموعها $n \cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r \cdot a_n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

3-3- المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانتهائية إذا كان أساسها r

بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-r^n) = \frac{a}{1-r} (\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

أمثلة على المتواليات الهندسية:

مثال: أوجد مجموع الحدود الـ 12 الأولى للمتوالية الهندسية: $4, -8, 16, -32, \dots$

الحل: لدينا $n=12$ ، $r=-2$ ، $a=4$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$S_{12} = \frac{4(1-(-2)^{12})}{1-(-2)} = -5460$$

مثال: أوجد الحد الأول ومجموع الحدود العشرة الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a_{10} = 7, \quad n = 10, \quad r = \frac{1}{2}$$

الحل: انطلاقاً من العلاقة: $a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_{10} = ar^9$

$$a = \frac{a_{10}}{r^9} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 7 \cdot (2)^9 = 3584$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$S_{10} = \frac{3584 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 7161$$

مثال:

متوالية هندسية مؤلفة من (6) حدود، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي 168 ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة يساوي 21. أوجد حدود هذه المتوالية.

الحل:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 21$$

أو يمكن كتابتها حسب تعريف المتوالية الهندسية بالشكل التالي:

$$a + ar + ar^2 = 168$$

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 21$$

$$a(1+r+r^2) = 168$$

أو

(1)

$$ar^3(1+r+r^2)=21 \quad (2)$$

بتقسيم (2) على (1) نحصل على:

$$r^3 = \frac{21}{168} = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة $r = \frac{1}{2}$ في المعادلة (1) نحصل على قيمة $a = 96$.

والمتوالية المطلوبة هي: 96, 48, 24, 12, 6, 3.

مثال:

عبر عن الكسر العشري المتكرر: 0.232323..... بصورة كسر عادي.

الحل:

بحسب التمثيل العشري نستطيع كتابة الرقم 0.232323..... بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} 0.232323..... &= \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \\ &= \frac{23}{100} + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{100} \right) + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \end{aligned}$$

وهذا المجموع يمثل متوالية هندسية لانتهائية حدها الأول $a = \frac{23}{100}$ وأساسها

$\frac{1}{100}$ ويكون مجموعها S_{∞}

$$S_{\infty} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \left(\frac{100}{99} \right) = \frac{23}{99}$$

$$0.232323..... = \frac{23}{99}$$

إذن