منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية والمالية

الدكتورة
أميرة عبيدو
أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
مأمون النبّاش
مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
معد سليمان
مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١هـ - ٢٠١٠م

منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد
الرياضيات الاقتصادية والمالية

منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية والمالية

الدكتورة
أميرة عبيدو
أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
مأمون النباش
مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
محمد معد سليمان
مدرس في قسم الاحصاء ونظم المعلومات

لطلاب السنة الثانية

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

المحتـــويات

الفصل الثالث

الدفعات الدورية

الفصل الرابع

استهلاك القروض

الباب الثاني: النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية

الفصل الخامس

البرمجة الخطية

الفصل السادس

النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات – نموذج ليونتيف –

الفصل السابع

استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

الباب الثالث: التوابع الاقتصادية

الفصل الثامن

الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى

الفصل التاسع

المرونات

الفصل العاشر

سلوك المستهلك

الفصل الحادي عشر

توابع الإنتاج

الفصل الثاني عشر

التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

المقدمة

هدف مقرر الرياضيات المالية والاقتصادية شرح وصياغة وتعلم كيفية معالجة مختلف الظواهر المالية والاقتصادية والإدارية، وذلك باستخدام الأدوات الرياضية التي تساعد متخذ القرار في اتخاذ قرار صحيح أمثل، ومن أجل تحقيق هذا الهدف فقد قسم هذا الكتاب إلى ثلاثة أقسام تتضمن اثنتي عشرة فصلاً تضمنت الموضوعات الآتية:

يحتوي القسم الأول على أساسيات الرياضيات المالية وهو يتضمن أربعة فصول، يعالج الفصل الأول من ذلك القسم المسائل والمفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتواليات العددية، الحسابية والهندسية. وفي الفصل الثاني يتعرض لمفهوم الفائدة المالية البسيطة والمركبة وتطبيقاتهما في المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسكانية، وفي الفصل الثالث تعرضنا إلى مفهوم الدفعات الدورية بأنواعها المختلفة وتطبيقاتها في جميع المجالات، أما الفصل الرابع فقد تناول استهلاك القروض بدفعات سنوية أو جزئية غير متساوية، وموضوع استهلاك القروض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً.

أما القسم الثاني من الكتاب فقد ركز على الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الاقتصادية والإدارية فتضمن ثلاث فصول ففي الفصل الخامس تم البحث في طرق البرمجة الخطية لصياغة وحل أي مشكلة اقتصادية على اعتبار أنها من أهم العلوم الحديثة التي تعنى باستخدام النماذج الرياضية التي تهتم بالتوزيع الفعال للموارد المحدودة نسبياً بحيث ينتج عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة. وفي الفصل السادس تم التعرض للنموذج السكوني للمدخلات والمخرجات الذي يعتبر من أهم النماذج المستخدمة في التخطيط على المستوى القومي أو المستوى القطاعي، حيث كان الهدف الأساسي من دراسة هذا النموذج التحليل الكمي للتشابك بين القطاعات الاقتصادية خلال قيامها بنشاطها الإنتاجي، وبيان العلاقات بين المنتجين باعتبارهم مشترين للعناصر الداخلة في الإنتاج وبائعين لمنتجاتهم إلى المستخدمين النهائيين. أما الفصل السابع فيتعرض إلى استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية

والصناعية،على اعتبار أن لكل مشروع تجاري أو صناعي العديد من الخطط المتاحة له وعلى صاحب المشروع اختيار أنسبها من خلال تحديد صور الأحوال الاقتصادية المتوقعة وتحديد المنافع المتوقعة للخطط المتاحة له ومن ثم تحديد الأرباح والخسائر المتوقعة للمشروع من كل خطة من الخطط المتاحة له مقترنة بصور الحالة الاقتصادية.

أما القسم الثالث والأخير من الكتاب فقد ركز على التطبيقات الاقتصادية لما تمّ دراسته في مقرر الرياضيات في السنة الأولى، فتضمن أربعة فصول ففي الفصل الثامن تم التذكير بمبادئ الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى التي تعتبر من أهم مواضيع التحليل الاقتصادي الجزئي والكلي. أما في الفصل التاسع تم التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمة للمشتقات، مع دراسة المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية. أما الفصل العاشر فقد تم بحث سلوك المستهلك وفكرتها نشأت من كون المستهلك يحصل على إشباع مادي أو رضا معنوي ناتج من استهلاك السلع أو الخدمات. عند تحليل سلوك المستهلك، نقصد بالمنفعة، بأنها مستوى الرضا أو الإشباع الذي يحصل عليه المستهلك من استهلاك سلعة أو الحصول على خدمة معينة. وفي الفصل الحادي عشر تم التعرض إلى توابع الإنتاج وخواصها وتطبيقاتها الاقتصادية وأخيراً في الفصل الثاني عشر تم دراسة التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

ولقد ضمنا كل فصل من هذه الفصول كثيراً من الأمثلة التطبيقية والمسائل المحلولة لتوضيح القضايا النظرية، وألحقنا به قائمة بتمارين ومسائل غير محلولة، كما ألحقنا بآخر الكتاب ملحقاً يضم موجزاً لبعض المفاهيم الرياضية الأساسية والتي يمكن للطالب العودة إليها على سبيل التذكير حين الحاجة، كمواضيع المصفوفات والمحددات وحلول جمل المعادلات والتوابع غير الخطية المتعددة المتغيرات والمشتقات وقواعد التكامل.

هذا الكتاب يمثل جهداً مشتركاً لمؤلفيه الثلاثة، إلا أنه يمكن القول أن القسم الأول، الرياضيات المالية كان من إعداد الدكتور مأمون النباش، والفصول الخامس

والسادس والسابع من إعداد الدكتورة أميرة عبيدو والفصول الثامن والتاسع والعاشـــر والحادي عشر والثاني عشر من إعداد الدكتور محمد معد سليمان.

ويأمل المؤلفون أن تساهم هذه الجهود المشتركة من الرياضيات الاقتصادية في إثراء المكتبة العربية وأن يساعد الباحثين والمهتمين في هذا المجـــال، ونـــسأل الله أن نكون قد وفقنا بما عرضناه في هذا الكتاب من مادة علمية بصورة مبسطة وواضـــحة وسهلة الاستخدام، ومضمون علمي جيد وجديد.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

الفصل الأول
المتواليات العددية

§1. تمهيد و تعاريف:

لنتأمل مجموعات الأعداد المتتالية المرتبة وفق نظام معين:

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

إن هذه الأعداد تتوالى عدداً بعد آخر، وكل عدد يزيد بواحد عن العدد الذي يسبقه بينما مجموعة الأعداد التالية:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

فيها حاصل قسمة كل عدد على العدد الذي يسبقه يساوي $\frac{1}{2}$. وأخيراً المجموعة :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

في هذه المجموعة المقام يزيد بمقدار واحد في كل عدد عن العدد الذي يسبقه.

كل من أعداد هذه المجموعات تسمى متوالية أعداد نظراً لوجود علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي يليه بالترتيب.

1ـــ1ـــ تعريف متوالية الأعداد:

تعرّف متوالية الأعداد بأنها تابع معرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية N ونرمز لقيم هذا التابع بـــ $f(n) = a_n$، حيث تسمى حدود المتوالية، ونسمي العدد n برقم الحد a_n.

نكتب المتوالية بالشكل: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

أو بشكل مختصر: $\{a_n\} \quad , \quad n \in N$

يسمى العدد a_1 بالحد الأول للمتوالية والعدد a_2 بالحد الثاني للمتوالية، والعدد a_n بالحد العام للمتواليه (الحد النوني).

أمثلة على المتواليات:

1- المتوالية: $1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n = n$

2- المتوالية: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=\frac{1}{2^n}$

3- المتوالية: $-1,+1,-1,\ldots\ldots\ldots,+1,-1,\ldots!\ldots$ حدها العام $a_n=(-1)^n$

4- المتوالية: $2,2,2,\ldots\ldots\ldots,2,\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=2$

المتوالية الأخيرة تعتبر مثالاً على المتوالية الثابتة.

مثـــال:

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتوالية التي حدها العام: $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

الحـــل: بأخذ $n=1,2,3,4$ على التوالي نجد أن:

$$a_1=\frac{1}{2^0}=1,\ a_2=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},a_4=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتكون المتوالية المطلوبة هي:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$$

مثـــال:

أوجد الحد العام للمتوالية:

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$$

الحـــل: يمكن كتابة حدود المتوالية كما يلي:

$$a_1=\frac{1}{1^2},\ a_2=\frac{1}{2^2},a_3=\frac{1}{3^2},a_4=\frac{1}{4^2}$$

نستنتج أن الحد العام هو: $a_n=\frac{1}{n^2}$

- إذا حدد في متوالية الحد الأخير سميت متوالية منتهية، وعندما يكون عدد حـــدودها غير منته سميت المتوالية غير منتهية.

1ـــ 2ـــ تعريف المتوالية المحدودة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث أنه من أجـــل أي $n\in N$ فإن المتراجحة: $|a_n|\le M$ محققة.

وفي الحالة المعاكسة تسمى المتوالية غير محدودة.

مثـــال: المتواليتان $a_n = \frac{1}{n^4}$, $a_n = (-1)^n$ محدودتان.

لأن المتوالية الأولى: $0 \le \frac{1}{n^4} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$

وكذلك المتوالية الثانية: $-1 \le (-1)^n \le 1 \Leftrightarrow \left|(-1)^n\right| \le 1$

3-1 ـــ تعريف المتوالية المتزايدة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ متزايدة إذا كان مـــن أجـــل أي عـــدد $n \in N$ تكـــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} > a_n$.

وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متناقصة، إذا كان من أجـــل أي عـــدد $n \in N$ تكـــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} < a_n$.

مثـــال:

بيّن أن المتوالية: $a_n = \frac{n}{n+1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ متزايدة.

الحـــل: لأجل ذلك يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد $n \in N$ فإن المتراجحة: $a_{n+1} > a_n$ أو $a_{n+1} - a_n > 0$ محققة.

بالفعل هذا محقق فبعد تبديل كل n بـــ $n+1$ وإجراء الطرح نجد أن:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0$$

مثـــال: المتوالية $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ متناقصة لأن:

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ مهما كانت قيمة n . وبالتالي فإن $a_{n+1} < a_n$ متوالية متناقصة.

1 ــ4 ــ تعريف نهاية متوالية:

لتكن $\{a_n\}$ متوالية ما ، نقول عنها أنها متقاربة ونهايتها L. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

عندما تتقارب حدودها من L من أجل قيم n كبيرة بقدر كاف، وإذا لـــم تكـــن المتوالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثـــال: حدد فيما إذا كانت المتوالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحـــل: إن حدود المتوالية: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots$. تدنو من العدد $L = 0$ عنـــدما تأخذ n قيماً أكبر فأكبر.

إذن المتوالية متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

مثـــال:

تنتج شركة شمعات اشتعال محركات، نـــسبة الـــشمعات العاطلـــة منهـــا 2% واحتمال الحصول على شمعة عاطلة واحدة على الأقل في عينة عشوائية مكونة مـــن n شمعة هو: $f(n) = 1 - (0.98)^n$ والمطلوب:

أوجد الحدود a_5 ، a_{10} ، a_{25} ، a_{100} ، a_{200} من هذه المتوالية واحـــسب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وفسرّ الجواب.

الحـــل: لدينا متوالية معرّفة بالعلاقة التالية: $a_n = f(n) = 1 - (0.98)^n$ وبحساب هذه الحدود وفق العلاقة السابقة نجد أن الحدود المطلوبة هي:

$$a_5 = 0.10\ ,\ a_{10} = 0.18\ ,\ a_{25} = 0.40\ ,\ a_{100} = 0.87\ ,\ a_{200} = 0.98$$

فعلى سبيل المثال احتمال الحصول على شمعة اشتعال عاطلة على الأقـــل فـــي عينة عشوائية مكونة من 25 شمعة 0.4 أي 40%. لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - (0.98)^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} (0.98)^n = 1 - 0 = 1$$

ويفسّر الجواب كالآتي، إذا كان حجم العينة كبيراً بقدر كاف فإنها تحوي علـــى شمعة عاطلة واحدة على الأقل.

سنقتصر في دراستنا في هذا الفصل على المتواليـــات الحـــسابية والمتواليـــات الهندسية. وللمتواليات تطبيقات عديدة منها في مجال حساب القيمة الحالية للقـــروض، وإيجاد أقساط الدفعات المالية.

§2. المتوالية الحسابية:

المتوالية الحسابية هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها، بدءاً مـــن الحـــد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب أو سالب) للمقدار السابق لـــه، يـــسمى المقـــدار

الثابت الذي يضاف لأي حد من حدودها بأساس المتوالية الحسابية ونرمز له بـالحرف d كما نرمز للحد الأول منها بالرمز a.

تسمى المتوالية الحسابية متزايدة إذا كان كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه (أي أنه إذا كان $d > 0$). ونسمي المتوالية الحسابية متناقصة إذا كان أي حد فيها أقل من الحد السابق له (أي أنه إذا كان $d < 0$).

2 ــ 1ــ قانون الحد العام للمتوالية الحسابية:

إن أي حد من حدود متوالية حسابية يساوي إلى حدها الأول $a = a_1$ مضافاً إليه عدد الحدود السابقة له مضروباً بأساس المتوالية d ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالقانون:

$$a_n = a + (n-1)d \quad , \quad n \in N$$

يعطى أساس المتوالية الحسابية بالعلاقة :

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

- كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين المتساويان البعد عنه، أي أن:

$$a_k = \frac{a_{k-n} + a_{k+n}}{2} \, , \; k \in N \; , \; n \in N \; , \; k-n > 0$$

- في كل متوالية حسابية يكون فيها : $a_K + a_\ell = a_n + a_m$ بشرط: $k + \ell = n + m$
- إن كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين السابق واللاحق له، أي أن: $a_K = \dfrac{a_{K-1} + a_{K+1}}{2}$

2ــ2 ــ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الحسابية:

لتكن لدينا المتوالية الحسابية التالية:

$$a_1 = a \, , a_2 = a + d \, , \, a_3 = a + 2d \, , \cdots\cdots\cdots , a_n = a + (n-1)d$$

ونرمز لمجموعها بـ S_n فنكتب:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots\cdots + a + (n-1)d$$

هذا المجموع يمكن كتابة على الشكل التالي وذلك بإعادة ترتيبه بالعكس :

$$S_n = a + (n-1)d + \cdots\cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

بجمع كل حدين متقابلين بالترتيب من المجموعين السابقين نحصل على:

$$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\cdots\cdots\cdots+[2a+(n-1)d]$$

إن عدد الحدود في هذا المجموع n حد وبالتالي يكون:

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

ومنه:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

وهذه العلاقة تمثل مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية حسابية.

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بدلالة الحد الأخير بالشكل التالي:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[a+a_n]}$$

من خلال العلاقة الأخيرة يمكننا حساب مجموع متوالية حسابية بمعرفة حديها الأول والأخير وعدد حدودها.

- اعتماداً على قانون الاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن مجموع أعداد طبيعية متماثلة الأس:

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

أمثلة على المتواليات الحسابية:

مثال:

أوجد عدد الحدود ومجموع متوالية حسابية حدها الأول 0 وأساسها $d=\frac{1}{2}$ وحدها الأخير يساوي 5.

الحل: من نص المسألة نجد أن: $a=0 \;,\; d=\frac{1}{2} \;,\; a_n=5$

باستخدام العلاقة: $a_n = a+(n-1)d$

نجد:

$$n-1=\frac{a_n-a}{d}$$

$$n=\frac{a_n-a}{d}+1$$

$$n=\frac{5-0}{\frac{1}{2}}+1=10+1=11$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{11}{2}(0+5)=\frac{55}{2}=27.5$$

مثـــال:

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحـــدود لمتواليـــة حـــسابية حـــدها الأخيـــر $a_n=55$ و $S_{15}=412.5$ و $a_2+a_5=32.5$.

الحـــل:

انطلاقاً من: $a_2+a_5=32.5$

$$(a+d)+(a+4d)=32.5$$

$$2a+5d=32.5 \qquad (1)$$

ومن الفرض نجد أن: $S_{15}=412.5$

$$\frac{15}{2}(a+a_{15})=412.5$$

$$15a+105d=412.5 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على: $a=10\ ,\ d=2.5$

وبالتعويض في العلاقة:

$n=\frac{a_n-a}{d}+1$ نجد أن: $n=\frac{55-10}{2.5}+1=19$

مثـــال: إذا كانت العلاوة السنوية لراتب مدير مصنع هي 600 ل.س، وكان راتبه في آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 ل.س وإجمالي دخله طوال فترة عمله في هذه الوظيفة هو 10500 ل.س. **والمطلوب:**

احسب قيمة الراتب لمدير المصنع عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

الحـل:

بفرض أن مقدار الراتب عند بداية التعين هي a، ومقدار الزيادة السنوية هي $d = 600$ ، فإن الراتب في السنة الثانية سيكون $a + 600$ والراتب في السنة الأخيرة هو 3300 ل.س وهو يمثل الحد الأخير من متوالية حسابية متزايدة أساسها $d = 600 > 0$.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$3300 = \mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600 \qquad (1)$$

وإن مجموع ما يتقاضاه يمثل مجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$10500 = \frac{\mathrm{n}}{2}[2\mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600] \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن: $a = 3900 - 600n$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$10500 = \frac{n}{2}[2(3900 - 600n) + (n-1)600]$$

بعد الإصلاح نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمتحول n وهي من الشكل:

$$n^2 - 12n + 35 = 0$$

$$(n-7)\cdot(n-5) = 0$$

ومنه نجد أن $n = 7$ أو $n = 5$

من أجل $n = 7$ تكون قيمة $a = -300$ مرفوضة.

ومن أجل $n = 5$ تكون قيمة $a = 900$ مقبولة.

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات ومقدار الراتب عند بداية التعين هو 900 ل.س.

مثـال: أودع محمد مبلغ 1000 ل.س بفائدة بسيطة شهرية % 1 في أحد المصارف. احسب رصيده في نهاية سنة من تاريخ الإيداع.

الحـل: إن المبلغ المودع في بداية السنة وقدره 1000 ل.س يمثل الحد الأول لمتوالية حسابية، حدود هذه المتوالية هي:

$$1000\ ,\ 1010\ ,\ 1020\ ,\ 1030\ ,\ 1040\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

نرى أن أساسها هو $d = 10$. لحساب الرصيد في نهاية السنة نوجد الحد a_{12} :

$$a_{12} = a + (n-1)\cdot d$$
$$= 1000 + (12-1)10 = 1110 \ \ s \cdot p$$

§3. المتوالية الهندسية:

المتوالية الهندسية هي متوالية أعداد، كل حد من حدودها بدءاً من الحد الثـاني يساوي إلى الحد السابق له مضروباً بمقدار ثابت (موجب أو سالب)، نـسمي المقـدار الثابت بأساس المتوالية الهندسية ونرمز له بـالرمز r ، ونرمـز للحـد الأول فيهـا بالحرف a.

يحسب أساس المتوالية الهندسية من العلاقة: $r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \quad , \ n \geq 1$

فمثلا المتوالية: $20\ ,\ 10\ ,\ 5\ ,\ \dfrac{5}{2}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$

هي متوالية هندسية أساسها $r = \dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $a = 20$

يعطى الشكل العام لمتوالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وعدد حدودها n بالشكل الآتي:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\cdots\cdots\cdots,\ a\cdot r^{n-1}$$

3ـ1ـ قانون الحد العام للمتوالية الهندسية:

كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد الأول a مضروباً بأساس المتوالية r المرفوع إلى قوة تساوي إلى عدد الحدود الـسابقة لـذلك الحد. أي أن: $a_n = a \cdot r^{n-1}$

- مربع كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي جـداء الحـدين المتساويين في البعد عنه أي: $a_k^2 = a_{k-n}\ .\ a_{k+n}$
- في كل متوالية هندسية تكون المساواة: $a_k\ .\ a_\ell = a_n\ .\ a_m$ محققة بشرط:

$$k + \ell = n + m$$

- مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

3ـ2ـ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\dots\dots\dots,\ a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots\dots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r:

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots\dots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط: $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتواليــة تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ـ3ـ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{\,a_n\,\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كــان أساســها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|\,r\,| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}\,(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^{\,2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

3ــ2ــ مجموع الحدود الــ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الــ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\cdots\cdots\cdots,\ a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots\dots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بــ r :

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots\dots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط : $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتواليـة تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الــ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ــ3ــ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{\, a_n \,\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كــان أساســها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|\, r \,| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}\,(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

أمثـلة على المتواليات الهندسية:

مثـال: أوجد مجموع الحدود الـ 12 الأولى للمتوالية الهندسية: $4 , -8 , 16 , -32$

الحـل: لدينا $a = 4$ ، $r = -2$ ، $n = 12$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

$$S_{12} = \frac{4(1-(-2)^{12})}{1-(-2)} = -5460$$

مثـال: أوجد الحد الأول ومجموع الحدود العشرة الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a_{10} = 7 \;,\; n = 10 \;,\; r = \frac{1}{2}$$

الحـل: انطلاقاً من العلاقة: $a_n = ar^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_{10} = ar^9$

$$a = \frac{a_{10}}{r^9} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 7.(2)^9 = 3584$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$S_{10} = \frac{3584\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 7161$$

مثـال:

متوالية هندسية مؤلفة من (6) حدود، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي 168 ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة يساوي 21. أوجد حدود هذه المتوالية.

الحـل:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 21$$

أو يمكن كتابتها حسب تعريف المتوالية الهندسية بالشكل التالي:

أو

$$a + ar + ar^2 = 168$$
$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 21$$

$$\mathrm{a}\left(1+\mathrm{r}+\mathrm{r}^2\right) = 168 \qquad (1)$$

$$ar^3\left(1+r+r^2\right)=21 \qquad (2)$$

بتقسيم (2) على (1) نحصل على:

$$r^3=\frac{21}{168}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة $r=\frac{1}{2}$ في المعادلة (1) نحصل على قيمة $a=96$.

والمتوالية المطلوبة هي: 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96

مثـــال:

عبّر عن الكسر العشري المتكرر: $0.232323\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الحـــل:

بحسب التمثيل العشري نستطيع كتابة الرقم $0.232323\cdots\cdots$ بالشكل التالي:

$$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{23}{100}+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots$$

وهذا المجموع يمثل متوالية هندسية لانهائية حـــدها الأول $a=\frac{23}{100}$ وأساســـها $\frac{1}{100}$ ويكون مجموعها S_∞

$$S_\infty=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right)=\frac{23}{99}$$

إذن $$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{99}$$