$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

2- إذا كانت A و B مصفوفتين مثلثيتين عليا(سفلى) لهما نفس المرتبة عندئذٍ تكون المصفوفات:

$AB, BA, A-B, A+B$ مصفوفات مثلثية ، كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً وتكون A^{-1} قطرية وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

3- إذا كانت A مصفوفة قطرية أو مثلثية (عليا أو سفلى) فإن محدد المصفوفة A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي أي أن : $|A|=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

2-7 المجموع المباشر:

إذا كان $A_1, A_2, ..., A_s$ مصفوفات مربعة مرتبة كل منها على الترتيب $m_1, m_2, ..., m_s$ فإن المصفوفة القطرية:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_s \end{bmatrix}=diag(A_1, A_2, ..., A_s) \qquad (17-2)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i

مثال:

إذا كانت:

$$A_1=[2]\ ,\ A_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\ ,\ A_3=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&3\\4&1&-2\end{bmatrix}$$

مصفوفات ، فأوجد المجموع المباشر للمصفوفات A_1,A_2,A_3

الحل:

$$diag(A_1,A_2,A_3)=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&1&2&0&0&0\\0&3&4&0&0&0\\0&0&0&1&2&-1\\0&0&0&2&0&3\\0&0&0&4&1&-2\end{bmatrix}$$

ملاحظة(١٣): إذا كانت $A=diag(A_1,A_2,...,A_n),B=diag(B_1,B_2,...,B_n)$ حيث A_i و B_i من مرتبة واحدة لقيم $(i=1,2,...,s)$ فإن:

$$AB=diag(A_1B_1,A_2B_2,...,A_sB_s)\qquad(18-2)$$

2-8 العمليات على المصفوفات:

1- جمع وطرح المصفوفات:

إذا كانت المصفوفتان: $A=[a_{ij}]$ ، $B=[b_{ij}]$ على حقل واحد K ومن مرتبة واحدة (m,n) فإن:

$$\left.\begin{aligned}C=[c_{ij}]=A_{m,n}+B_{m,n};c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\forall i,j\\D=[d_{ij}]=A_{m,n}-B_{m,n};d_{ij}=a_{ij}-b_{ij};\forall i,j\end{aligned}\right\}\qquad(19-2)$$

مثال:

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\4&0&7\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}5&7&2\\6&1&1\end{bmatrix}$$

فأوجد $A+B\ ,\ A-B$

الحل:

$$C=A+B=\begin{bmatrix}7&10&7\\10&1&8\end{bmatrix}\ ,\ D=A-B=\begin{bmatrix}-3&-4&3\\-2&-1&6\end{bmatrix}$$

ملاحظة(14): إن عملية جمع المصفوفات على الجملة $M_{(m,n)}(K)$ هي عملية داخلية تتصف بما يلي:

1) المصفوفة الصفرية $0_{m,n}$ عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $0+A=A+0=A$.

2) عملية الجمع تجميعية: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3) لكل مصفوفة نظير بالنسبة للجمع هو $(-A)$ حيث: $A+(-A)=(-A)+A=0$.

4) عملية الجمع تبديلية: $A+B=B+A$.

ومنه فإن الجملة $M_{(m,n)}(K)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

كذلك إذا كانت $\forall\lambda,\mu\in K\ \&\ A,B\in M_{(m,n)}(K)$ فإن:

5) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda A+\mu A$

6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

لنثبت صحة (6) :

$$\lambda(A+B)=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij})]=[\lambda a_{ij}]+[\lambda b_{ij}]=\lambda[a_{ij}]+\lambda[b_{ij}]=\lambda A+\lambda B$$

2- **ضرب المصفوفات:**

لتكن $A=[a_{ij}]\in M_{n,m}(K)$ ، $B=[b_{ij}]\in M_{m,l}(K)$ مصفوفتين ، نعرف جداء المصفوفتين A,B بأنه مصفوفة جديدة C معرفة بالشكل التالي:

$$C=A\cdot B=[c_{ij}]\in M_{n,l}(K) \qquad (20-2)$$

وعناصر المصفوفة C معرفة كما يلي:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\cdot b_{kj};\forall i,j \qquad (21-2)$$

أي أن كل عنصر c_{ij} من عناصر مصفوفة الجداء يساوي مجموع جداءات العناصر الواقعة في الصف i من المصفوفة A بعناصر العمود j من المصفوفة B.

أي أنه لإجراء عملية الضرب ، يجب أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ونقول إن B قابلة للضرب في A من اليسار (أي لحاصل ضرب مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان متوافقتين بالنسبة لعملية الضرب).

مثال:

لتكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -2\end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $C = A \cdot B$

الحل:

$$C = C_{31} = A_{33}\cdot B_{31} = \begin{bmatrix}(-2)(1)+1(-1)+4(-2)\\ 1(1)+2(-1)+3(-2)\\ 0(1)+1(-1)+(-1)(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ c_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-11\\ -7\\ 1\end{bmatrix}$$

حيث:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (-2)(1) + 1(-1) + 4(-2) = -11$$

وبشكل مشابه بالنسبة لـ c_{21} ، c_{31}.

ملاحظة(15): عملية الضرب في المصفوفات غير تبديلية.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 3\end{bmatrix}$$

إن:

$$A\cdot B = 2(1)+1(4)+3(3) = 15$$

لكن:

$$B\cdot A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 8 & 4 & 12\\ 6 & 3 & 9\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $A\cdot B \neq B\cdot A$

2–9 قوانين هامة:

1) $A(B+C) = AB + AC$

2) $(A+B)C = AC + BC$

3) $A(BC) = (AB)C = ABC$

4) $AB \neq BA$ (بشكل عام)

5) $kA = [ka_{ij}]$ (k ثابت)

6) $k(A \pm B) = kA \pm kB$

7) $(k_1 \pm k_2)A = k_1A \pm k_2A$

8) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

9) $I\cdot A = A\cdot I = A$

10) $0\cdot A = A\cdot 0 = 0$

لنثبت صحة (1):

بفرض: $A=[a_{ij}]_{n,m}\quad,\quad B=[b_{ij}]_{m,l}\quad,\quad C=[c_{ij}]_{m,l}$

فإن: $(B+C)_{m,l}=[b_{ij}+c_{ij}]_{m,l}$

$$A(B+C)=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(b_{kl}+c_{kl})\right]=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kl}+\sum_{k=1}^{m}a_{ik}c_{kl}\right]=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kl}\right]+\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}c_{kl}\right]=AB+AC$$

وبشكل مشابه يمكن إثبات بقية القوانين.

ملاحظة(16): إذا كان $AB=0$ فهذا لا يعني أن أي من المصفوفتين A أو B يجب أن تكون مصفوفة صفرية (جداء مصفوفتين يمكن أن يساوي المصفوفة الصفرية دون أن يكون أي منهما مصفوفة صفرية).

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2\\1&1&1\\3&3&3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&4\\-4&-1&-3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2+6-8&4-2-2&-2+8-6\\1+3-4&2-1-1&-1+4-3\\3+9-12&6-3-3&-3+12-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

ملاحظة(17): يمكن التحقق من صحة عملية الضرب إذا أخذنا الترتيب التالي لمجموع الصفوف ومجموع الأعمدة.

مثال:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&3&2\\4&2&5\end{bmatrix}_{(2,3)}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\1&2\\3&3\end{bmatrix}_{(3,2)}=\begin{bmatrix}13&14\\25&23\end{bmatrix}_{(2,2)}$$

					B	+
				2	1	3
				1	2	3
				3	3	6
A	2	3	2	13	14	27
	4	2	5	25	23	48

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الصفوف:

$$3(2)+3(3)+6(2)=27$$
$$3(4)+3(2)+6(5)=48$$

				B	
				2	1
				1	2
				3	3
	2	3	2	13	14
A	4	2	5	25	23
	6	5	7	38	37

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الأعمدة:

$$6(2)+5(1)+7(3)=38$$
$$6(1)+5(2)+7(3)=37$$

3- **قسمة المصفوفات:** إن العملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا كانت B^{-1} موجودة فإن العملية AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي المعرفة في المصفوفات وعليه فإن كان المطلوب حل المعادلة $AX=B$ في المتغير x فإنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $X=A^{-1}\cdot B$.

4- **تجزئة المصفوفات للعمليات المختلفة:** يمكن تقسيم أو تجزئة المصفوفة إذا كانت مرتبتها كبيرة وذلك إلى مصفوفات جزئية ، ويمكن استخدام هذه التجزئة في العمليات المختلفة على المصفوفات.

أمثلة:

1-

$$A=[a_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$$

وأيضاً:

$$B=[b_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22}\end{array}\right]$$

مثلاً عملية الجمع تتم بالشكل:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hdashline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{array}\right]$$

وعملية الضرب كالتالي:

$$A\cdot B=\left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{array}\right]$$

2- لنأخذ المصفوفة التالية:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right]$$

من خلال التقسيم حصلنا على المصفوفات الجزئية التالية:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, A_{13}=\begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, A_{23}=\begin{bmatrix} a_{36} \\ a_{46} \end{bmatrix}$$

3- احسب الجداء $A\cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ \hdashline -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}8 & 35\\ 1 & 19\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

4- احسب الجداء $A\cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\;,\;\; B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3 & 3\\ 7 & 5 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3 & 3\\ 7 & 5 & 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 4 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

2-10 تعريف المحدد من المرتبة الثانية:

بفرض لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad (22-2)$$

يعرف محدد هذه المصفوفة من المرتبة 2×2 على أنه القيمة العددية التالية:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \qquad (23-2)$$

أي أن محدد مصفوفة من المرتبة الثانية يساوي حاصل جداء عنصرا قطرها الرئيسي مطروحاً منه حاصل جداء عنصري قطرها الثانوي.

2−11 فك المحدد عن طريق العوامل:

2−11−1 المتمم الجبري (عامل عنصر): بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، نسمي صغير العنصر a_{ij}

مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز A_{ij} ويكون :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} \qquad (24-2)$$

مثال:

بفرض لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن صغير العنصر 4 هو $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ وعدد هذه الصغائر تسعة ذات المرتبة 2×2

والمتمم الجبري (عامل العنصر) هو $A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$.

ملاحظة(18): بفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من المرتبة n وأن هاتين المصفوفتين تختلفان فقط في عناصر الصف الذي رقمه i وفيما عدا ذلك فهما متماثلتان عندئذٍ : تكون المتممات الجبرية لعناصر هذا الصف واحدة في هاتين المصفوفتين.

2−12 المحدد من المرتبة الثالثة:

بفرض لدينا المصفوفة المربعة من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (25-2)$$

إن محدد المصفوفة يكتب بالشكل التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (26-2)$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

وتسمى طريقة لابلاس أي نشر المحدد من المرتبة الثالثة بدلالة ثلاثة محددات من المرتبة الثانية.
أو حسب طريقة ساروس لحساب قيمة محدد من المرتبة الثالثة بالشكل التالي:

نضيف العمودين الأول والثاني من المصفوفة إلى يمين المحدد ثم نقوم بجمع جداءات عناصر أقطارها الرئيسية مطروحاً منه مجموع جداءات عناصر أقطارها الثانوية.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (27-2)$$

$$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})$$

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة تطبق على المحددات من المرتبة 3 .

2-13 تعريف محدد أي مصفوفة من أي مرتبة n .

محدد المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ **من المرتبة** $n \times n$ يتم حسابه وفق أي صف أو **أي** عمود نختاره وذلك بضرب كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) في متممه الجبري (عامله) ثم جمع حواصل الضرب.

1- من الصف i $\quad |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

2- من العمود j $\quad |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنحسب قيمة محدد هذه المصفوفة وذلك بحسب عناصر الصف الأول:

$$|A| = (1)A_{11} + 3A_{12} + (-1)A_{13} = 1(-4) + 3(8) + (-1)(2) = 18$$

ملاحظة(19): عند فك المحدد تؤخذ قاعدة الإشارات في الاعتبار عند أخذ قيمة العنصر وهي القاعدة التي تحل محل $(-1)^{i+j}$ الموجودة في تعريف المتمم الجبري (العامل).

مثال:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 6 + 4 = 16$$

يمكن اختيار الصف (أو العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وذلك لسهولة الحساب

2-14 خواص المحددات:

1- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكان عناصر أحد صفوف (أو أعمدة) المصفوفة أصفاراً ، فإن قيمة محددها تكون صفراً .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

2- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n و B مصفوفة مربعة ناتجة عن المصفوفة A بتبديل وضعي صفين (أو عمودين) مع المحافظة على باقي الصفوف (الأعمدة) فإن:

$$\det A = -\det B \quad \text{أو} \quad |A| = -|B| \quad (28-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 17, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -17$$

3- إذا حوت المصفوفة المربعة A من المرتبة n صفين (عمودين) متساويين أو متناسبين فإن محدد هذه المصفوفة يساوي الصفر.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

4- إذا ضربنا جميع عناصر أحد الصفوف (أحد الأعمدة) في مصفوفة مربعة من المرتبة n بعدد ثابت λ فأن محدد المصفوفة الناتجة يساوي إلى محدد المصفوفة الأصلية A مضروباً بالعدد الثابت λ.

الإثبات:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda a_{11})(a_{22})-(\lambda a_{12})(a_{21})=\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda|A| \qquad (29-2)$$

حيث: $A=[a_{ij}]_{(2,2)}$.ويمكن البرهان على ذلك من أجل أي مرتبة n.

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=70=\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

5- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن مجموع جداءات عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) بالمتممات الجبرية لعناصر صف آخر (عمود آخر) يساوي الصفر.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-5$$

إذا أخذنا جداءات عناصر الصف الأول بالمتممات الجبرية لعناصر الصف الثاني نجد:

$$2(-1)(3)+1(7)+1(-1)=0$$

6- إن :

$$|\lambda A|=\lambda^n|A| \qquad (30-2)$$

حيث n مرتبة المصفوفة A.

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 8 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 2\end{vmatrix}=(2)^3\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=280$$

7- لا تتغير قيمة محدد مصفوفة مربعة A من المرتبة n إذا أضفنا إلى عناصر أحد صفوفها العناصر المقابلة لها من صف آخر بعد ضربه بعدد ثابت.