الأعداد العقدية :

I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

1. تقديم:

مجموعة الأعداد العقدية رمزها $\mathbb{C}$ و تحقق الشروط التالية:

i. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

ii. عمليتيا الضرب و الجمع في $\mathbb{C}$ تمددان عمليتي الضرب و الجمع في $\mathbb{R}$ ، و لهما نفس الخاصيات ما عدا تلك التي تتعلق بالترتيب.

iii. المجموعة $\mathbb{C}$ تحتوي على عنصر تخيلي رمزه i و يحقق المعادلة $i^2 = -1$

iv. كل عدد حقيقي يكتب بصفة وحيدة على شكل $z = a + ib$ حيث a و b عددين حقيقيين.

2. الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

- الكتابة $z=a+ib$ حيث a و b عددين حقيقين تسمى **الكتابة الجبرية** للعدد العقدي z .
- العدد الحقيقي a يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي z و نكتب $\mathrm{Re}(z)=a$.
- العدد الحقيقي b يسمى **الجزء التخيلي** للعدد العقدي z و نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$.

مصطلحات:

- كل عدد عقدي يكتب على شكل ib يسمى **عددا تخيليا صرفا**.
- مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة يرمز لها بالرمز $i\mathbb{R}$ أي $i\mathbb{R}=\{ib/b\in\mathbb{R}\}$.

3. تساوي عددين عقدين:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ عددين مكتوبين على شكليهما الجبري،

لدينا:

$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ و } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$$

4. التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

a. نشاط 5 ص 101.

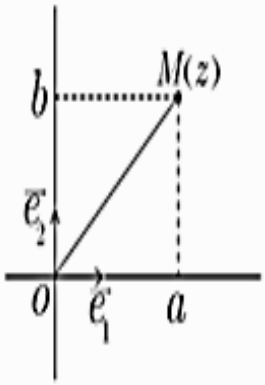
b. تعريف:

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$



c. خاصية:

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما Z_A و Z_B على التوالي، فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي $Z_B - Z_A$.

II. العمليات الجبرية و تأويلاتها الهندسية:

1. لحق منتصف قطعة:

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما Z_A و Z_B على التوالي، فإن لحق النقطة I، منتصف القطعة [AB] هو العدد العقدي: $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$.

2. استقامية ثلاث نقط:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي، ألحاقها Z_A و Z_B و Z_C على التوالي،
تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان: $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \in \mathbb{R}$.

3. تداور نقط:

A(a) و B(b) و C(c) و D(d) أربع نقط غير مستقيمية و مختلفة مثنى مثنى،
تكون النقط A و B و C و D متداورة إذا وفقط إذا كان:
$\frac{d-a}{b-a} \times \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$

مثال تطبيقي:

بين أن النقط O و A(-2i) و B(2) و C($\sqrt{2}$ +1-i) متداورة و استنتج كيفية انشاء النقطة C.

4. منصف زاوية:

a. تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي a=2-2i و b=-1+7i و c=4+2i و d=-4-2i

1. حدد e لحق النقطة E منتصف القطعة [AB]

2. أحسب $\frac{a-e}{d-e}$ ثم $\frac{c-e}{a-e}$.

3. ماذا يمثل المستقيم (AE) بالنسبة للزاوية $\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC}\right)$.

b. الحل

5. أصابع العدد i:

a. تمرين 3 ص 107

III. مرافق عدد عقدي:

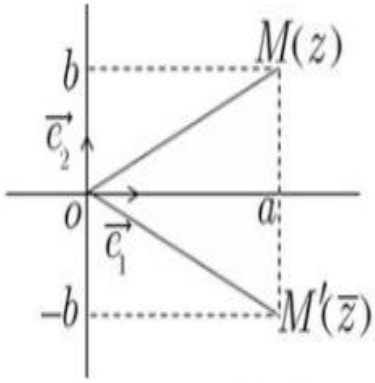
1. تعريف:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\bar{z} = a - ib$

2. التأويل الهندسي:

نضع z=x+iy.



$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

4. نتائج:

ليكن z=x+iy حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا، لدينا:

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

5. خاصية:

لكل z عدد عقدي، لدينا:

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

6. المرافق و العمليات:

ليكن z و z' عددين عقدين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم، لدينا:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$

7. تمارين:

a. **تمرين تطبيقي: تمرين 1 ص 109.**

b. **تمرين 1:**

حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون: $\frac{z+2i}{z-4i}$ حقيقيا.

c. **تمرين 2:**

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $T = z^2 - \overline{z}$ عددا حقيقيا.

IV. معيار عدد عقدي

1. نشاط 8 ص 102.

2. تعريف:

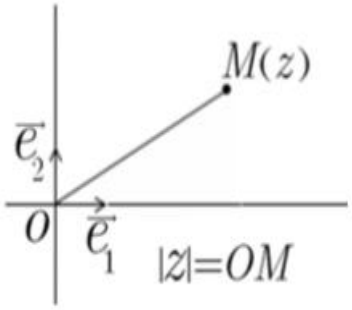
ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. التأويل الهندسي:

لتكن M(z) النقطة الصورة للعدد العقدي z=a+ib حيث a و b عددان حقيقيان،

لدينا: $|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$



4. نتيجة:

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما على التوالي Z_A و Z_B ،

لدينا: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |Z_B - Z_A|$

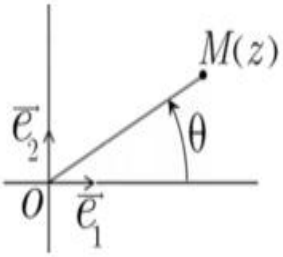
5. خاصيات:

لكل عددين عقدين z و z'، لدينا:

$\left\|z^n\right\| = \|z\|^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$
$\|-z\| = \|z\|$	$\|\overline{z}\| = \|z\|$
$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$

V. عمدة عدد عقدي

1. تعريف:



ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $\left(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta [2\pi]$

ملاحظة:

العدد 0 ليس له عمدة.

2. نتائج مباشرة:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم،

لدينا:

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

3. خاصيات:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم؛

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z \ [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \ [2\pi]$

VI. الشكل المثلثي لعدد عقدي:

1. تعريف:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$

مثال:

حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي: z=1+i

2. تمرين تطبيقي:

3. خاصية:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم؛

إذا كان $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ مع $r \succ 0$ فإن $\arg(z) = \theta[2\pi]$ و $|z| = r$

4. تمرين 1 ص 115:

5. تساوي عددين على شكليهما المثلثي:

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين؛ نضع $z = [r, \theta]$ و $z' = [r', \theta']$

لدينا: $z = z' \Leftrightarrow r = r', \theta \equiv \theta'[2\pi]$

6. تمرين 3 ص 115:

7. جداء و خارج عددين عقديين باستعمال الشكل المثلثي:

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين؛ نضع $z = [r, \theta]$ و $z' = [r', \theta']$

لدينا:

- $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr';\theta+\theta']$
- $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$
- $-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$
- $[r,\theta]^n=[r^n;n\theta]$
- $\frac{1}{[r';\theta']}=\left[\frac{1}{r'};-\theta'\right]$
- $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$

8. خاصية:

z عدد عقدي؛

$$\forall n\in\mathbb{N}$$
$$(\cos\theta+i\sin n\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

9. تطبيق:

a. تمرين 1:

أوجد معيار و عمدة للعدد العقدي $z=\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

b. تمرين 2:

نضع $z=\sqrt{3}-1$ و z'=1-i و $u=\frac{z}{z'}$

1. أكتب الأعداد على شكلها المثلثي.
2. أكتب u على الشكل الجبري و استنتج $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$

VII. الشكل الأسي لعدد عقدي:

1. ترميز:

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث عدد حقيقي، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ .

أي: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=[1,\theta]$

2. أمثلة:

a. $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$

b. $e^{i\pi} = -1$

c. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

d. $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. ملاحظات:

لكل عدد حقيقي θ ؛

لدينا: $\arg(e^{i\theta}) \equiv \varphi[2\pi]$ و $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

4. خاصيات:

لكل عدد حقيقين θ و θ'؛

لدينا:

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

5. حساب $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ باستعمال صيغة موافر:

a. تطبيق 1:

بين أن:

- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta) = \cos^2 - \sin^2(\theta)$
- حدد بنفس الطريقة $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

b. تعريف:

z عدد عقدي غير منعدم معياره r و عمدته θ؛

الكتابة $z = re^{i\theta}$ تسمى الكتابة الأسية لـ z.

أمثلة:

- الكتابة الأسية للعدد 1+i- هي : $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- الكتابة الأسية للعدد 3i- هي: $-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

تحقق من ذلك

6. صيغتا أولير (EULER):

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$
$$\text{و}\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

VIII. زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما:

1. خاصية:

ليكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى، ألحاقها Z_A و Z_B و Z_C و Z_D على التوالي، لدينا:

- $\left(\overrightarrow{e},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(Z_B-Z_A)[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\equiv\arg(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A})[2\pi]$

2. تطبيقات:

ليكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى، ألحاقها Z_A و Z_B و Z_C و Z_D على التوالي، لدينا:

a. استقامية ثلاث نقط:

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان:

$$\arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})\equiv\pi[2\pi]\ \text{أو}\ \arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})\equiv0[2\pi]$$

b. توازي مستقيمين:

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان:

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv \pi[2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv 0[2\pi]$$

c. تعامد مستقيمين:

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين إذا وفقط إذا كان:

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

d. تمرين:

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: a=-2 و b=1+i و c=-1-3i؛

1. حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$
2. استنتج طبيعة المثلث ABC .

IX. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$:

1. المعادلة $z^2 = a$ حيث a عدد حقيقي غير منعدم:

a. خاصية:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم، حلا المعادلة $z^2 = a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:

- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان $a > 0$.
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a < 0$.

b. أمثلة:

- حلا المعادلة $z^2 = 7$ هما $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$
- حلا المعادلة $z^2 = -3$ هما $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

2. المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث أعداد a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم:

a. خاصية:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$	$\Delta > 0$	$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

b. نتائج:

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ ، لدينا:

لكل z من $\mathbb{C}$: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

c. تمرين تطبيقي (سلسلة التمارين):

x. الصيغة العقدية للتحويلات الاعتيادية:

1. الازاحة:

نعتبر الازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(a)$ و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث t(M)=M';

خاصية:

الصيغة العقدية للازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(a)$ حيث a عدد عقدي هي **z'=z+a**، و نقول النقطة M' صورة النقطة M بالازاحة t .

مثال: الصيغة العقدية للازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(1-i)$ هي z'=z+1-i

2. التحاكي:

نعتبر التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث h(M)=M';

خاصية:

Ω نقطة من المستوى لحقها ω من $\mathbb{C}$ و k عدد حقيقي غير منعدم؛

الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k حيث هو $z'-\omega=k(z-\omega)$ ، و نقول النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h .

مثال: الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه $\Omega(3-2i)$ و نسبته 4 حيث هو $z'=\frac{1}{2}z-2i$ ،

3. الدوران:

نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته θ و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث R(M)=M'.

خاصية:

O نقطة من المستوى لحقها ω من $\mathbb{C}$ و θ عدد حقيقي غير منعدم.

الصيغة العقدية للدوران R الذي مركزه O و زاويته θ هو و نقول النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R.

مثال: الصيغة العقدية للدوران R الذي مركزه O أصل المعلم و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ هو: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times z$