وبالتعويض في أحد المعادلتين أعلاه، نحصل على قيمة X_1 كما يلي :

$$4X_1 + 10(2) = 40$$

$$4X_1 + 20 = 40$$

$$4X_1 = 40 - 20$$

$$4X_1 = 20$$

$$\therefore X1 = \frac{20}{4} = 5$$

∴ إحداثيات النقطة ب هي (5.2) .

وبنفس الطريقة تحسب إحداثيات النقطة (جـ) من خلال تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (3) حيث نحصل على (3.4)، بذلك يكون التعريف في دالة الهدف كما يلي :

$$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$$

أ .	(10.0)	$Z = 5\ (10) + 8\ (0) \rightarrow 50$
ب.	(5.2)	$* Z = 5\ (5) + 8(2) \rightarrow 41$
جـ .	(3.4)	$Z = 5\ (3) + 8(4) \rightarrow 47$
د .	(0.10)	$Z = 5\ (0) + 8\ (10) \rightarrow 80$

ومن ذلك يتضح أن على دار الحضانة التعاقد للحصول على 5 وحدة من المنتج رقم (1) و (2) وحدة من المنتج رقم (2) حيث عند هذه الكميات من الإنتاج سوف تكون كمية الفيتامينات المكتسبة من قبل الأطفال أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج سوف تكون أقل ما يمكن وهي 41 وحدة نقدية، وهذه النتائج تعبر عن الحل الأمثل للمشكلة.

2.4.5 الطريقة الجبرية Algerbric Method :

أن هذه الطريقة هي من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري وفق احتمالات القيم المتوقعة للمتغيرات (X_2, X_1) وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المتغيرات في النموذج الرياضي اثنين فقط، وهي لا تتطلب أي رسم عند تحديد الحلول الممكنة والحل الأفضل والحل الأمثل للمشكلة. الفكرة الأساسية

لهذه الطريقة تقوم على أساس تقسيم المتغيرات إلى نوعين :

1- المتغيرات الأساسية Basic Variables وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم المشكلة وذلك لكون قيم هذه المتغيرات عادة أكبر من الصفر، أي أن :

$Xj > Si > 0$

2- المتغيرات غير الأساسية Non - Basic Variables وهي تلك المتغيرات التي ليس لها دور مهم في المشكلة وتكون قيم هذا المتغيرات عادة مساوية إلى الصفر، أي أن: $Si = 0$ ، $Xj = 0$.

من المبادئ الأخرى التي تعتمد عليها هذه الطريقة هي إضافة المتغيرات الراكدة (+S) في تحويل الصيغ الرياضية للمتباينات إلى معادلات رياضية ثابتة.

لتوضيح فكرة هذه الطريقة نعتمد نفس المثال الذي ورد في حالة الطريقة البيانية وذلك كما يلي :

$$1 \; .... \; 2X_1 + 4X_2 \leq 40$$

$$2 \; .... \; 6X_1 + 3X_2 \leq 60$$

$$Z = 8X_1 = 5X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يتم إضافة المتغيرات الراكدة Slack Variables (+s) ذلك

$$2X_1 + 4X_2 + S_1 = 40$$

$$6X_1 + 3X_2 + S_2 = 60$$

$$Z = 8X_1 + 5X_2 = 0.5_1 + 0.5_2 \rightarrow Max$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

بعد أن تم تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة المستقرة التي هي الصيغة القياسية (Standard Form) تتم بعدها عملية في إطار جدول خاص لذلك وكما يلي : د

رقم المحاولة	المتغيرات غير الأساسية Non -Basic Variable Xj >0 , Si> 0		المتغيرات الأساسية Basic Variables Xj=0 , Si = 0		قيمة دالة الهدف
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 40$	$S_2 = 50$	$Z = 0$
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 10$	$S_2 = 20$	$Z = 50$
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 20$	$S_1 = -40$	$Z = 100$ تهمل
4	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 10$	$S_1 = 20$	$Z = 80$
5	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 20$	$S_2 = -60$	$Z = 140$ تهمل
*6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 6.7$	$X_2 = 6.7$	$Z = 87.1$

يلاحظ من الجدول رقم (5-3) أن النتائج في المحاولة الثانية والمحاولة الخامسة قد أهملت بسبب كون قيمة المتغير (S) كانت سالبة وهذا يتعارض مع شرط اللاسلبية ($Si \geq 0$). وعلى هذا الأساس تم اختيار الحل الأمثل من بين المتبقية، حيث كانت في آخر محاولة وهي مشابهة لما تم التوصل إليه بطريقة الرسم البياني.

3.4.5 الطريقة المبسطة Simples Method :

أن مبتكر هذه الطريقة هو العالم الرياضي Dantzig وذلك في عام 1947 وتعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق التي يتم اعتمادها في حل مشاكل البرمجة الخطية، وذلك لكونها تعالج ذلك النوع من المشاكل التي يكون فيها عدد كبير من المتغيرات (اثنين فأكثر). إن فكرة هذه الطريقة هي إيجاد الحل للمشكلة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي) في مراحل متسلسلة. يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسينه وذلك لايجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه ❖ لأكثر من مرحلة واحدة. وفي المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل.أن هذه المراحل من عمليات لحل تتم في إطار جدول خاص لذلك يعرف باسم (جدول السمبلكس Simplex Table) كما هو واضح في الجدول

(*) تم الحل وفق طريقة الحل الآني أو ما يعرف بحل المعادلات الآنية.

رقم (5-4). في المرحلة الأولى من الجدل المذكورة يتم إدخال كافة البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي. ويفترض في النموذج المذكور أن يكون مكتوباً بالصيغة القياسية Standard Form ، وبعد أن يتم نقل البيانات بشكل كامل يتم بعدها إجراء عمليات حسابية معينة على مثال تطبيقي. ومن الجدير بالذكر هنا أن الحل الذي يتم الحصول عليه في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس

جدول رقم (5-4) الصيغة العامة لجدول السمبلكس Simplex Table

المتغيرات Xj Variables Si		X_1	X_2	X_3	....	X_n	S_1	S_2	.....	S_m	قيمة المتغير الأساس bi (الحل)
Cj معامل المتغيرات في دالة الهدف											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											
(cj - zj)											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											
(cj-zj)											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											
(cj-zj)											

جدول الحل (الأولي) الابتدائي

قيمة دالة الهدف

الجدول الثاني

قيمة دالة الهدف

وهكذا ...

الجدول الأخير (الحل الأمثل)

قيمة دالة الهدف

يقع في نقطة الأصل، حيث تكون كل قيم المتغيرات ($x_1, x_2, \ldots x_n$) مساوية للصفر، في حين تكون قيم المتغيرات الراكدة ($s_1, s_2, \ldots, s_m$) تساوي القيم الواقعة إلى الجهة اليمنى من العلاقات الرياضية والتي هي موجودة في جدول السمبلكس تحت اسم (قيمة المتغير الأساس bi).

أن خطوات حل مشكلة تكون فيها دالة الهدف تصل إلى أعلى ما يمكن (Max)، وأن القيود مكتوبة في حالة (أقل أو يساوي ≤) تختلف بعض الشيء عن الحالة عندما تكون المشكلة فيها دالة الهدف تصل إلى اقل ما يمكن، وأن القيود مكتوبة في حالة. (أكبر أو يساوي ≥) أو خليط من العلاقات (≤ ، = ، ≥). لذلك سوف يتم التمييز بين ما يلي:

أولاً: الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة البسيطة) في حالة تعظيم دالة الهدف.

ثانياً: الحل بطريقة السمبلكس عندما تكون المطلوب تصغير دالة الهدف مع وجود قيود مكتوبة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي)

وفيما يلي مثال يوضح فكرة الحل للمشكلة بطريقة السمبلكس عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف مع وجود قيود تحمل علامة (≤ أقل أو يساوي).

مثال رقم (1):

إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية، ترغب في طرح ثلاث أنواع من المنتجات، وكان لديها نوعين من المواد الأولية البديلة، علماً بأنه يتوفر منها كميات محدودة، وكان الربح المتوقع من بيع كل واحد من هذه المنتجات الثلاث وبقية البيانات موضحة كما في الجدول رقم (5-5).

جدول رقم (5-5) البيانات الأساسية للمشكلة

مقدار المتوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية	المنتج No.3	المنتج No.2	المنتج No.3	المنتجات / مستلزمات الإنتاج الأساسية
6 طن	3	1	2	المادة الأولية .I
4 طن	2	4	1	المادة الأولية .II
	1	2	3	الربح المتوقع

المطلوب:

حل المشكلة بطريقة السمبلكس موضحاً كمية المنتج No.1 ، المنتج No.2 ، المنتج No.3 التي تجعل الأرباح المتوقعة أعلى ما يمكن وتحقق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج (المواد الأولية).

الحل:

من أجل حل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة ، وذلك كما يلي :

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Leftarrow X$

$\therefore$ كمية الإنتاج من المنتج No.1 $\Leftarrow X_1$

كمية الإنتاج من المنتج No.2 $\Leftarrow X_2$

كمية الإنتاج من المنتج ..No $\Leftarrow X_3$

مقدار الأرباح الكلية المتوقعة $\Leftarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية القانونية لهذه المشكلة هو كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 \rightarrow \text{Max.}$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

نفرض أن :

$S \Leftarrow$ مقدار مستلزمات الإنتاج(المواد الأولية) غير المستغلة.

$S_1 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية .I غير المستغلة.

$S_2 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية II غير المستغلة.

وعليه فإن الصيغة القياسية بعد إضافة المتغير الراكد (S) سوف تكون كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_2 = 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Max.$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

تنقل بعد ذلك البيانات إلى جدول السمبلكس وعلى النحو التالي :

جدول رقم (5-6) جدول السمبلكس

				X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	
الجدول الأساسي	المتغيرات Xj Variables Si									
	معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف			3	2	1	0	0		
	Basic Variables	$\leftarrow S_1$	0	2	1	3	1	0	6	$6 \div 2 = \boxed{3}$
		$\leftarrow S_2$	0	1	4	2	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
	Zj			0	0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدفZ ←
	(cj - zj)			3	2	1	0	0		
الجدول الثاني	Basic Variables	X_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3	$3 \div \frac{1}{2} = 6$
		$\leftarrow S_2$	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$1 \div \frac{7}{2} = \boxed{\frac{2}{7}}$
	zj			3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	9	حالة الهدف Z←
	(cj-zj)			0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0		
الجدول الثالث والأخير	المتغيرات الأساسية	X_1	3	1	0	10/7	-1/7		20/7	
		X_2	2	0	1	1/7	2/7		2/7	
	Zj			3	2	32/7	10/7	1/7	64/7	قيمة دالة الهدف Z ←
	(cj-zj)			0	0	-25/7	-10/7	-1/7		

من الجدول رقم (5-6) تتضح النتائج التالية :

في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، وهي مرحلة الحل الابتدائي الأساسي الممكن، نقرأ النتائج التالية :

$$\text{المتغيرات الأساسية} \begin{cases} S_1 = 6 \\ S_2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{المتغيرات غير الأساسية} \; \{ X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

وهو يعني أن إدارة المنظمة لم تستغل أي من المواد الأولية المتوفرة والبديلة لذلك لم يتم طرح أي نوع من المنتجات الثلاث، وكانت قيمة دالة الهدف في جدول السمبلكس، التي فيها يتم البدء بتحسين الحل السابق، حيث النتائج التالية :

$$\text{متغيرات أساسية} \begin{cases} X_1 = 3 \\ S_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{متغيرات غير أساسية} \begin{cases} X_2 = X_3 = 0 \\ S_1 = 0 \end{cases}$$

$$Z \Rightarrow 9$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار 3 وحدات، وعدم طرح بقية المنتجات. وهذا القرار سوف يحق الاستغلال الكامل للمادة الأولية الأولى ($S_1=0$) ويبقي على احتياطي من المادة الأولية الثانية بمقدار (1) طن . إن خطة الإنتاج هذه سوف تؤدي إلى تحقيق أرباح بمقدار (9) وحده نقدية.

للتعرف على طبيعة الحل أعلاه الذي تم الحصول عليه، من حيث كونه حل أفضل أو حد أمثل، يتطلب الأمر الرجوع إلى جدول السمبلكس وبالتحديد للحقل ($Cj-Zj$)، وذلك كما يلي :

إذا كانت كل القيم في الحقل المذكور كما يلي :

$$(Cj - Zj) \leq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الأمثل :

وإذا كانت كل أو بعض قيم الحقل المذكور

$$(Cj - Zj) \geq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأفضل، ويتطلب الأمر الاستمرار في عملية النتائج تحسين التي تم الحصول عليها. ولما كان في مثالنا هذا المرحلة الثانية تحقق

الشرط [(cj-zj) ≥0] أي وجود قيمة موجبة، لذلك تم حساب المرحلة الثالثة وكانت فيه كل قيم (cj-zj) هي سالبة وأصفار وهذا يعني أنه تم الحصول على الحل الأمثل، والذي كان كما يلي:

$$\text{متغيرات أساسية}\begin{cases} X_1 = \dfrac{20}{7} & \text{وحدة} \\ X_2 = \dfrac{2}{7} & \text{وحدة} \end{cases}$$

$$\text{متغيرات غير أساسية}\begin{cases} X_3 = 0 \\ S1 = S2 = 0 \end{cases}$$

$$Z \Rightarrow \frac{64}{7} \ \text{وحدة نقدية}$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار $\frac{20}{7}$ وحدة والمنتج رقم (2) بمقدار $\frac{2}{7}$ وحدة، وعدم طرح المنتج رقم (3). وفي ظل هذه الخطة يتم تحقيق حالة الاستغلال الكامل لكل من المادة الأولية الأولى والثانية مع تحقيق أكبر عائد ربح ممكن وهو $\frac{64}{7}$ وحدة نقدية.

وقد تم حساب المراحل الثلاث (مرحلة الحل الأساسي الممكن، مرحلة الحل الأفضل، ومرحلة الحل الأمثل) وفق قواعد العمليات الحسابية التالية:

أولاً: يتحدد المتغير الداخل في أي مرحلة بأنه ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحقل (Cj-Zj) ويسمى المتغير الداخل Entering variable.

ثانياً: العمود الذي يقع فيه المتغير الداخل يسمى العمود المحوري Pirotal clum

ثالثاً: يتحدد المتغير الخارج Learing variable من خلال قسمة القيم الواقعة في عمود قيمة المتغير الأساس (bi) على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري، ويخرج المتغير الذي له أقل قيمة ويصبح متغير خارج، وفي المثال السابق تم تحديد المتغير الخارج كما يلي:

$$S1 \Rightarrow \frac{6}{2}=3$$

$$S_2 \Rightarrow \frac{4}{1}=4$$

لذلك يكون S_1 المتغير الخارج.

رابعاً: الحقل الذي يقع فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري Pirotal Row .

خامساً: العنصر الواقع في نقطة تقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يسمى بالعنصر المحوري Pirotal Element .

سادساً: تنقل كافة البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى من جدول السمبلكس. ويدخل في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس إلى مرحلة الأساس (المتغيرات الأساسية) المتغيرات الراكدة S_2,S_1. حيث توضع أمام كل متغير المعاملات للمتغيرات في القيود. أي أمام المتغير S_1 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الأولى. وأمام S_2 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الثانية. وفي العمود b_i توضع القيم الموجودة في الطرف الأيمن من كل علاقة رياضية. أما في العمود الأخير C_B فإنه توضع فيه معاملات المتغيرات الأساسية S_2,S_1 في دالة الهدف. وفي بقية الحقول تتم عمليات حسابية معينة وذلك على النحو التالي:

1. تحسب القيم (Zj) ، (cj-zj) ، z كما يلي:

$$Z_j \Rightarrow C_B * P_j$$

حيث أن:

$C_B \Leftarrow$ معامل المتغيرات الأساس في دالة الهدف.

$P_j \Leftarrow$ عمود القيم الواقعة تحت المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

$(c_j = z_j) \Leftarrow$ تحسب هذه القيمة من حاصل طرح القيم التي تم إيجادها في أعلاه Z_j من معاملات المتغيرات في دالة الهدف والتي يرمز لها C_j.

وفي مثالنا السابق تم حساب القيم المذكورة في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس كما يلي:

Cj	-	Zj		
3	-	0	=	3
2	-	0	=	2
1	-	0	=	1
0	-	0	=	0
0	-	0	=	0

أما القيمة Z قيم حسابها كما يلي :

$$Z \Rightarrow C_B * b_i$$

حيث على سبيل المثال في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس في مثالنا السابق كانت قيمة Z كما يلي :

$$Z \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

2- تحسب القيم في المرحلة التي تلي المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفق عمليات حسابية معينة. حيث تعتمد العمليات الحسابية في المرحلة الثانية على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى. أي بعبارة أخرى لحساب القيم للمتغيرات في المرحلة الثانية ، فإن ذلك يعتمد على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى ، ولحساب قيم المتغيرات في المرحلة الثالثة ، فإن ذلك يعتمد على قيم المتغيرات في المرحلة الثانية وهكذا.

3- في المراحل التالية للمرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، تعطي الأولوية في عمليات الحساب لقيم المتغير الداخل Entering Variable ، حيث تحسب قيم هذا المتغير بقسمة ما يقابلها من قيم في المرحلة السابقة على العنصر المحوري ، وفي مثالنا السابق تم حساب قيم المتغير X_1 في المرحلة الثانية كما يلي :

$$X_1 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1 \; , \frac{1}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2} , \frac{0}{2} = 0 \; , \frac{6}{2} = 3$$

4- قيم المتغيرات الأخرى (غير المتغير الداخل) تحسب وفق العلاقة الرياضية التالية :

$$N_j = K - \frac{M * y}{a_{ij}}$$

حيث أن :

N_j ⇐ القيمة الجديدة المطلوب وضعها في الحقل (j).

K ⇐ القيمة الحالية .

M ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في الصف المحوري.

y ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في العمود المحوري.

a_{ij} ⇐ العنصر المحوري.

وبذلك فقد تم حساب القيم للمتغير S_2 في المرحلة الثانيـة في مثالنا السـابق على النحو التالي :

$$N_1 = 1 - \frac{2*1}{2} = 0$$

$$N_2 = 4 - \frac{1*1}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

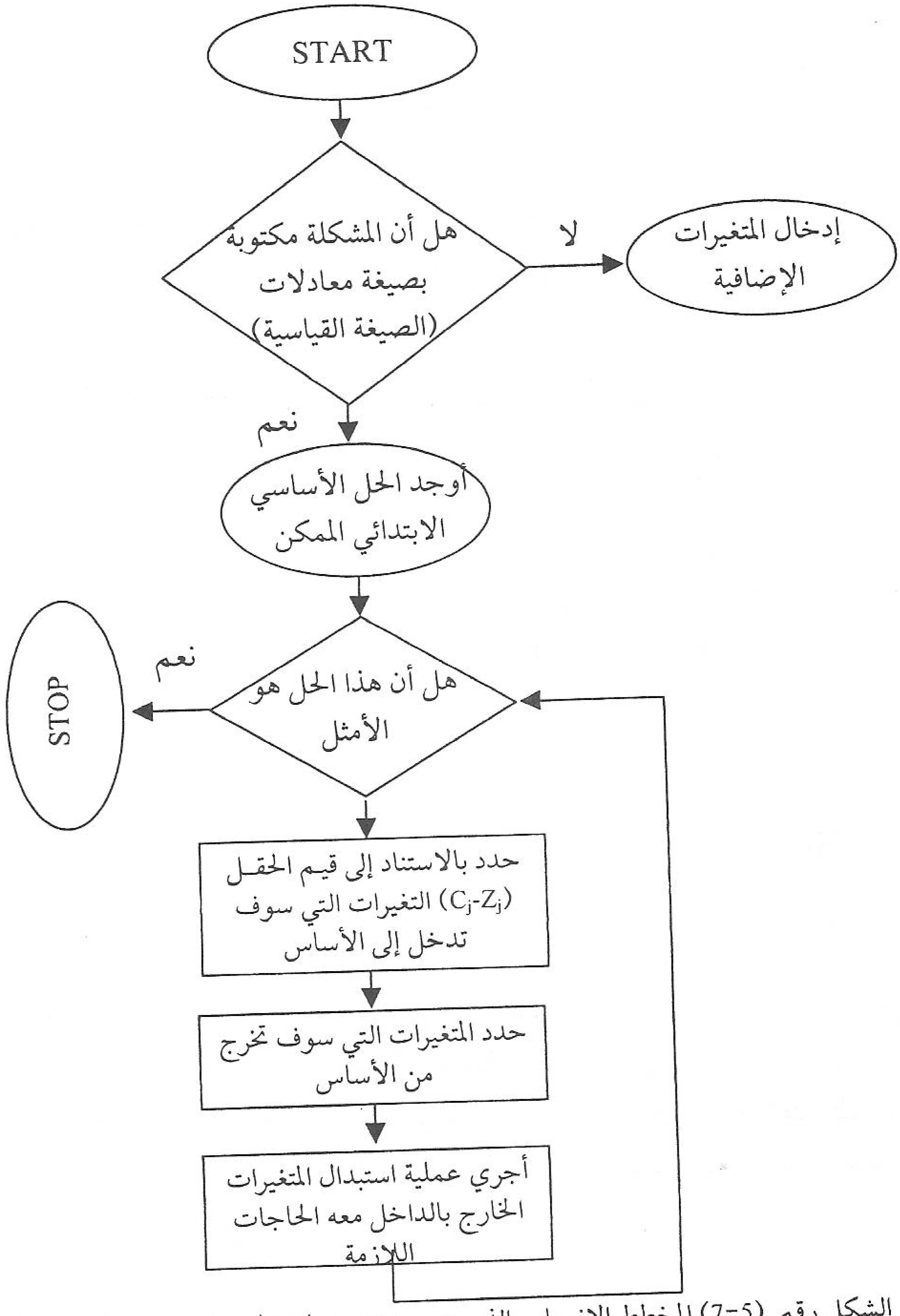
$$N_3 = 2 - \frac{3*1}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 = 0 - \frac{1*1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$N_5 = 1 - \frac{0*1}{2} = -1$$

$$N_6 = 4 - \frac{6*1}{2} = 1$$

أن العمليات الحسابية السابقة ، ينبغي في النهاية أن تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل وذلك ضمن خطوات متسلسلة منطقية كما أشرنا إلى ذلك أعلاه. أن هـذه العمليات ابتدأت من صياغة النموذج الرياضي وكتابته بصيغة معادلات (الصيغة القياسية). لغاية الحصول على الحل الأمثل يمكن التعبير عنها مـن خلال المخطط الانسيابي الموضح بالشكل رقم (5-7).



الشكل رقم (5-7) المخطط الانسيابي الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس

ثانياً: الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) في حالة تصغير دالـة الهدف (Min Z) مع وجود خليط من العلاقات الرياضية (≤ ، = ، ≥) في القيود.

أن بعض المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، يتم التعبير عنها من خلال نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن وتكتب قيود النموذج الرياضي عادة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي) مع وجود بعض الحالات للأنواع الأخرى من القيود التي تحمل العلامات الرياضية (= يساوي ، ≤ أقل ويساوي). أن تحويل هذا النوع من النماذج الرياضية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، يتم بعد أن تضاف ونطرح متغيرات معينة/ وقد سبق أن تم توضيح ذلك في الفصل السابق. أن المتغيرات التي تضاف هي:

1- المتغير الفائض (S) surplus الذي يطرح من الطرف الأيمن للعلاقة الرياضية التي تعبر عن القيود وهذه قد تطرح أو تضاف في معادلة دالة الهدف.

2- المتغير الاصطناعي (R) Artificial variable الذي يضاف إلى القيود وتطرح أو يضاف في دالة الهدف، حيث تظهر هذه المتغيرات في الدالة المذكورة بمعامل كبير جداً يسمى (M - الكبيرة)((1)).

أن حل النموذج الرياضي الذي يحمل المواصفات أعلاه، وتحويله إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات (S+وR, S) يتم وفق اثنين من الطرق الأساسية، وهذه الطرق هي:

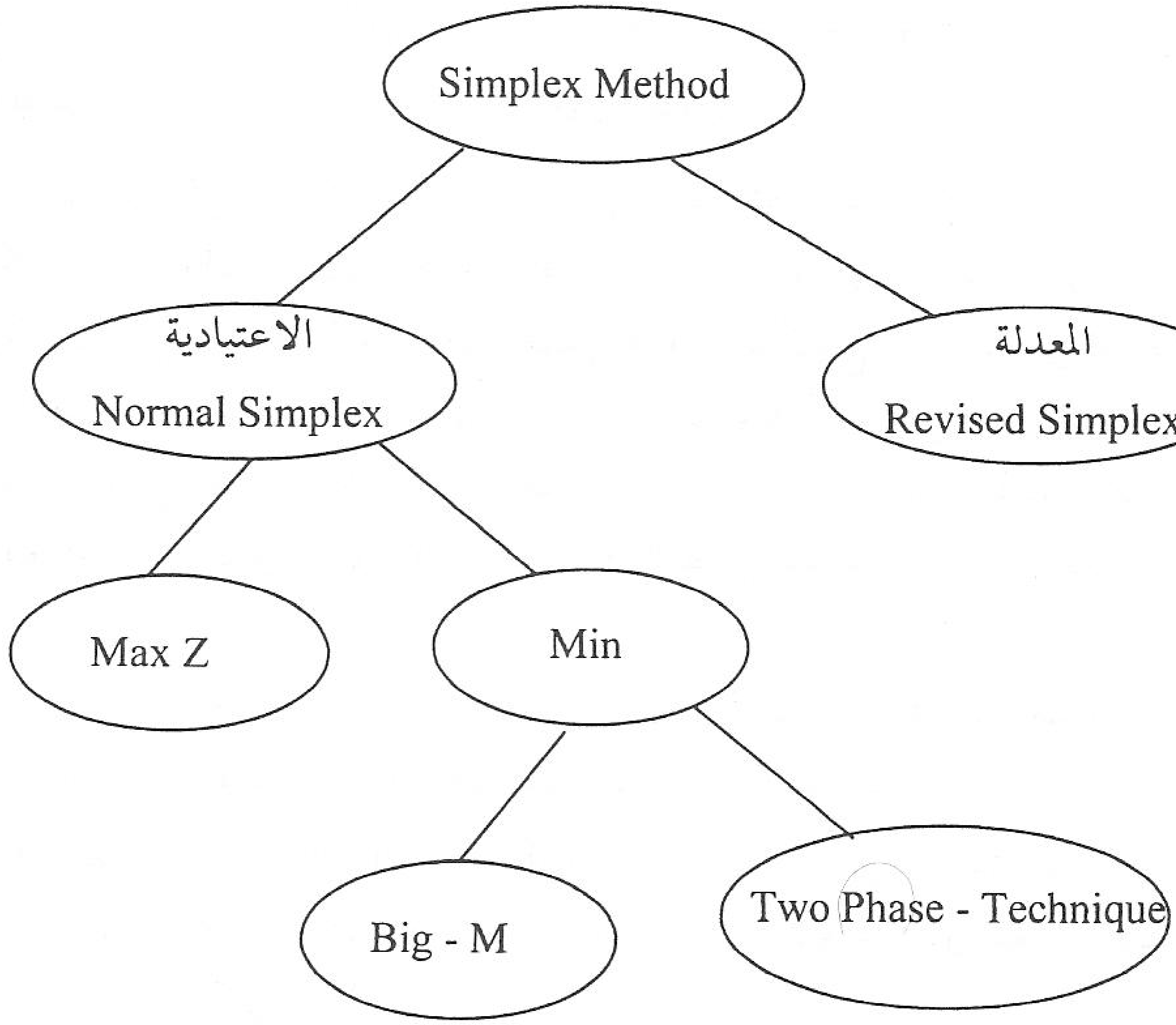
1- طريقة (M - الكبيرة) M- Technique Method.

2- طريقة المرحلتين Two - Phase Technique .

وأن موقع هاتين الطريقتين بالنسبة لطريقة السمبلكس يمكن توضيحهما من خلال الشكل رقم (5-8).

---

(1) لمزيد من التفاصيل راجع الجدول الخاص بإضافة المتغيرات (+S, R_1-S) في الفصل السابق.



شكل رقم (5-8) موقع طريقة M - الكبيرة وطريقة المرحلتين ضمن طريقة السمبلكس

من أجل توضيح فكرة الطريق السابقة ، يتطلب الأمر الاستعانة بأمثلة تطبيقية كما سيرد أدناه.

أولاً : تطبيق طريقة (Big - M) أم الكبيرة.

أن فكرة هذه الطريقة هي إضافة معامل كبير جداً لكل متغير إصطناعي (R) Artificial Variables في دالة الهدف ويحمل هذه المعامل في معادلة الهدف إشارة موجبة في حالة تصغير دالة الهدف وإشارة سالبة في حالة التعظيم ، حيث أن هذه الإضافة لهذا التغير كفيلة بإخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل الأمثل. وفيما يلي مثال يوضح فكرة تطبيق هذه الطريقة.

مثال رقم (1):

النموذج الرياضي التالي يعبر عن أحد المشاكل المستمدة من الواقع العملي لأحد منظمات الأعمال الإنتاجية، والذي يتعلق بطرح نوعين من المنتجات :

$$(1) \quad .... X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$(2) \quad .... 4X_1 + 2X_2 \geq 40$$

$$Z = 2X_1 + X_2 \rightarrow Min$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

حل النموذج الرياضي واستخراج النتائج النهائية لهذه المشكلة مستخدماً طريقة (Big - M).

الحل:

لحل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية تحويل صيغة النموذج الرياضي من الحالة القانونية الغير مستقرة إلى الحالة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (Surplus - S) وإضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables R) وذلك كما يلي :

$$(1) \quad .... X1 + 3X2 \quad S1 + R1 = 30$$

$$(2) \quad .... 4X1 + 2X2 - S2 + R2 = 40$$

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.5\ _1 + 0.5_2 + MR_1 + MR_2 \rightarrow Min$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

$$R_1 , R_2 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

أن عملية الحل تتم من خلال تنظيم جدول السمبلكس، الذي من خلاله تتم العمليات الحسابية كما هو واضح في الجدول رقم (5-7). أن العمليات الحسابية في هذا

الجدول تتم وفق نفس القواعد السابقة عندما تكلمنا عن جدول السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف (Max - Z) ما عدا وجود بعض الاختلافات يمكن إجمالها كما في النقاط التالية أدناه:

1- المتغير الداخل، ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة وذلك في الحقل $(C_j - Z_j)$.

2- يتم الوصول إلى حالة الحل الأمثل إذا كانت كل قيم الحقل $(C_j - Z_j)$ موجبة وأصفار، أي $(C_j - Z_j) \geq 0$.

3- إن قيمة دالة الهدف (Z) في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس تكون أعلى ما يمكن، وبعد ذلك تبدأ في التناقص، حيث تكون في آخر جدول السمبلكس (الذي فيه يكون الحل الأمثل) أقل ما يمكن. وفي مثالنا الحالي، ومن الجدول رقم (5-7) يتضح أن قيمة دالة الهدف المثلى هي 20 وحدة وأن قيم المتغيرات هي:

$X_1 = 6$ وحدة ، $X_2 = 8$ وحدة

جدول رقم (5-7) الحل وفق طريقة (Big M)

المتغيرات Xj Variables Si			X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi	
معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف			2	1	0	0	M	M		
Basic Variables	R_1	M	1	3	−1	0	1	0	30	
	R_2	M	4	2	0	−1	0	1	40	
Zj			5M	5M	−M	-M	M	M	قيمة دالة الهدف Z ←	
(cj - zj)			2-5M	(1-5M)	M	M	0	0	الهدف 70M	
Basic Variables	X_2	1	1/3	1	−1/3	0	1/3	0	10	
	R_2	0	(10/3)	0	2/3	−1	−1/3	1	20	
zj			(1/3+10M/3)	1/3-2M/3	-1/3+3M/3	-M	1/3-M/3	M	قيمة دالة الهدف	
(cj-zj)			(5/3-10M/3)	0	1/3-2M/3	M	-1/3+5M/3	0	10+20M	
Basic Variables	X_2	1	0	1	−3/5	1/10	3/5	−1/10	8	
	X_1	2	1	0	1/5	3/10	−1/5	3/10	6	
Zj			2	1	−1/5	−1/2	1/5	1/5	20	قيمة دالة الهدف Z ←
(cj-zj)			0	0	1/5	1/2	M−1/5	M−1/5		

وفي المرحلة الأخيرة من عملية الحل ، نجد أن قيم المتغيرات X_j هي كما يلي :

$X_3 = 40$	$X_1 = 0$
$X_5 = 20$	$X_2 = 0$
$X_4 = 30$	$X_6 = 0$

وبما أن X_j يمثل عدد البدلات التي يتم الحصول عليها باعتماد بديل القص رقم (j) فإن :

1- اعتماد بديل القص رقم (3) يؤدي إلى الحصول على 40 بدلة رجالية (.A) وذلك لأن المتغير X_3 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (1).

2- اعتماد بديل القص رقم (5) يؤدي إلى الحصول على 20 بدلة شبابية (.B) وذلك لأن المتغير X_5 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (2).

3- اعتماد بديل القص رقم (4) يؤدي إلى الحصول على 30 بدلة رجالية (.C) وذلك لأن المتغير X_4 فإن ضمن العلاقة الرياضية رقم (3).

ولو تم تعويض هذه القيم في المعادلات السابقة لتحقق الشرط المطلوب ألا وهو الحصول على (100) بدلة من كل نوع.

ثانياً: تطبيق طريقة المرحلتين (Two - Phase Technique) :

أن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة كما هو واضح من الاسم يتم على مرحلتين ، وذلك كما يلي :

1- **المرحلة الأولى:** والتي بموجبها يتم تكوين دالة هدف جديدة والتي تعبر عن مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود. وباستخدام طريقة السمبلكس يتم إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (بغض النظر عن الهدف الأصلي للمشكلة)، أما قيود المشكلة فهي نفس قيود النموذج الأصلي.

أن قيم المتغيرات الاصطناعية التي يتم الحصول عليها من هذا النموذج في هذه المرحلة تكون جميعها مساوية للصفر وبهذا نحصل على حلاً أساسياً ممكناً خالياً من المتغيرات الاصطناعية والذي يعتبر حلاً ابتدائياً للمرحلة الثانية.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة نأخذ مثال تطبيقي كما سيرد أدناه.

مثال رقم (1): من أجل التواصل في فكرة طريقة السمبلكس نورد هنا المثال الوارد في حالة تطبيق طريقة (Big - M) وذلك كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: أن عملية الحل في المرحلة الأولى تتم من خلال خطوتين متتابعتين في الخطوة الأولى لعملية حل هذا النموذج الرياضي هي تحويلة من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (surplus) من الجهة اليسرى من القيود وذلك كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 - S_1 \Rightarrow \geq 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 - S_2 \Rightarrow \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$

يلاحظ في النموذج القياسي السابق عدم الحصول على مصفوفة الوحدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identity Matrix ، لذلك يتم إضافة متغيرات اصطناعية كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$
$$R_1 , R_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية : يتم بموجبها صياغة دالة هدف جديدة وذلك على النحو التالي :

$$w = (R_1 + R_2) \rightarrow \text{Min}$$

وفقاً للقيود الواردة أعلاه والمرتبطة بالنموذج الرياضية القياسي يتم حل هذه المشكلة بالجدول رقم (10-5). ويلاحظه في هذا الجدول أن جميع قيم $(c_j\text{-}w_j)$ في المرحلة الأخيرة موجبة وأصفار $(c_j - w_j) \geq 0$.

وهذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل النهائي للمرحلة الأولى ويلاحظه في هذه المرحلة أنه تم استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1,R_2) من الحل الأساسي الممكن وعليه ينبغي الانتقال إلى المرحلة الثانية.

2- **المرحلة الثانية**: حيث يتم بدء الحل في هذه المرحلة بالحل النهائي الأساسي الممكن (الذي هو امتداد للمرحلة الأولى) باستخدام دالة الهدف الأصلية للنموذج الرياضي للمشكلة ، أي أن الجزء الأخير لجدول السمبلكس في المراحل الأولى سوف يعتبر بمثابة الجزء الأول لجدول السمبلكس في المرحلة الثانية مع تغيير في دالة الهدف ، وبعد ذلك يتم تحسين الحل لغاية بلوغ الحل الأمثل النهائي. وفيما توضيح لفكرة هذه المرحلة مع الاستعانة كما ذكرنا بدالة الهدف الأصلية.

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Min$$

والجدول رقم (5-10) يوضح ذلك.

المتغيرات Xj Variables Si		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف		0	0	0	0	1	1		
المتغيرات الأساسية	R_1	1	3	−1	0	1	0	30	1
	R_2	(4)	2	0	−1	1	1	40	1
W_j		5	5	−1	−1	1	1	70	قيمة دالة الهدف ←w
(C_j-W_j)		(−5)	−5	1	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	R_1	0	(5/2)	−1	1/4	1	−1/4	20	1
	X_1	1	1/2	0	−1/4	0	1/4	10	0
W_j		1	5/2	−1	1/4	1	1/4	20	قيمة دالة الهدف ← w
(C_j-W_j)		0	(−5/2)	1	−1/4	0	5/4		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	−2/5	1/10	2/5	−1/10	8	0
	X_1	1	0	1/5	−3/10	1/5	3/10	6	0
W_j		0	0	0	0	0	0	0	قيمة الهدف w
(C_j-W_j)		0	0	0	0	1	1		

جدول رقم (5-11) الحصول على الحل الأمثل

المتغيرات Xj		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj		2	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	-2/5	1/10	8	1
	X_1	1	0	5/1	-3/10	6	2
Z_j		2	1	0	-1/5	20	قيمة دالة الهدف Z
(C_j-Z_j)		0	0	0	1/5		

من الجدول أعلاه يتضح أن جميع قيم الحقل $(C_j - Z_j)$ هي موجبة وهنا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل وبموجب هذا الحل ينبغي على منظمة الأعمال الإنتاجية أن تلتزم بخطة الإنتاج التالية :

X1 = 6 أي طرح المنتج No.1 بمقدار 6 وحدات.

X2 = 8 أي طرح المنتج No.2 بمقدار 8 وحدات.

وبذلك تكون التكاليف الكلية أو النفقات (قيمة Z) أقل ما يمكن وهي 20 وحدة نقدية (Z = 20). وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بموجب طريقة (Big - M) .

5.5 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

في الحالات المختلفة للبرمجة الخطية، يتم التركيز على الحلول المختلفة للمشكلة التي يمكن الحصول عليها عند إتمام عملية الحل. وبالتحديد يتم التدقيق والتمييز بين الأنواع الثلاث من الحلول التي يمكن الحصول عليها وهي ما يلي :

1- الحل الممكن Feasible solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal solution .

أن هذه الحلول الثلاث لا يمكن متابعتها والتمييز بينها إلا من خلال ما يعرف بمنطقة الحلول الممكنة Feasible Region (R). أن هذه المنطقة تظهر من خلال تقاطع المستقيمات التي تعبر عن قيود المشكلة بعضها مع البعض الآخر والذي يعني أيضاً تقاطع المساحة الخاصة بكل مستقيم، بعبارة أخرى أن منطقة الحلول الممكنة (R) ظهرت من تداخل مساحة المستقيم الأول مع مساحة المستقيم الثاني وظهور منطقة

تداخل مشتركة تحقق كل من القيد الأول والقيد الثاني اللذان ساهما في ظهور وتبلور شكل المنطقية (R). وتأسيساً على ما تقدم ومن أجل ضمان تحقق هذا التداخل والتقاطع لابد لنا من ملاحظة القواعد الأساسية التالية :

أولاً: إذا كانت علامة القيد أقل أو يساوي (≤) فإن المنطقة التي تحقق هذا المستقيم تكون متجهة إلى الداخل ، وبذلك فإن كل النقاط الواقعة على المستقيم أو تحته يفترض أن تحقق القيد المذكور.

ثانياً: إذا كانت علاقة القيد ≥ أكبر أو يساوي فإن النقاط التي تحقق هذا القيد سوف تكون واقعة على أو خارج المستقيم الذي يعبر عن القيد المذكور.

ثالثاً: عند تحديد موقع منطقة الحلول الممكنة (R) يؤخذ بنظر الاعتبار ما يلي :

1- في حالة تعظيم دالة الهدف تكون منطقة الحلول محصورة بين المستقيمات المتقاطعة ونقطة الأصل. وقد يظهر استثناء لهذه الحالة بحيث ترتفع منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل من خلال مستقيمات تعبر عن شروط تتعلق بالكمية ، حيث قد لا تبدأ الكمية من الصفر وإنما من مقدار أكبر من ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-9).

شكل (5-9) حالة خاصة لمنطقة الحلول الممكنة (R)