جامعة حماة
كلية الاقتصاد

الأساليب الكمية

مفهوم الأساليب الكمية

يفهم من مصطلح الأساليب الكمية بأنها مجموعة من الأدوات Tools أو الطرق Methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري المزمع اتخاذه بخصوص حالة معينة ، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة. ويتطلب تطبيقها واستخدامها أيضاً تحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر.

وقد عرفها البعض بأنها تلك الأطر الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها. ويتم تدعيم هذه الأطر الرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الآخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة. وبذلك تكون هذه الأطر الرياضية بمثابة الوسيلة أو الأسلوب التي من خلالها يتم معالجة المشكلة في الواقع العملي بعد أن يتم استيعاب معظم متغيراتها وثوابتها بحيث يتم التوصل في النهاية إلى الحل المطلوب لها.

تتصف هذه الأساليب بأن بعضها ذات طابع أو صفة احتمالية والبعض الآخر يتصف في كونه ثابت أو ساكن والبعض الآخر يتصف في كونه متغير بشكل مستمر حسب طبيعة العامل الزمني. إضافة إلى ذلك هنالك تقسيمات وتصنيفات لهذه الأساليب الكمية حسب طبيعة الاستخدام وحسب طبيعة العوامل الداخلة فيها كما سيرد ذلك أدناه.

أنواع الأساليب الكمية:

ضمن المنهج الكمي لإدارة الأعمال يمكن أن نميز بين الكثير من أنواع الأساليب الكميه التي تستخدم من قبل متخذ القرار في مجال ترشيد القرار الإداري أو لغرض حل مشكلة معينة في أحد مجالات إدارة المنشأة من أجل الحصول على الحلول المطلوبة. وفي هذا الصدد يمكن أن يتم الحصول على ثلاثة أنواع من الحلول حسب ما هو وارد في أدبيات المنهج الكمي لإدارة الأعمال وهي :

1- الحل الممكن Feasible Solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal Solution .

أن هذه الأساليب تقع تحت تسميات مختلفة في أدبيات المنهج الكمي إلا أن

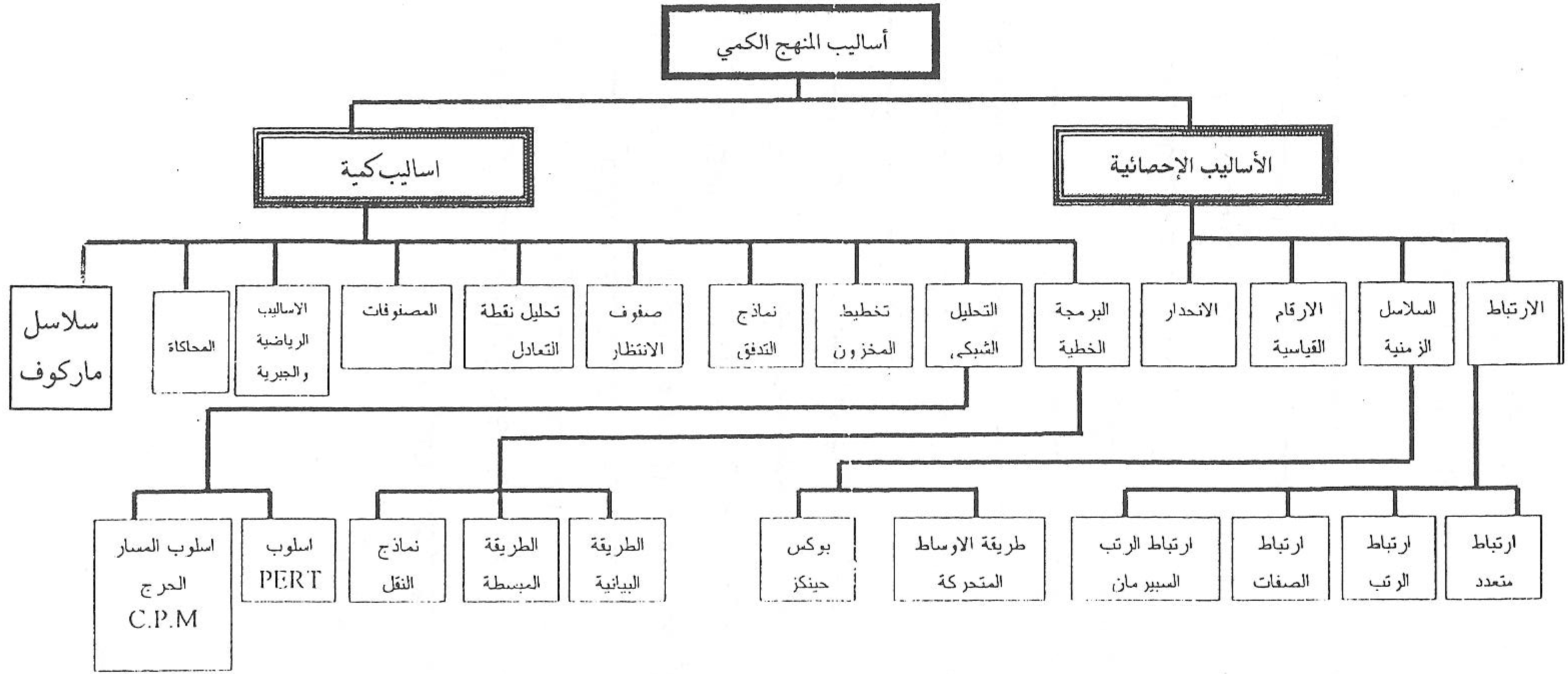
الشائع منها يقع تحت عنوان بحوث العمليات. يضاف إلى ذلك الأساليب الإحصائية كما هو واضح في الشكل رقم (1-1) حيث يتضح في الشكل المذكور ما يلي :

أولاً: أساليب كمية مختلفة :

1. البرمجة الخطية	Linear Programming
2. البرمجة الديناميكية	Dynamic Programming
3. نماذج الخزين	Inventory Models
4. شبكات العمل	Networks
5. نماذج الانتظار	Queuing Models
6. نظرية القرار	Decision Theory
7. المحاكاة	Simulation
8. نظرية الاحتمالات	Probabilities Theory
9. نظرية المباريات	Games Theory
10. الأساليب الرياضى والجبرية	Mathematical & Algebric
11. سلاسل ماركوف	Markov Chians
12. أسلوب المصفوفات	Matrices Methods
13. نماذج التدفق	Transshipment

ثانياً: الأساليب الإحصائية:

1. أسلوب الارتباط.
2. أسلوب الانحدار.
3. نماذج التوقع.
4. المقاييس والاختبارات الإحصائية.



الشكل (1-1) أنواع الأساليب التي يمكن أن تستخدم ضمن المنهج الكمي

البرمجة الخطية Linear Programming

من أجل البدء بخطوات توضح الأفكار المتعلقة باستخدام هكذا نوع من الأساليب يتطلب الأمر في البداية تحديد مفهوم البرمجة الخطية وكذلك مستلزمات تطبيقها في مختلف المجالات الإدارية لمتطلبات الأعمال.

1.5 مفهوم ومستلزمات تطبيق البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة التي تستخدم في ترشيد عملية اتخاذ القرارات المختلفة في منظمات الأعمال. بدأ استخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي George Dantzing لحل بعض مشكلات التخطيط في المجالات العسكرية، وقد ازداد تطبيقها من الآونة الأخيرة لحل الكثير من المشكلات الصناعية والاقتصادية والعسكرية وذلك بالتوافق مع الزيادة في استخدام الحواسيب وتطورها وظهور البرامجيات الحديثة على نطاق واسع.

أن البرمجة الخطية تبحث عادة في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والمحددات المفروضة وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمة الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (Maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العائد النقدي المتوقع من خطة إنتاج معينة وما شابه ذلك. وقد يتعلق الأمر بتقليل أو تدنية (Minimize) قيمة الهدف، كما هو الحال في عملية تقليل تكاليف النقل أو تدنية تكاليف الإنتاج وما شابه ذلك. وقد عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية، بأنها الطريقة الرياضية التي بموجبها يتم تخصيص الموارد النادرة أو المحددة من أجل تحقيق هدف معين ومحدد. وعادة يكون من المستطاع التعبير عن هذا الهدف والقيود المرتبطة به في صيغة معادلات أو متباينات خطية. وهناك تعريف آخر ومختصر للبرمجة الخطية ينص على أنها ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهتم

بشكل أو بآخر بالاستغلال الأمثل للموارد المحددة (بشرية أو مادية وما شابه ذلك) لتلائم الأهداف المطلوبة. ويتم ذلك وفق أسلوب علمي مبرمج. وهنا لابد من الإشارة والتوضيح بأن مصطلح البرمجة Programming الوارد ذكره أعلاه يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي والعلمي في تحليل المشكلة وعلاجها. أما مصطلح الخطية فإنه يعني أن هناك علاقة ثابتة يبن المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود يمكن تمثيلها في هيئة خط مستقيم.

أن من مستلزمات استخدام البرمجة الخطية في حل المشاكل التي تواجه منظمة الأعمال، هو توفر الشروط التالية:

1- تحديد الهدف الذي تسعى المنظمة إلى تحقيقه، وقد ينطوي الهدف المذكور على تحقيق أقصى عائد أو الوصول بالكلفة إلى أدنى مستوى ممكن. والصيغة الرياضية للهدف يطلق عليها اصطلاحاً دالة الهدف (objective function).

2- ينبغي أن تكون الموارد المتاحة لتحقيق الهدف محدودة، وهذا يعني أنه ليس هناك حاجة لبرمجة استخدام الموارد التي لا تتصف بالمحدودية حتى وإن كانت تمثل عنصراً أساسياً في تحقيق الهدف.

3- وجود بدائل مختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيد البرمجة، بحيث يكون بمقدور متخذ القرار اختيار واحد من هذه البدائل.

4- إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة وهدف الدراسة والمتغيرات بصورة كمية أو رقمية.

5- وجود علاقة بين المتغيرات أو العوامل المتغيرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة. وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطية، وهذا يعني أن دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة هي علاقات رياضية من الدرجة الأولى سواء كانت مكتوبة في صيغة معادلات أم متباينات.

أن الواقع العملي يمكن أن يكشف عن استخدامات واسعة للبرمجة الخطية، وأهم هذه الاستخدامات هي:

1- توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة من مواد أولية، قوى عاملة مكائن ومعدات ومستلزمات إنتاج مختلفة، وذلك بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد.

2- صياغة جداول أو برامج عمل بما يضمن تقليل كلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن وبما يضمن أفضل المزايا لمتخذ القرار في المنظمة.

3- تخطيط الإنتاج بأنواعه لاختيار ذلك الهيكل أو التشكيلة في المنتجات التي تضمن أعلى العوائد للمنظمة ويحقق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

4- التوزيع الأمثل للمنتجات أو البضائع بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام. أو الاستهلاك بأقل كلفة كلية للنقل والتوزيع.

يكون تطبيق أو استخدام البرمجة الخطية وفق خطوات واضحة ومحددة، يمكن إجمالها على النحو التالي:

أولاً: دراسة وتحليل المشكلة وجمع البيانات اللازمة عنها مع تحديد كافة الفرضيات والثوابت اللازمة لتطبيق الأسلوب المذكور.

ثانياً: تحديد الهدف المطلوب، حيث قد يكون بلوغ أقصى ربح ممكن أو تخفيف التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. ويتم صياغة الهدف ضمن النموذج الرياضي للمشكلة في صيغة علاقة رياضية تكتب بشكل دالة وتسمى بدالة الهدف (objective function).

ثالثاً: تحديد القيود Constraints التي تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف، وتعبر هذه القيود عن طبيعة الموارد المتاحة من مواد أولية، وقوى عامل ومكائن وحدات وغير ذلك من مستلزمات الإنتاج المحددة، ويتم التعبير عن هذه القيود من خلال متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى.

بالإضافة إلى ما تقدم فإن هناك قيوداً من نوع آخر يطلق عليها اسم قيود اللاسلبية (Non - negativity constraints) والتي تعني أن جميع قيم المتغيرات حقيقية وغير سالبة. ويعني أيضاً لا يجوز أن تكون الأعداد والكميات سالبة.

2.5 النموذج العام للبرمجة الخطية

General form of linear Programming:

في ضوء ما تقدم من توضيحات حول طبيعة البرمجة الخطية ومفهومها ومكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، نجد أن بالإمكان التعبير عن النموذج بأبسط صورة

له كما يلي :

إذا كان المطلوب هو العمل على إيصال قيمة دالة الهدف إلى القيمة المثلى لها ، أي أن :

Optimize $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

بعد إستيعاب الشروط المعبر عنها كما يلي :

Subject to:

constraints
$$\begin{cases} g\,i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le, =, \ge bi \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots d\ m\ n) \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

ويمكن إعادة صياغة هذا النموذج الرياضي بعد الأخذ بنظر الاعتبار كافة الحدود الممكنة للنموذج من حيث عدد المتغيرات (j) وعدد القيود و (i) (حيث أن ($j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, m$). وكذلك بعد الأخذ بنظر الاعتبار إمكانية أن يكون المطلوب هو تعظيم الهدف إلى أعلى مستوى ممكن أو تدنيته إلى أدنى مستوى ممكن ، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

القيود $\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j \le, =, \ge bi \quad (i=1,2,\ldots,m)$

دالة الهدف $Z = \sum_{j=1}^{n} c\,j\,x\,j \rightarrow \text{Max. or Min}$

$x\,j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ قيد اللاسلبية

تعتبر هذه الصيغة الأساس الرياضي للعديد من الصيغ الرياضية وعلى أساسها يمكن كتابة الصيغة التفصيلية التي تأخذ نظر الاعتبار الصفوف والأعمدة الممكنة الخاصة بالنموذج. وأن كتابة الصيغة التفصيلية يعرف أيضا بعملية فتح النموذج العام أن الصيغة التفصيلية تكتب كما يلي :

القيود
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le \ = \ \ge b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \le \ = \ \ge b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le = \ \ge b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow$ Max. or Min.

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

من الصيغ الرياضية الواردة أعلاه يتم اشتقاق نوعين أساسيين في الصيغ الرياضية وهي :

أولاً : الصيغة القانونية Canonical Form :

أن من أهم صفات هذه الصيغة هي أن القيود في النموذج الرياضي تظهر بعلامة (≤) أقل أو يساوي أو (≥) أكبر ما يساوي أو كليهما معاً. وعادة تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمة لها (.Max) مع الصيغة التي تكون قيودها الرياضية مكتوبة بعلامة (≤). في حين تصل دالة الهدف إلى اقل قيمة لهما (Min) إذا كانت قيود النموذج الرياضي مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي وتعرف هذه الصيغة بأنها الصيغة الرياضية الغير مستقرة. ويمكن كتابة الصيغة القانوية canonical form للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية كما يلي :

1- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي :

القيود

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \quad b_2 \\ \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow$ Max.

قيود الأسلوب $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\, i\, j\, x\, j \leq, =, \geq bi \quad (i=1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c\, j\, x\, j \rightarrow Xj \geq 0\, Max\, (j=1,2,...,n)$$

2- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \text{القيود} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{aligned}$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\dots n)$$

3- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامات مختلفة (≤) أقل أو يساوي وكذلك علامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \text{القيود} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned}$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow Max . or Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq, \geq b_i \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Max. or Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\dots n)$$

ثانياً: الصيغة القياسية Standard Form :

أن الصيغة القياسية هي الحالة المستقرة للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية يتم اشتقاقها من الصيغة القانونية السابقة بعد أن يتم إضافة عدد من المتغيرات وطبقاً لكل نوع من أنواع العلامات الرياضية (≤ ، = ، ≥) وذلك كما هو واضح في الجدول(5-1).

جدول رقم (5-1) قواعد إضافة المتغيرات

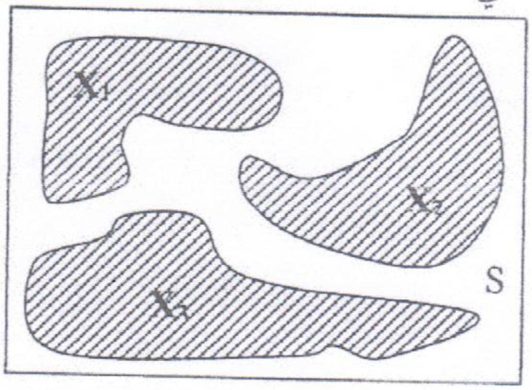
نوع المتغير الذي يضاف إلى دالة الهدف	نوع المتغير الذي يضاف إلى القيد	نوع العلامة الرياضية في القيد
Max. Z =...+0.S Min. Z =...+0.S	+S	≤أقل أو يساوي
Max. Z =...+0.S-MR Min. Z =...+0.S + MR	-S + R	أكبر أو يساوي ≥
Max Z =...-MR Min. Z =...+ MR	+R	= يساوي

حيث أن :

S + هي متغير slack variable يضاف إلى طرق المعادلة الأصغر ويسمى أيضاً المتمم الرياضي وبلغه الإنتاج يعرف بمقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة. والمثال التالي يوضح فكرة المتغير المذكور :

إذا كان لدينا قطعة قماش طولها 5 متر وعرضها 3 متر ومطلوب استغلالها لإنتاج بدلات معينة فإنها يمكن أن تأخذ الشكل التالي :

5 متر



3 متر

ومن الشكل المذكور نستنتج أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

وإذا كان S هو مقدار الفضلات بعد فإن :

$$x1 + x2 + x3 + S = 15$$

حيث أن S تمثل في هذه الحالة أيضاً بمثابة المتمم الرياضي أو المتغير الراكد المشار إليه أعلاه.

S- ⇐ ويسمى بالتغير الفائض (sur pluse) ويعبر عن مقدار المواد الفائضة - أي على سبيل المثال إذا كانت الحاجة إلى مادة أولية معينة هي 100 وحدة وكان الموجود هو 120 فإن الـ 20 الإضافية هي مقدار الفائض عن الحاجة. وعادة تطرح من الطرف الكبير في العلاقة التي تحمل العلاقة ≤ أكبر أو يساوي.

R ⇐ المتغير الاصطناعي Artificial variable وهو ذلك المتغير الذي يستخدم بهدف معالجة الإشارة السالبة للتغير الفائض (S-). ويضاف هذا المتغير أيضا إلى القيد الذي يحمل علامة المساواة من أجل تكوين ما تسمى بمصفوفة الوحدة identity Matirix

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ضمن طريقة السمبلكس التي هي ضرورية لإكمال عملية الحل.

ومن الجدير بالذكر هنا أن هذا المتغير ليس له أي معنى ضمن المشكلة المدرسة. وأن وجوده في المشكلة هو فقط لأغراض رياضية بحتة وبالتحديد من أجل معالجة الإشارة السالبة للمتغير الفائض التي تتعارض مع قيد اللاسلبية ($Si \geq 0$)، وبذلك فإن من المفروض التخلص من هذا المتغير في المراحل الأولى من عمليات الحل، ومن أجل تنفيذ هذه المهمة يستخدم معامل كبير بمقدار (M) لمرافقة هذا المتغير وعادة يكون أكبر من أي معامل آخر موجود في النموذج الرياضي وذلك من أجل التعمد بعدم ظهور هذا المتغير في النتائج النهائية للمشكلة.

M ⇐ معامل المتغير الاصطناعي R وهو كمية كبيرة جدا افتراضية وعلى الأغلب تكون من مضاعفات الرقم (10) عشرة أي (الخ ... ، 1000 ، 100 ، 10) وعلى أساس هذا المعامل يتم تسمية طريقة الحل المسماة M-Technique أو ما يسمى أيضا (Big - M).

وعلى أساس ما تقدم فإن الصيغ القياسية لنماذج البرمجة الخطية هي كما يلي:

1- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_1 &= b_2 \\
am_1x_1 + am_2x_2 + \dots + a_{mn}x_{n} + s_m &= b_m
\end{aligned}
$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0.5_1 + 0.5_2 \dots .0.5\ m \rightarrow Max.$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j + si = bj \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj + 0.Si \rightarrow Max.$$

$$xj \geq 0 \qquad si \geq 0$$

2- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≤) أكبر أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - S + R = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - S + R_2 = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$am_1x_1 + am_2x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n - Sm + Rm = b_m$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0.S_1 + 0.S_2 + \dots 0.Sm + MR_1 + MR_2 + \dots + MR_m \rightarrow Min$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$$
$$R_1, R_2, \dots, R_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{m} a\,i\,j\,x\,j - si + Ri = bi \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj + 0.si + MRi \rightarrow Min$$

$$xj \geq 0 \quad , \quad si \geq 0 \quad , \quad Ri \geq 0$$

M ⇐ كمية كبيرة جداً

3- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامات رياضية مختلطة (≤ = ≥)، فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي (على افتراض لدينا ثلاثة قيود فقط فإن دالة

الهدف تصل إلى Min).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Min$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

يصبح النموذج أعلاه مكتوباً بالصيغة القياسية كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - s_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n + \quad R_3 = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0.S_1 - 0.S_2 + MR_2 + MR_3 \rightarrow Min$$
$$X_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$
$$S_1, s_2 \geq 0$$
$$R_2, R_3 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3.5 افتراضات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يتميز النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية بعدد من الافتراضات كي يكون مناسباً ومقبولاً من الناحية العلمية والعملية، وهي :

أولاً: التناسبية Proportionality :

يعني هذا الافتراض أن المساهمة في حالة الهدف من جهة والكمية المستخدمة من المصادر من جهة أخرى أن تكون متناسبة مع قيمة كل متغير من متغيرات القرار. ولتوضيح ذلك نفرض أن أحد قيم المتغيرات الأساسية لمشكلة معينة هو 10 ($X_1 = 10$) وأن هامش الربح للوحدة الواحدة من هذا المتغير يساوي 5 دينار، وأن كل وحدة واحدة من هذا المتغير الأساسي يتطلب وحدة من المادة الأولية الأصلية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية، وعليه فإن مساهمة هذا المتغير الأساس في دالة الهدف هي 50 دينار (5×10) وأن انتاج 10 وحدات من هذا المتغير يتطلب 30 وحدة ($10 \times 2 + 10 \times 1 = 30$) وحدة من المواد الأولية المتاحة.

ثانياً: الإضافية Additivity :

أن هذا الافتراض يعني أن قيمة دالة الهدف والموارد الكلية المستخدمة في المشكلة يمكن إيجادها من خلال جمع مساهمة دالة الهدف والموارد المستخدمة لجميع المتغيرات. أي أن قيمة دالة الهدف تمثل مجموع مساهمات جميع المتغيرات الأساسية، وكذلك فإن الموارد الكلية المستخدمة تمثل مجموع الموارد المستخدمة لكل متغير من هذه المتغيرات.

ثالثاً: قابلية القسمة Divisibility :

وتعني هذه المتغيرات يمكن أن تأخذ قيماً كسرية وليس بالضرورة أن تكون جميع قيم المتغيرات أعداداً صحيحة.

رابعاً: اللاسلبية Negativity–Non :

وتعني هذه أن متغيرات القرار لا يمكن أن تكتب كميات ومقادير سالبة، حيث أن من المعروف من الناحية المنطقية أن القيم السالبة للكميات والمقادير تعتبر مستحيلة. إذ لا يمكن أن يكتب الإنتاج أو التسويق للبضائع والسلع بالسالب. وعادة يعبر عن هذه الافتراض ($xj \geq 0$).

4.5 طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار إليها أعلاه تبدأ بعد ذلك مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. يتفق معظم الكتاب المهتمين بأسلوب البرمجة الخطية بأن هناك ثلاث طرق أساسية لحل نموذج البرمجة الخطية، وهي:

أولاً: الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method .

ثانياً: الطريقة الجبرية Algebric Method .

ثالثاً: الطريقة المبسطة (السيمبلكس) Simplex Method .

الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphic Method :

تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الأساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة