**تمهيد:** علم المصفوفات هو علم قائم بذاته حيث تلعب المصفوفات دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وغير الخطية في فروع الرياضيات المختلفة . فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هي الأساس في صياغة نماذج المنتج والمستخدم وكذلك صياغة متسلسلات ماركوف. ويعتبر الرياضي هاملتون والرياضي كابيلي أول من أدخل مفهوم المصفوفات.

**1-2 تعريف المصفوفة من المرتبة** $m \times n$: لتكن لدينا المجموعة $X$ (مجموعة غير خالية) ولتكن المجموعتان : $F = \{1,2,3,...,n\}$ و $E = \{1,2,3,...,m\}$ حيث $m,n$ أعداد طبيعية و $(m \geq 1, n \geq 1)$ فإن كل تطبيق من الشكل : $f : E \times F \to X$ يسمى $m \times n$ مصفوفة أو مصفوفة مرتبتها $m \times n$ أو مصفوفة من الشكل $(m,n)$ وذلك من المجموعة $X$.

إذا رمزنا للصورة المباشرة للثنائية $(i,j)$ وفق التطبيق $f$ بالرمز $a_{ij}$، وذلك من أجل أي عنصر $(i,j)$ من الجداء $E \times F$ فإن العناصر التالية:

$a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}$ تعين تماماً التطبيق $f$.

لنرتب العناصر $f(E \times F)$ في $m$ من الصفوف و $n$ من الأعمدة بحيث يقع العنصر $a_{ij}$ في الصف الذي رقمه $(i)$ والعمود الذي رقمه $(j)$ كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}; (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \qquad (1-2)$$

أو اختصاراً :

$$A = [a_{ij}]_{(m.n)} \qquad (2-2)$$

وتسمى بالمصفوفة $m \times n$ أو المصفوفة من المرتبة $(m,n)$ ونرمز لها بأحرف كبيرة مثل $A, B, C, ...$ وتسمى المصفوفة المكونة من صف واحد و $n$عمود بالمصفوفة الصفية ( أو مصفوفة الصف ) وهي من المرتبة $(1,n)$

وتسمى المصفوفة المكونة من $m$ صف وعمود واحد **بمصفوفة العمود** وهي من المرتبة $(m,1)$

وفي حالة تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف $(m=n)$ فإنها تسمى **بالمصفوفة المربعة** أو نقول من المرتبة $n$ مثلاً ، كما تسمى العناصر $(i=1,2,...,n)$ $a_{ii}$ فيها **بالقطر الرئيسي** .

**ملاحظة(1):** في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فربما تكون دوال أو كثيرات حدود أو... ، وسنهتم في دراستنا بالمصفوفات التي عناصرها أعداد، وبهذا نقول لدينا مصفوفة $A$ معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية.

**ملاحظة(2):** يمكن تعريف المصفوفة على أنها جدول مؤلف من مجموعة عناصر مرتبة بشكل صفوف عددها $m$ وأعمدة عددها $n$.

**أمثلة:**

1-

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -5\\ 3\end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ مؤلفة من ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الشكل $(3,2)$، والمصفوفة $B$ مؤلفة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فهي من الشكل $(3,3)$، والمصفوفة $C$ مؤلفة من صف واحد وأربعة أعمدة وتسمى بمصفوفة الصف فهي من الشكل $(1,4)$، والمصفوفة $D$ مؤلفة من عمود واحد وأربعة صفوف وتسمى بمصفوفة العمود فهي من الشكل $(4,1)$ .

2-

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ في هذا المثال فيها $(m = n)$ أي مربعة من المرتبة $(3,3)$ أو اختصاراً من المرتبة 3، كما نلاحظ أن هذه المصفوفة والمصفوفة $B$ من المثال السابق لهما نفس المرتبة $(3,3)$ (كل منهما تحوي عدداً من الصفوف يساوي 3 وعدداً من الأعمدة يساوي 3).

3-

$$A = \begin{bmatrix} 1+i \\ 4i \\ -5+2i \\ 3i \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ من المرتبة $(4,1)$ وعلى حقل الأعداد العقدية $C$ وهي مصفوفة عمود.

**ملاحظة(3):** سنرمز لجملة المصفوفات من المرتبة $(m,n)$ وعلى حقل الأعداد $K$ بالرمز $M_{(m,n)}(K)$.

من خلال الأمثلة السابقة في المثال (1): $A \in M_{(3,2)}(R)$، $B \in M_{(3,3)}(R)$، $C \in M_{(1,4)}(R)$ $D \in M_{(4,1)}(R)$. في المثال (3): $A \in M_{(4,1)}(C)$.

**2-2 تساوي مصفوفتين:** نقول عن مصفوفتين $A = [a_{ij}]_{(m.n)}$، $B = [b_{ij}]_{(p.q)}$ إنهما متساويتان ونكتب $A = B$ إذا تساوت كل العناصر المتقابلة في المصفوفتين، وبكلام آخر إذا كان:

1- من مرتبة واحدة اي $m = p$، $n = q$.

2- العناصر المتقابلة في المصفوفتين متساوية أي: $a_{ij} = b_{ij};(1 \le j \le n, 1 \le i \le m)$.

ونكتب اختصاراً: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}; \forall i,j (1 \le j \le n, 1 \le i \le m)$

**أمثلة:**

1- إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن: $a_{11} = -7$، $a_{12} = 0$، $a_{21} = 3$، $a_{22} = 4$.

2- عين قيمة $\lambda$ لتكون المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2 \\ \lambda & 3 \\ 5 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

على حقل الأعداد الحقيقية $R$ متساويتين.

بما أن المصفوفتين من مرتبة واحدة $(3,2)$ لذلك نكتفي بتحقق شرط تساوي العناصر المتقابلة:

$$\lambda^2 - \lambda = 2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

ومنه:

$\lambda = 2 \ , \ \lambda = -1$ ، وبالتالي فإن $\lambda = -1$ .

**2-3 منقول مصفوفة:** إن منقول مصفوفة $A = [a_{ij}]_{(m.n)}$ هو مصفوفة جديدة ناتجة من جعل الصفوف أعمدة (أو الأعمدة صفوفاً) ونرمز لها بالرمز $A^T$ ونعرفها بالشكل التالي:

$$A^T = [a_{ji}]_{(n.m)} \qquad (3-2)$$

( أي إذا كانت المصفوفة $A$ من المرتبة $(m,n)$ فإن منقولها من المرتبة $(n,m)$ ).

**ملاحظة(4):** لا يؤثر منقول مصفوفة في قيمة المحدد بمعنى أن: $|A| = \left|A^T\right|$ وذلك للمصفوفات المربعة(كما سيمر لاحقاً).

**مثال:**

أوجد منقول المصفوفة $A$ على حقل الأعداد العقدية:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ 5-i & 5 \\ 6+i & i \\ 3i+1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 5-i & 6+i & 3i+1 \\ -3i & 5 & i & 0 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة(5):** من تعريف منقول مصفوفة نلاحظ أن:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T ; A, B \in M_{(m,n)}(K)$

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T ; \alpha \in K$

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T ; A \in M_{(m,n)}(K), B \in M_{(n,p)}(K)$

**مثال:**

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $(A+B)^T, A+B, B^T, A^T$

**الحل:**

$$A+B=\begin{bmatrix}1&5&2\\4&1&2\\4&5&4\end{bmatrix}\ ,\ (A+B)^T=\begin{bmatrix}1&4&4\\5&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2&2&1\\3&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}\ ,\ B^T=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&-1&3\\1&1&3\end{bmatrix}$$

## 2-4 المصفوفات الخاصة:

### 2-4-1 تعريف الأعداد العقدية المترافقة وخواصها:

١) إذا كان $a$ و $b$ عددين حقيقين وكان $i=\sqrt{-1}$ فإن $z=a+bi$ يسمى عدداً عقدياً . ويسمى العددان العقديان $a+bi$ و$a-bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر.

٢) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=\overline{z_1}=a-bi$ فإنه يكون $\overline{z_2}=\overline{\overline{z_1}}=\overline{a-bi}=a+bi$

( مرافق المرافق لعدد $z$ هو العدد $z$ نفسه ).

٣) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ فإنه يكون:

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i\ ،\ \overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

( المرافق لمجموع عددين عقديين هو مجموع مرافقي هذين العددين )

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i\ \Rightarrow$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

( المرافق لحاصل جداء عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما )

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}2-i&i&1+i\\5&-i&1+6i\\0&1-i&3\end{bmatrix}\Rightarrow\overline{A}=\begin{bmatrix}2+i&-i&1-i\\5&i&1-6i\\0&1+i&3\end{bmatrix}$$

**2-4-2 تعريف مرافق منقول مصفوفة:** هو مصفوفة $A^*$ المحققة لـ $A^* = \overline{(A^T)}$ .

**3-4-2 مصـــفوفات الصف والعمود:** إن المصفوفة المؤلفة من $m$ صفاً وعموداً واحداً $(m,1)$ تسمى مصفوفة عمود كالمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ ..... \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad (4-2)$$

أما المصفوفة المؤلفة من $n$ عموداً وصفاً واحداً $(1,n)$ تسمى بمصفوفة الصف كالمصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ..... & b_{1n} \end{bmatrix} \qquad (5-2)$$

**ملاحظة(6):** تسمى هذه المصفوفات بمتجهات العمود أو الصف.

**4-4-2 المصـــفوفة الصفرية:** تكون جميع عناصرها أصفاراً ( صفر الحقل $K$ ) ونرمز لها بالرمز :
$O_{m,n} \qquad (6-2)$ أو $a_{ij} = 0; (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ .

**ومن أهم خصائصها:**

$$A_{m,n} + O_{m,n} = A_{m,n} \Leftrightarrow A - A = 0 \text{ ، } O_{m,n} \times A_{n,1} = O_{m,1} \text{ ، } A_{m,1} \times O_{1,n} = O_{m,n}$$

**مثال:**

$$O_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**5-4-2 المصــفوفة المربعــة:** إذا كـان $(m = n)$ في المصـفوفة $A = [a_{ij}]$ فتسـمى المصـفوفة بالمربعـة ونقـول إنهـا مـن المرتبة $n$ بدلاً من $(n,n)$. وتسمى $A = [a_{ij}]$ بالمصفوفة المستطيلة إذا كان $(m \ne n)$ .

**6-4-2 المصفوفة القطرية:** تكون المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n.n)}$ قطرية إذا كان:
$(a_{ij} = 0; i \ne j)$. أي أن جميع عناصر المصفوفة أصفاراً ماعدا عناصر قطرها الرئيسي وهي: $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$

أي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A = diag[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}]$$

**2-4-7 المصفوفة السلمية:** هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية وتساوي $\lambda \in K$ وبقية العناصر معدومة ونكتبها على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (8-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A=[a_{ij}];a_{ij}=\begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ \lambda & ; \quad i = j \end{cases} \qquad (9-2)$$

**2-4-8 المصفوفة المتناظرة:** تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متناظرة إذا كان:

$(a_{ij}=a_{ji};\forall i,j)$ وذلك من أجل جميع قيم $(i,j=1,2,\dots,n)$ أي إذا كان $A=A^T$ .

إن المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة لأنها تحقق: $(a_{ij}=a_{ji};\forall i,j=1,2,\dots,n)$

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{bmatrix} \;,\; B=\begin{bmatrix} 1+i & 4i & 2-i \\ 4i & -3 & -6i \\ 2-i & -6i & 1+2i \end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ متناظرة.

**2-4-9 المصفوفة المتخالفة (ذات التناظر العكسي):** تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متخالفة إذا كان: $(a_{ij}=-a_{ji};\forall i,j=1,2,\dots,n)$ ، ( أي إذا كان: $A=-A^T$ ).

عندما يكون $i=j$ فإن ( $a_{ii}=0;\forall i$ ) وذلك لأن:

$$a_{ii}=-a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii}=0 \Rightarrow a_{ii}=0;\forall i$$

أي أن عناصر القطر الرئيسي فيها يجب أن تكون أصفاراً.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}0 & b & c\\ -b & 0 & e\\ -c & -e & 0\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}0 & 4i & 2-i\\ -4i & 0 & -6i\\ -2+i & 6i & 0\end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ متخالفة.

**2−4−10 المصفوفة المثلثية العليا(السفلى):** إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij}=0; i>j)$ ،أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة (إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij}=0; i<j)$ أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة).

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}b_{11} & 0 & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{bmatrix}$$

$A$ عليا و $B$ سفلى.

**ملاحظة(7):** لمعرفة المصفوفة شاذة أو غير شاذة يجب أن يكون قيمة محددها غير معدوم ( سوف نعرف محدد المصفوفة لاحقاً ).

**مثال:**

بفرض لدينا المصفوفة المثلثية:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 8 & 9\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

بما أن $A$ مصفوفة مثلثية فإن محددها عبارة عن جداء عناصر قطرها الرئيسي:

$$|A|=5\cdot 6\cdot 7=210\neq 0$$

وبالتالي المصفوفة $A$ ليست شاذة لأن محددها مخالفاً للصفر أي $|A|\neq 0$.

**2−4−11 المصفوفة الواحدية:** هي مصفوفة سلمية عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد والعناصر غير القطرية تكون أصفاراً ونرمز لها بالرمز $I_n$.

واختصاراً نكتب:

$$A=[a_{ij}];a_{ij}=\begin{cases}0 & ; \quad i\neq j\\ 1 & ; \quad i=j\end{cases} \qquad (10-2)$$

**مثال:**

$$I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},I_1=[1]=1$$

الخاصة الهامة للمصفوفة الواحدية هي: $I_{n,n}\times A_{n,m}=A_{n,m}\times I_{m,m}=A_{n,m}$

**2-4-12 المصفوفة المرافقة لمصفوفة:** هي مصفوفة عناصرها هي العناصر المرافقة لعناصر المصفوفة العقدية $A$ ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

**2-4-13 المصفوفة الهرميتية:** تكون المصفوفة العقدية هرميتية إذا كان:

$$A=A^*=\overline{(A^T)} \qquad (11-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij}=\overline{a_{ji}};i,j=1,2,...,n)$.

**ملاحظة(8):** بما أن $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ عندما $i=j$ فإنه يجب أن تكون $a_{ii}\in R;\forall i$ (أي عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهرميتية يجب أن تكون أعداداً حقيقية دوماً).

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}1&2-3i&3+4i\\2+3i&0&4-5i\\3-4i&4+5i&3\end{bmatrix}$$

$A$ هرميتية: $A=A^*=\overline{(A^T)}$.

**2-4-14 المصفوفة الهرميتية المتخالفة:** تكون المصفوفة العقدية هرميتية متخالفة إذا كان :

$$A=-A^*=-\overline{(A^T)} \qquad (12-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية المتخالفة هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij}=-\overline{a_{ji}};i,j=1,2,...,n)$.

**ملاحظة(9):** بما أن $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ عندما $i = j$ فإنه يجب أن تكون عناصر القطر الرئيسي

في المصفوفة الهرميتية المتخالفة أعداداً تخيلية بحتة أو أصفاراً.

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}i & \frac{3}{2}+2i & 2-\frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{2}+2i & -2i & \frac{5}{2}+3i \\ -2-\frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}+3i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ هرميتية متخالفة: $A = -A^* = -\overline{(A^T)} \ , \ B = -B^* = -\overline{(B^T)}$.

**ملاحظة(10):** المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

**ملاحظة(11):** المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

**ملاحظة(12):** كل عدد حقيقي أو عقدي يمكن النظر إليه كمصفوفة من الشكل $(1,1)$ ونكتب $A = [a_{11}]$ نسميها المصفوفة وحيدة العنصر.

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -7 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ مربعة ومثلثية سفلى− المصفوفة $B$ مثلثية عليا− المصفوفة $C$ سلمية − المصفوفة $D$ متناظرة.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -5 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $E$ متناظرة متخالفة – المصفوفة $F$ هرميتية – المصفوفة $G$ هرميتية متخالفة – المصفوفة $I$ أو $(I_3)$ واحدية.

**2-4-15 المصفوفة شبه القطرية:** نسمي المصفوفة المربعة المجزأة $A$ والتي ينطبق قطرها الرئيسي على الأقطار الرئيسية لعدد من المصفوفات المربعة الجزئية $A_1A_2,...,A_k$ المصفوفة شبه القطرية حيث $A_1A_2,...,A_k$ مصفوفات جزئية مربعة متساوية الدرجة وباقي عناصر المصفوفة $A$ عبارة عن أصفار.

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{bmatrix}$$

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة $A$ شبه قطرية حيث عناصر قطرها الرئيسي ينطبق على الأقطار الرئيسية للمصفوفات المربعة الجزئية :

$$A_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \;,\; A_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \;,\; A_3=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

**2-5 مقلوب مصفوفة:** وهي مصفوفة تنتج من المصفوفة $A$ ونرمز لها بالرمز $A^{-1}$، والمصفوفة المستطيلة يكون لها مقلوبان من اليمين وتحقق العلاقة:

$$A_{m,n}\times A_{n,m}^{\;-1}=I_{m,m} \qquad (13-2)$$

ومن اليسار وتحقق العلاقة:

$$A_{n,m}^{\;-1}\times A_{m,n}=I_{n,n} \qquad (14-2)$$

وبالتالي إذا كانت المصفوفة مربعة $(m=n)$ فإن للمصفوفة مقلوباً واحداً هو: $A_{n,n}^{\;-1}$ يحقق العلاقة:

$$A_{n,n}\times A_{n,n}^{\;-1}=A_{n,n}^{\;-1}\times A_{n,n}=I_{n,n} \qquad (15-2)$$

الذي يجب ذكره هو أن وجود المقلوب يرتبط بشروط سنذكرها لاحقا ، أما بالنسبة للمصفوفة المربعة فإن الشرط هو $|A| \neq 0$ ( محدد $A$ لا يساوي الصفر ) أي إن **المصفوفة** $A$ **نظامية** (غير شاذة). وإذا كان $|A| = 0$ فإن $A$ ليس لها مقلوب وتكون $A$ **مصفوفة شاذة** (أو فريدة).

**2-5-1 مبرهنة:** إذا كان للمصفوفة المربعة $A$ مقلوب فهذا المقلوب وحيد ويرمز له بالرمز $A^{-1}$ بحيث يكون:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (16-2)$$

**الإثبات:**

لنفرض أن $B$ و $C$ مقلوبا المصفوفة المربعة $A$ هذا يعني :

$$A.B = B.A = I$$
$$A.C = C.A = I$$

لكن:

$$C.A.B = C.(A.B) = C.I = C$$
$$C.A.B = (C.A).B = I.B = B$$

بالمقارنة نجد: $B = C$ ، مما يعني أن للمصفوفة المربعة مقلوب وحيد إن وجد ( في حال كان $|A| \neq 0$ ).

**2-6 خصائص المصفوفات القطرية والمثلثية:**

1- إذا كانت $A$ و $B$ مصفوفتين قطريتين لهما نفس المرتبة فإن:

$AB, BA, A-B, A+B$ هي مصفوفات قطرية ، كذلك فإن $A^{-1}$ تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً ، وتكون $A^{-1}$ قطرية وعناصر قطرها مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة $A$ .

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن: