الفصل الثاني

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

§1. مقدمة وتعاريف:

تأتي أهمية استخدام معدل (سعر) الفائدة كأداة من أدوات السياسة الاقتصادية، حيث أن الطلب على الاستثمار يتعلق بسعر الفائدة، فإذا كان سعر الفائدة منخفضاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون كبيراً مما يؤدي إلى زيادة النشاط الإنتاجي، وبالعكس إذا كان سعر الفائدة مرتفعاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون قليلاً وهذا سيؤدي إلى قلة النشاط الإنتاجي.

يلعب سعر الفائدة دوراً كبيراً في تحقيق الاستقرار والنمو الاقتصاديين وتحفيز الاستثمار كما يربط سعر الفائدة بين سوق السلع والخدمات وسوق النقد.

إن الفائدة هي التكلفة التي تتحملها المنشآت الاقتصادية بأنواعها المختلفة الصناعية والتجارية لقاء الحصول على رأس المال، فالفائدة عملياً هي تكلفة رأس المال.

تقسم الفائدة إلى نوعين هما: الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، تستخدم الفائدة البسيطة في حالة الاستثمارات والقروض قصيرة الأجل التي مدتها سنة واحدة فما دون، بينما تطبق الفائدة المركبة في حالة الاستثمارات والقروض طويلة الأجل مدتها الزمنية أكثر من سنة.

وللفائدة المركبة تطبيقات كثيرة في المجالات الاقتصادية كمسائل الإنتاج والاستثمار، وفي مختلف المجالات العلمية والاجتماعية والسكانية.

يتحدد سعر الفائدة تبعاً لعوامل عدة منها عرض النقود وطلبها والتضخم النقدي.

1-1- تعريف الفائدة البسيطة:

هي العائد أو التعويض المادي الناتج عن استثمار أو اقتراض أموال الغير خلال فترة زمنية معنية، نسمي المبلغ المقترض بالأصل، وتحسب الفائدة كنسبة مئوية سنوية

من الأصل دائماً طوال فترة استخدام القرض، أي أن الفوائد المخصصة لا تضاف إلى أصل المبلغ.

تحتوي معادلة الفائدة البسيطة على ثلاث مركبات:

1- الأصل (المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر) ونرمز له بـــ C.

2- معدل أو سعر الفائدة وتقدر بالسنوات (نسبة مئوية في السنة) ونرمز له بـــ i.

3- دورة الاستثمار أو الاقتراض ونرمز لها بـــ n.

وتعطى معادلة الفائدة البسيطة بالعلاقة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

حيث أن C_n جملة المبلغ بعد n سنة وتسمى (القيمة المستقبلية للمبلغ C).

مثـــال:

اقترض شخص من أحد المصارف مبلغاً من المال مقداره 1000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة % 5 سنوياً. أوجد القيمة المستقبلية للمبلغ وذلك:

1- بعد عامين.

2- بعد ثلاثة اشهر.

3- بعد 180 يوم.

الحـــل:

1) من المعلومات المعطاة: $C=1000$ ، $i=0.05$ ، $n=2$

ومن معادلة الفائدة البسيطة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

$$C_2 = 1000[1+(0.05)\cdot(2)] = 1000(1.1) = 1100\ S\cdot P$$

2) إن ثلاثة شهور تمثل ربع عام إذن: $n=\frac{3}{12}=0.25$

$$C_{0.25} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.25)] = 1000(1.0125) = 1012.5\ S\cdot P$$

3) في معظم المعاملات المالية يعتبر العام 360 يوماً ومنه: $n=\frac{180}{360}=0.5$

$$C_{0.5} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.5)] = 1000(1.025) = 1025\ S\cdot P$$

1-2- تعريف الفائدة المركبة:

هي الفائدة التي تضاف إلى الأصل (المبلغ الأصلي) في نهاية كل وحدة زمن معينة وتستثمر معه لتشكل أصلاً جديداً (رأسمالاً جديداً) للدورة الزمنية التالية تحـــسب

عليه الفائدة من جديد. بمعنى أنه في الدورة الزمنية الجديدة تحسب فائدة على أصل المبلغ وفائدة على فائدة أصل المبلغ في الدورة الزمنية السابقة. هذا الأصل (المبلغ الأصلي) متغير دائماً، حيث تحسب الفائدة في كل دورة زمنية على جملة المبلغ في الدورة الزمنية السابقة.

- **معدل الفائدة:**

هو فائدة وحدة نقدية واحدة (ليرة واحدة) في نهاية كل دورة زمنية (سنة مثلاً) ويرمز لمعدل الفائدة بالرمز i ويعبر عنه بالشكل $i\ \%$.

1ـ3ـ معادلة الفائدة المركبة:

إذا فرضنا أن شخصاً أودع مبلغ C ل.س في أحد المصارف لمدة n من السنوات بفائدة معدلها $i\ \%$ سنوياً فتكون الفائدة المستحقة على المبلغ C في نهاية السنة الأولى أي عندما $n=1$: $I_1 = C.i.n = C.i$

وجملة المبلغ C في نهاية السنة الأولى C_1:

$$C_1 = C + C\,i = C(1+i)$$

وهي تمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثانية، وإذا ترك المبلغ لمدة سنة ثانية ولم يسحب هذا الشخص فوائد السنة الأولى بل تركها تضاف لأصل المبلغ في نفس الحساب، في هذه الحالة ستحسب الفائدة على الأصل الجديد وهو $C(1+i)$

وستكون الفائدة هي: $I_2 = C_1 \cdot i = C(1+i)\cdot i$

وجملة المبلغ C_1 في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C(1+i) + C(1+i)\cdot i$$

وبإخراج $C(1+i)$ عامل مشترك نجد:

$$= C(1+i)\cdot(1+i) = C(1+i)^2$$

وهذا الأخير يمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثالثة.

وبالاستمرار بهذه الطريقة ستكون جملة المبلغ في نهاية السنة الثالثة هي:

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1+i) = C(1+i)^3$$

بشكل عام جملة مبلغ C ل.س (القيمة المستقبلية لمبلغ C) مستثمر بفائدة مركبة $i\ \%$ سنوياً لمدة n من السنوات ستكون:

$$C_n = C(1+i)^n$$

إن مقدار الفائدة المستحقة عن مبلغ C لمدة n من السنوات تحسب من العلاقة:

$$I = C_n - C = C(1+i)^n - C$$

$$I = C\,[(1+i)^n - 1]$$

مثـــال:

أوجد جملة مبلغ (القيمة المستقبلية) 500 ل.س مستثمر بمعدل فائدة 12 % سنوياً.

1- بعد شهر.

2- بعد سنة.

3- بعد خمس سنوات.

وذلك في حالة الفائدة البسيطة وفي حالة الفائدة المركبة.

الحـــل:

- **في حالة الفائدة البسيطة نستخدم القانون:** $C_n = C(1 + i \cdot n)$

1- جملة المبلغ بعد شهر هي:

$$C_n = 500\left(1 + 0.12 \times \frac{1}{12}\right) = 505 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة هي:

$$C_1 = 500(1 + 0.12(1)) = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1 + 0.12(5)) = 800 \quad S.p$$

- **في حالة الفائدة المركبة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i)^n$

1- جملة المبلغ بعد شهر على أساس معدل فائدة مركبة هي:

$$C_n = 500(1 + 0.12)^{\frac{1}{12}} = 500(1.12)^{0.085}$$
$$= 500(1.0094507) = 504.72 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة على أساس الفائدة المركبة هي:

$$C_1 = 500(1 + 0.12)^1 = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12)^5 = 500(1.12)^5$$

$$= 500(1.7623417) = 881.170 \quad S.p$$

بمقارنة جملة المبلغ في حالتي الفائدة البسيطة والفائدة المركبة نلاحظ أن الجملة في حالة الفائدة البسيطة أكبر من الجملة في حالة الفائدة المركبة عندما تكون المدة n أقل من سنة وتتساوى الجملتان عندما تكون المدة سنة واحدة $(n=1)$، وتكون الجملة في حالة الفائدة المركبة أكبر من الجملة في حالة الفائدة البسيطة عندما $n>1$ (أي عندما تكون المدة n أكبر من سنة).

مثـال:

استثمر شخص مبلغاً من المال قدره 100 000 ل.س في مصرف يمنح فائدة مركبة معدلها 4 % سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكون له 148024.43 ل.س، احسب مدة استثمار هذا المبلغ.

الحـل: نعلم أن: $C_n = 148024.43\,,\quad i = 0.04\ ,\ C = 100000$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

بالتعويض نجد: $148024.43 = 100000(1+0.04)^n$

ومنه: $(1.04)^n = \dfrac{14804.43}{100000} = 1.4802443$

نأخذ لغاريتم الطرفين: $\ln(1.04)^n = \ln(1.4802443)$

وحسب خواص اللغاريتم نجد: $n \cdot \ln(1.04) = \ln(1.4802443)$

$$n = \frac{\ln(1.4802443)}{\ln(1.04)} = \frac{0.39220714}{0.039220713} = 10$$

إذن مدة الاستثمار هي عشر سنوات.

مثـال:

أوجد معدل الفائدة المركبة إذا كانت جملة المبلغ 55839.478 ل.س بعد 10 سنوات هي 100 000 ل.س.

الحـل: نعلم أن: $n=10$ ، $C_{10} = 100000$ ، $C = 55839.478$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

$$100000 = 55839.478(1+i)^{10}$$

$$\frac{100000}{55839.478} = (1+i)^{10} \quad \Rightarrow \quad 1.790847686 = (1+i)^{10}$$

$$(1+i) = (1.790847686)^{\frac{1}{10}} = (1.790847686)^{0.1} = 1.06$$

$$i = 1.06 - 1 = 0.06$$

إذن معدل الفائدة المركبة هو % 6 سنوياً.

مثــال:

مبلغ من المال قدره C ل.س نرغب في استثماره بمعدل فائــدة مركبــة % 4 سنوياً لتكوين مبلغ 100 000 ل.س بعد 6 سنوات لتغطية نفقات الـسكن. فمــا قيمــة المبلغ C.

الحــل: نعلم أن: $n=6 \;,\; i=0.04 \;,\; C_6 = 100000$

ومن معادلة الفائدة المركبة نجد أن: $C_n = C(1+i)^n \;\Rightarrow\; C = C_n(1+i)^{-n}$

$$C = 100000(1+0.04)^{-6} = 100000(1.04)^{-6}$$

$$C = 100000(0.79032) = 79031.5 \quad S.p$$

1ـ4ـ جملة مبلغ عندما تكون مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر والأيام:

إذا كانت مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر (أي عدداً صحيحاً وكسراً).

لنفترض أن الفترة الزمنية هي n سنة و $\frac{\alpha}{\beta}$ في الـسنة $(\alpha < \beta)$، لحـساب جملـة المبلغ في نهاية الفترة الزمنية ($n+\frac{\alpha}{\beta}$) نستخدم إحدى الطريقتين:

1- تحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية n على أساس الفائدة المركبة، أما الفترة الزمنية ($\frac{\alpha}{\beta}$) فتحسب على أساس الفائدة البسيطة وتسمى هذه الطريقة بالطريقـة الحقيقية. وتحسب من العلاقة: $C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^n \cdot (1+\frac{\alpha}{\beta} \cdot i)$

2- تحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية $\frac{\alpha}{\beta}$ على أساس الفائدة المركبة، وتـسمى هذه الطريقة بالطريقة التجارية وتحسب من العلاقة:

$$C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^{n+\frac{\alpha}{\beta}}$$

مثـــال:

احسب جملة مبلغ 000 10 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 6.3 ســنوياً ولمدة 5 سنوات وثلاثة شهور.

الحــل: من نص المسألة لدينا: $n = 5 \; , \; C = 10000 \; , \; i = 0.063$

طريقة أولى:

يُحسب العدد الصحيح من سنوات مدة الاستثمار بقانون الفائدة المركبـــة، أمـــا العدد غير الصحيح لمدة الاستثمار (الأشهر) فيُحسب علـــى أســـاس قـــانون الفائـــدة البسيطة:

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^5\left[1+(0.063)\left(\frac{3}{12}\right)\right] \\ &= 10000(1.063)^5\left[1+(0.063)\cdot(0.25)\right] \\ &= 10000(1.3572702)(1+0.01575) = 13786.47 \quad \text{S.p} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

تحسب كامل مدة الاستثمار على أساس الفائدة المركبة والأشهر بـأجزاء مـــن السنة.

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^{5+\frac{3}{12}} = 10000(1.063)^{5.25} \\ &= 10000(1.37816) = 13781.6 \quad S.p \end{aligned}$$

1ـ5ـ جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبـــة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة:

عند استثمار (اقتراض) مبلغ من المال قدره P ل.س لمدة n مـــن الـــسنوات بفائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات في السنة فإن m تأخذ القيم الآتية:

$m = 1$: الفائدة تضاف مرة واحدة في السنة الكاملة (الفائدة سنوية).

$m = 2$: الفائدة تضاف مرتان في السنة (الفائدة نصف سنوية).

$m = 3$: الفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة (الفائدة $\frac{1}{3}$ سنوية).

$m = 4$: الفائدة تضاف أربع مرات في السنة (الفائدة فصلية أو ربع سنوية).

$m=12$: الفائدة تضاف 12 مرة في السنة (الفائدة شهرية).

$m=365$: الفائدة تضاف 365 مرة في السنة.

تعطى جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر n من السنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة بالصيغة الآتية:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

حيث:

Cــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر أو المقترض.

i ــ معدل الفائدة السنوية الذي يضاف m مرة في السنة.

mــ عدد فترات التركيب (عدد مرات إضافة الفائدة) في السنة الواحدة.

nــ عدد سنوات مدة الاستثمار (مدة الاقتراض).

إن: $\frac{i}{m}$ يمثل معدل الفائدة لفترة إضافة الفائدة (معدل الفائدة الجزئي).

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية (جملة) لمبلغ 1000 ل.س مستثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية 8 % تضاف:

1- مرة واحدة في السنة (الفائدة سنوية).

2- مرتان في السنة (نصف سنوية).

3- أربع مرات في السنة (فصلية).

4- 12 مرة في السنة (شهرية).

الحل: لدينا: $n=3\ ,\ m=1\ ,\ i=0.08,\ C=1000$

1- باستخدام المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \Rightarrow C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{(1)(3)} = 1259.71\quad S.p$$

2- لدينا: $C=1000\ ,i=0.08\ ,\ m=2\ ,\ n=3$

$$C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{3}\right)^{(2)(3)} = 1265.32\quad S.p$$

3- لدينا: $C=1000 \quad , i=0.08 \ , m=4 \ , n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{(4)(3)}=1268.24 \quad S.p$$

4- لدينا: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=12 \ , \ n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{(12)(3)}=1271.75 \quad S.p$$

نلاحظ أن جملة المبلغ تزداد أكثر فأكثر كلما زاد عدد مرات إضافة الفائدة في السنة.

لنضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

جملة المبلغ	الأصل المستثمر	فترة التركيب	المعدل السنوي للفائدة
$1259.71 \ S.p$	$1000 \ S.p$	سنوية $(m=1)$	8%
$1265.32 \ S.p$	$1000 \ S.p$	نصف سنوية $(m=2)$	8%
$1268.24 \ S.p$	$1000 \ S.p$	فصلية $(m=4)$	8%
$1271.75 \ S.p$	$1000 \ S.p$	شهرية $(m=12)$	8%

مثـــال:

ما المبلغ الذي يجب أن تودعه اليوم ولمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة مركبة 10 % سنوياً حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور لتحصل على مبلغ قدره 8000 ل.س.

الحـل: لدينا: $m=4 \ , \ n=5 \ , \ i=0.10 \ , \ C_5=8000$

باستخدام المعادلة:

$$C_n=C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.n}$$

$$8000=C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{(4)(5)}=C\,(1+0.025)^{20}$$

ومنه:

$$C=\frac{8000}{(1.025)^{20}}=4882.17 \ S\cdot P$$

1 ـ6ـ الفائدة المركبة المستمرة طيلة أيام السنة:

لنفرض أن m عدد فترات التركيب في السنة (عدد مرات إضافة الفائدة في السنة) يجري باستمرار طيلة أيام السنة (أي أن $m \to \infty$ تقترب أكثر فأكثر من اللانهاية):

نعيد كتابة المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

بالشكل التالي:

$$C_n = C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

$$\lim_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

لندخل متغيراً جديداً: $u=\frac{m}{i}$. حيث أن: $u \to \infty$ عندما $m \to \infty$،

وبعد التعويض نحصل على:

$$C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ui}\right]^{n} = C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{in}$$

بما أن:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

ومنه نجد:

$$\ell im_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\cdot e^{in}$$

- إن القيمة المستقبلية لمبلغ قدره P ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبة $i\%$ سنوياً تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة يعطى بالعلاقة:

$$A_n = P\cdot e^{i\cdot n}$$

حيث:

C ــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر.

i ــ معدل الفائدة المركبة السنوية .

n ــ الزمن بالسنوات.

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية بعد ثلاث سنوات لمبلغ قدره 1000 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً والفائدة تضاف:

1- بشكل يومي.[1]

2- بشكل مستمر.

(1) ملاحظة: يمكن اعتبار عدد أيام السنة العادية 365 يوماً وعدد أيام السنة الكبيسة 366 يوماً وعدد أيام السنة التجارية 360 يوم.

الحل: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=365 \ , \ n=(365)(3)=1095$

1- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل يومي نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = p\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \Rightarrow C_3 = 1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{1095} \approx 1271.20 \quad S.p$$

2- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل مستمر نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = pe^{in} \Rightarrow C_3 = 1000e^{(0.08)(3)} \approx 1271.25 \quad S.p$$

§-2- المعدل الحقيقي والمعدل الاسمي للفائدة

المعدل الحقيقي هو المعدل الذي تتساوى مدته مع مدة إضافة الفائدة إلـى رأس المال. **والمعدل الحقيقي السنوي** هو مقدار الفائدة الفعلية التي تعود على وحدة النقـود في نهاية السنة على أساس أن الفائدة المستحقة عن كل فترة تضاف إلـى رأس المـال مجرد استحقاقها وتستثمر بالطريقة نفسها التي يستثمر بها رأس المال الأصلي.

المعدل الاسمي هو المعدل الذي لا تتطابق مدته مع مدة إضافة الفائدة إلى رأس المال. **والمعدل الاسمي السنوي** هو حاصل ضرب المعدل عن الفترة التي هي أقل من السنة في عدد الفترات الموجودة في السنة. فإذا قيل أن معدل الفائدة % 4 عن نـصف السنة فإن المعدل السنوي الاسمي يكون: $4\% \times 2 = 8\%$ ونقـول أن معـدل الفائـدة الاسمي % 8 يدفع على مرتين في السنة.

2_1_ العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي للفائدة :

لنفرض أن مبلغاً أصلياً قدره C ل.س استثمر بمعدل فائدة مركبة اسمي j يضاف m من المرات في السنة لنرمز بـ i لمعدل الفائدة الحقيقي السنوي. إن القيمة المستقبلية لمبلغ C ل.س بعد سنة واحدة هي:

$$C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=C(1+i)$$

نقسم طرفي المساواة على C فنجد: $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i$

ومنه نجد : $i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$

من خلال هذه العلاقة يمكننا حساب معدل الفائدة الحقيقي السنوي إذا كان معدل الفائدة المركبة الاسمي معلوماً.

i ــ معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

j ــ معدل الفائدة المركبة الاسمي الذي يضاف m مرة في السنة.

m ــ عدد مرات إضافة الفائدة على المبلغ الأصلي في السنة.

بأخذ الجذر ذي الدليل m لطرفي المساواة :

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i \Rightarrow \left(1+\frac{j}{m}\right)=(1+i)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

نجد: $j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$

من العلاقة الأخيرة يمكننا حساب معدل الفائدة الاسمي السنوي بدلالة معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

مثـــال:

احسب المعدل الحقيقي السنوي الذي يقابل معدل اسمي سنوي % 8 إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل:

1- مرة كل سنة.

2- كل ستة شهور.

3- كل ثلاثة شهور .

4- 12 مرة في السنة.

الحــل: لدينا: $j = 8\ \%$ والمطلوب إيجاد: $i = ?$

باستخدام القانون: $i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$

1- في هذه الحالة نجد أن فترة المعدل الحقيقي هي نفس فترة المعدل الاسمي وهي سنة أي:

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^1 - 1 = 1.08 - 1 = 0.08 = 8\%$$ سنوياً

2- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 2$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 - 1 = (1.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\ \%$$ سنوياً

3- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1 = 0.08243 = 8.234\ \%$$ سنوياً

4- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 12$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = (1.0067)^{12} - 1 = 0.08343 = 8.343\ \%$$ سنوياً

جملة المبلغ بعد 3 سنوات	المبلغ الأصلي	المعدل الحقيقي السنوي	فترة إضافة الفائدة	المعدل الاسمي السنوي
$1000(1+0.08)^3 = 1259.71$	1000	8%	سنوية	8%
$1000(1+0.0816)^3 = 1265.32$	1000	8.16%	نصف سنوية	8%
$1000(1+0.08243)^3 = 1268.23$	1000	8.243%	فصلية	8%
$1000(1+0.08343)^3 = 1271.75$	1000	8.343%	شهرية	8%

يتساوى معدل الفائدة الحقيقي السنوي مع معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة مرة واحدة في السنة، ويكون معدل الفائدة الحقيقي السنوي أكبر من معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة أكثر من مرة واحدة في السنة.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة الحقيقي المقابل لمعدل الفائدة السنوي 8 % إذا كانت الفائدة تضاف كل ربع سنة.

الحـــل:

لدينا: $j = 0.08 \quad ، \quad m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1+0.02)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1$$

$$= 1.08243215 - 1 = 0.08243216 = 8.243216\ \%$$

مثـــال: يعطي أحد المصارف فائدة مركبة معدلها 6.1 % سنوياً تضاف كل ثلاثة أشهر ويعطي مصرف آخر فائدة مركبة معدلها 6 % سنوياً تضاف شهرياً. في أي المصرفين يكون الاستثمار أفضل ؟

الحـــل:

للإجابة على هذا السؤال علينا أن نحسب معدلي الفائدة الحقيقيين السنويين للمصرفين، والمصرف الذي يملك معدل الفائدة الحقيقية السنوية الأكبر يكون الاستثمار فيه أفضل، لأنه يعطي مقدار فائدة أكبر.

معدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الأول i_1 هو:

$$i_1 = (1 + \frac{0.061}{4})^4 - 1 = 0.0624096$$

ومنه: $i_1 = 6.24\%$.

ومعدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الثاني i_2 هو:

$$i_2 = (1 + \frac{0.06}{12})^{12} - 1 = 0.0616778$$

ومنه: $i_2 = 6.16\%$.

نستنتج أن: $i_1 > i_2$ ويكون الاستثمار أفضل لدى المصرف الأول.

§3. خصم الديون بفائدة مركبة:

من الشائع في المعاملات المالية أن يخصم المقرض الفائدة من المبلغ المقترض مقدماً، فمثلاً إذا اقترض شخص مبلغاً قدره C ل.س من مصرف فيقوم المصرف بخصم الفائدة، وفي نهاية المدة يدفع المقترض للمصرف مبلغ C ل.س. تسمى هذه الطريقة بطريقة الخصم، ويسمى المبلغ المطروح بمقدار الخصم، والمبلغ الذي أخذه المقترض بالقيمة الحالية للقرض.

نسمي الفرق بين القيمة الحالية V_p للقرض والتي تساوي $V_p = V_n(1+i)^{-n}$ والقيمة الاسمية V_n للقرض والتي تساوي $V_n = V_p(1+i)^n$ (القيمة المستقبلية) بالخصم، ونرمز للخصم بالحرف D ، حيث:

$$D = V_n - V_p = V_n - V_n(1+i)^{-n} = V_n[\, 1-(1+i)^{-n} \,]$$

3ـ1ـ معدل الخصم :

معدل الخصم: هو مقدار الخصم عن مبلغ وحدة نقدية واحدة، وتستحق الدفع بعد سنة واحدة. نعلم أن:

$$D = V_n - V_p \;\Rightarrow\; V_p = V_n - D \;\Rightarrow\; \frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n - D$$

- لإيجاد القيمة الحالية لوحدة نقدية واحدة تستحق بعد فترة زمنية قدرها سنة نعوض في العلاقة السابقة كل من: $D=d$, $n=1$, $V_n=1$ فنجد أن :

$$\frac{1}{1+i} = 1-d \;\Rightarrow\; d = 1-\frac{1}{1+i}$$

ومنه
$$d = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; \boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

وهو معدل الخصم المركب بدلالة معدل الفائدة المركبة.

- ولنحسب معدل الفائدة المركبة i بدلالة معدل الخصم:

$$d = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; d(1+i) = i. \;\Rightarrow\; d + id = i$$

ومنه:
$$d = i - id \;\Rightarrow\; d = i(1-d) \;\Rightarrow\; \boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

- القيمة الحالية بدلالة معدل الخصم المركب d :

$$\frac{1}{1+i}=1-d \Rightarrow (\frac{1}{1+i})^n=(1-d)^n$$

يضرب الطرفين بـــ V_n نجد:
$$\frac{V_n}{(1+i)^n}=V_n(1-d)^n$$

ومنه:

$$\boxed{V_p=V_n(1-d)^n}$$

مثـــال:

احسب معدلات الخصم المقابلة لمعدلات الفائدة % 5 ، % 6.2 سنوياً.

الحـــل: 1-
$$d=\frac{i}{1+i}=\frac{0.05}{1+0.05}=\frac{0.05}{1.05}=0.0476=4.76\%$$

2-
$$d=\frac{0.063}{1+0.062}=0.05838=5.84\%$$

مثـــال:

احسب معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم % 1.96 ، % 2.439

الحـــل:

باستخدام العلاقة:
$$i=\frac{d}{1-d}$$

$$i=\frac{0.0196}{1-0.0196}=\frac{0.0196}{0.9804}=2\%$$ سنوياً

$$i=\frac{0.02439}{1-0.02439}=\frac{0.0249}{0.97561}=2.5\ \%$$ سنوياً

مثـــال:

سند قيمته الاسمية 60000 ل.س ويستحق الدفع بعد 15 عاماً من الآن، فـــإذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل %7 سنوياً. ما مقدار الخصم؟

الحـــل: لدينا: $n=15$ ، $i=0.07$ ، $V_{15}=60000$

باستخدام قانون الخصم:

$$D=V_n[1-(1+i)^{-n}]=60000[1-(1+0.07)^{-15}]$$
$$=60000[1-(1.07)^{-15}]=38253.23 \quad S.p$$

§4. تسوية الديون بفائدة مركبة

إن تسوية الديون تعني سداد الديون في غير موعد استحقاقها، فإذا تأجل سداد الدين مدة ما فإن قيمته تزداد بمقدار الفوائد التي تستحق على مبلغ الدين خلال مدة التأجيل، وإذا تقدم موعد سداد الدين مدة ما فإن قيمته تنقص إلى القيمة التي لو استثمرت طول مدة التقديم لأصبحت جملتها مساوية لمبلغ الدين الأصلي، بمعنى أن القيمة الاسمية لأي دين تتغير بتغير تاريخ استحقاق الدين.

إن استبدال الديون القديمة بديون جديدة (إعادة جدولة الديون) يخضع للقاعدة الآتية:

القيمة الحالية للديون القديمة (قبل التسوية) = القيمة الحالية للديون الجديدة (بعد التسوية)

يأخذ استبدال الديون (إعادة جدولة الديون) أكثر من شكل نذكر منها:

1- استبدال الدين الأصلي بدين آخر جديد لمدة أطول (أقصر) من مدة الدين الأصلي، أي تأخير (تقديم) تاريخ استحقاق الدين الأصلي.

2- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق الأداء بعد مواعيد استحقاق الديون الأصلية (القديمة).

3- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق قبل مواعيد استحقاق الديون الأصلية .

4- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بعدة ديون جديدة مختلفة سواء من حيث القيمة أومن حيث تاريخ الاستحقاق أو كلاهما معاً.

مثـــال:

تاجر مدين لدائن بالمبالغ الآتية:

30000 ل.س تستحق السداد بعد سنة واحدة من الآن .

40000 ل.س تستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

50000 ل.س تستحق السداد بعد ست سنوات من الآن.

طلب هذا التاجر من الدائن استبدال الديون الثلاثة الأصلية بدين جديد يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن، فإذا كان معدل الفائدة المركبة 5 % ما قيمة الدين الجديد؟

الحــل: لنرمز للقيمة الاسمية للدين الجديد بـــ $V_{n'}$ ومن نص المسألة لدينا:

$$V_{n_1} = 30000 \qquad n_1 = 1 \quad ، \quad i = 0.05$$
$$V_{n_2} = 40000 \qquad n_2 = 3$$
$$V_{n_3} = 50000 \qquad n_3 = 6$$

بحسب قاعدة تسوية الديون:

القيمة الحالية للديون الثلاثة الأصلية = القيمة الحالية للدين الجديد.

$$\frac{V_{n'}}{(1+i)^{n'}} = \frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}} + \frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}} + \frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$$

$$\frac{V_{n'}}{(1.05)^3} = \frac{50000}{(1.05)^6} + \frac{40000}{(1.05)^3} + \frac{30000}{(1.05)^1}$$

ومنه نجد : $V_{n'} = 116266.88 \quad S.p$

مثـــال:

تاجر مدين بثلاثة ديون قيمها الاسمية هي 70000 ، 90000 ، 120000 ل.س وتستحق السداد بعد 5 , 8 , 10 سنوات على الترتيب. اتفق مع دائنة على خصم هــذه الديون. ما مقدار الخصم إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 12 % سنوياً ؟

الحــل: $V_{n_1} = 70000 \quad ; \quad V_{n_2} = 90000 \quad ، \quad V_{n_3} = 120000$

$$n_1 = 5 \quad ، \quad n_2 = 8 \quad ، \quad n_3 = 10$$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للــدين الثاني + القيمة الحالية للدين الثالث

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}} + \frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}} + \frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{120000}{(1+0.12)^{10}} + \frac{90000}{(1+0.12)^{8}} + \frac{70000}{(1+0.12)^{5}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $3863.6788 + 36349.490 + 39719.879$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = 114706.157

الخصمَ = مجموع القيم الاسمية للديون الثلاثة – القيمة الحالية للديون الثلاثة

$$D = (70000 + 90000 + 120000) - 44706.157 = 165293.843 \quad S.p$$