ثانياً: الإضافية Additivity :

أن هذا الافتراض يعني أن قيمة دالة الهدف والموارد الكلية المستخدمة في المشكلة يمكن إيجادها من خلال جمع مساهمة دالة الهدف والموارد المستخدمة لجميع المتغيرات. أي أن قيمة دالة الهدف تمثل مجموع مساهمات جميع المتغيرات الأساسية، وكذلك فإن الموارد الكلية المستخدمة تمثل مجموع الموارد المستخدمة لكل متغير من هذه المتغيرات.

ثالثاً: قابلية القسمة Divisibility :

وتعني هذه المتغيرات يمكن أن تأخذ قيماً كسرية وليس بالضرورة أن تكون جميع قيم المتغيرات أعداداً صحيحة.

رابعاً: اللاسلبية Negativity–Non :

وتعني هذه أن متغيرات القرار لا يمكن أن تكتب كميات ومقادير سالبة، حيث أن من المعروف من الناحية المنطقية أن القيم السالبة للكميات والمقادير تعتبر مستحيلة. إذ لا يمكن أن يكتب الإنتاج أو التسويق للبضائع والسلع بالسالب. وعادة يعبر عن هذه الافتراض ($xj \geq 0$).

4.5 طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار إليها أعلاه تبدأ بعد ذلك مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. يتفق معظم الكتاب المهتمين بأسلوب البرمجة الخطية بأن هناك ثلاث طرق أساسية لحل نموذج البرمجة الخطية، وهي:

أولاً: الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method .

ثانياً: الطريقة الجبرية Algebric Method .

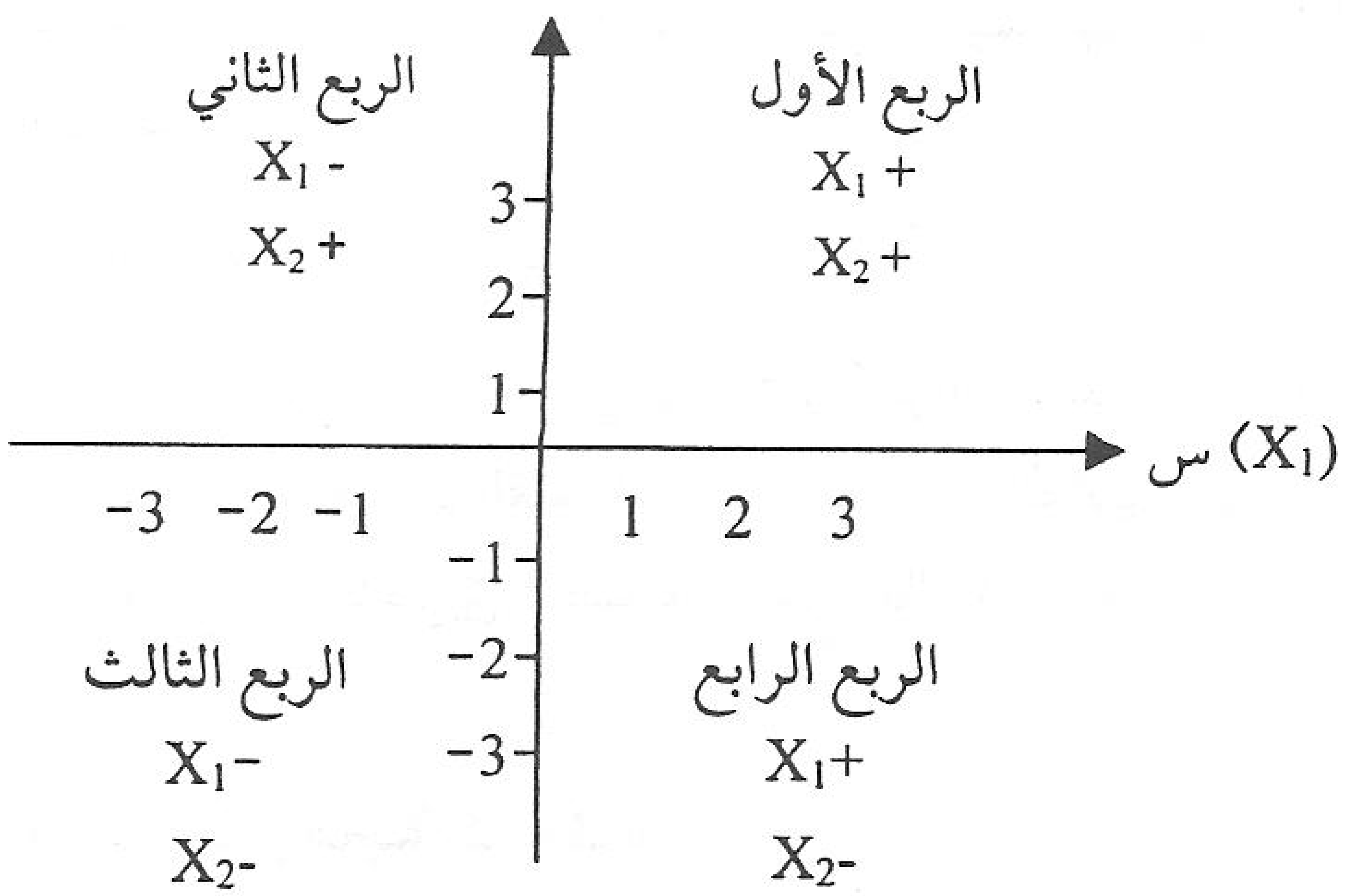
ثالثاً: الطريقة المبسطة (السيمبلكس) Simplex Method .

الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphic Method :

تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الأساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة

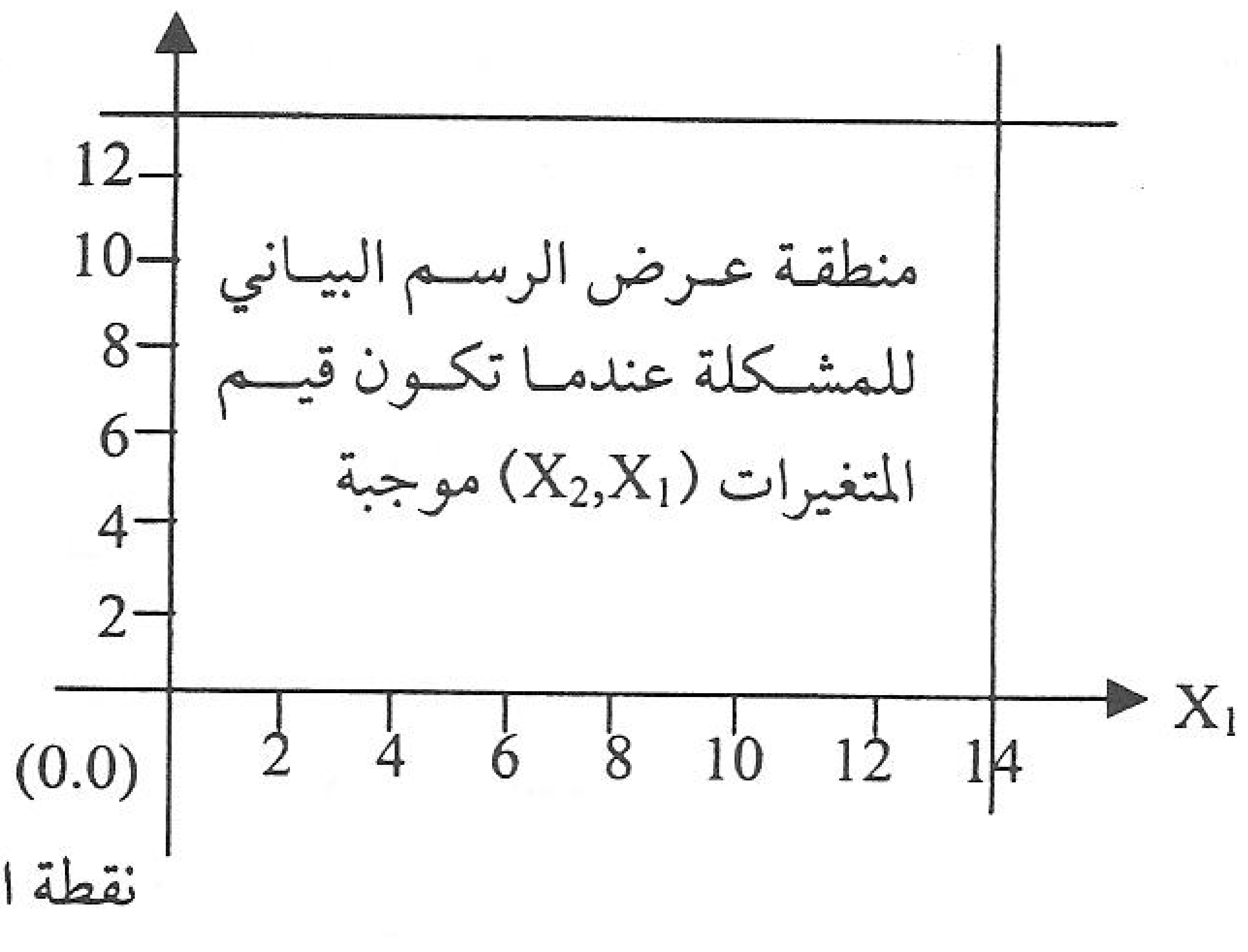
الخطية. وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون عدد المتغيرات للمشكلة اثنين فقط (X_1, X_2). أن فكرة هذه الطريقة تعتمد بالدرجة الأساس على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة، الذي من المفروض أن يتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية. ومن أجل توضيح فكرة هذه الطريقة ينبغي تقديم فكرة أولية عن هذه الإحداثيات. حيث تعبر هذه الاحداثيات عن ما يسمى بالمحاور السينية (الأفقية) والمحاور الصادية (العمودية) التي يشيع استخدامها في الهندسة التحليلية وهي كما في الشكل رقم (5-1).

الشكل رقم (5-1) المحاور الأفقية والعمودية



يلاحظ من الشكل رقم (5-1) أن كل قيم المتغيرات (X_2,X_1) في الربع الأول موجبة، في حين كانت مختلفة الإشارة في الأرباع الأخرى. لذلك فإن الطريقة البيانية تعتمد بشكل أساسي على إظهار الحلول والنتائج النهائية للمشكلة في الربع الأول لكون قيم المتغيرات (X_2,X_1) تتفق مع الافتراض الرابع الوارد ذكره أعلاه والذي ينص على أن كل قسم المتغيرات (Xj) ينبغي أن تكون موجبة ($Xj \geq 0$) أي لا يمكن قبول القيم السالبة. ولهذا السبب يتم التركيز على الربع الأول فقط وعدم إظهار بقية الأرباع كما هو واضح في الشكل رقم (5-2).

الشكل رقم (5-2) الربع الأول الذي قيم فيه عرض الرسم البياني للمشكلة حيث قيم المتغيرات (X_2,X_1) موجبة.



من أجل توضيح فكرة الحل بالطريقة البيانية نعتمد المثال التالي:

تتوفر لدى إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية نوعين من المواد الأولية البديلة وذلك بكميات محدودة. ترغب هذه المنظمة في خرج نوعين من المنتجات الغذائية وهما (المنتجA ، المنتج B).

يحتاج المنتج A إلى 2 وحدة من المادة الأولية الأولى، في حين يحتاج إلى 6 وحدة من المادة الأولية الثانية حتى يمكن إنتاجه. المنتج الثاني B يحتاج إلى 4 وحدة من المادة الأولية الأولى، أما إذا قررت استخدام المادة الأولية الثاني فإنه سوف يحتاج إلى 3 وحدة.

وقد علمت ما يلي:

1- كمية المواد الأولية المتوفرة من النوع الأول هي بحدود (40) وحدة ومن النوع لثاني (60) وحدة.

2- الربح المتوقع الحصول عليه عند بيع المنتج هو 8 دينار وعند بيع المنتج B الربح المتوقع هو 4 دينار.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- استخدام طريقة الرسم البياني Graphical Method لتحديد أفضل كمية من المنتج A والمنتج B تم مصلحة المنشأة إنتاجها وبما يؤدي إلى تحقيق أكبر كمية من الأرباح في ظل تحقيق حالة الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسيين.

الحل:

لحل هكذا نوع من المشاكل يفترض في بداية الأمر عرض البيانات المتوفرة في إطار جدول خاص كما هو واضح أدناه:

المنتجات / المواد الأولية	المنتج A	المنتج B	مقدار المتوفر من المواد الأولية
المادة الأولية I	2	4	40 وحدة
المادة الأولية II	6	3	60 وحدة
الأرباح المتوقعة	8	5	

نفرض أن كمية الإنتاج ⇐ X

كمية الإنتاج من المنتج الأول A. ⇐ X_1

كمية الانتاج من المنتج الثاني B. ⇐ X_2

الأرباح الكلية المتوقعة ⇐ Z

وعليه فإن مقدار ما نحتاجه الكمية X_1 من المنتج A_1 من المادة الأولية الأولى هي X_1 مضروبة في 2 ما نحتاجه الوحدة الواحدة من المنتوج المذكور، أي بعبارة أخرى يكون لدينا ($2X_1$). وهكذا بالنسبة لبقية القيم، علماً بأن مقدار ما يتم استهلاكه من المادة الأولية الأولى لطرح المنتج A. والمنتج B ينبغي أن يكون مساوياً أو أقل من الكمية المتوفرة في المخازن من المادة الأولية المذكورة والبالغة 40 وحدة، أي أن:

$2x_1 + 4 \times 2 \leq 40$ .... (1) فيه استخدام المادة الأولية I.

وهكذا بالنسبة للمادة الأولية الثانية، وعندها نحصل على:

$6x_1\ 3 \times 2 \leq 60$ .... (2) فيه استخدام المادة الأولية II

وإذا ما علمنا أن الأرباح الكلية المتوقعة في بيع المنتج .Aومن بيع المنتج B تحسب من خلال معادلة تجمع الاثنين، ينبغي أن تصل إلى أعلى قيمة ممكنة، أي أن :

$$Z=5x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$$

فإن بناءاً على ما تقدم يمكن جمع كافة عناصر النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدرس وذلك كما يلي :

القيود $\begin{cases} 1 .... \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 2.... \quad 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \end{cases}$

دالة الهدف $Z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

قيود اللاسلبية $x1 , x2 \geq 0$

أن القيد الأول والثاني مكتوبان بصيغة المتراجحات أو المتباينات لذلك لا يمكن رسم أو التعامل مع هذه العلاقات الرياضية إلا بعد تحويلها إلى صيغة المعادلات الرياضية المستقرة. وبشكل عام هنالك ثلاثة طرق أساسية يتم بموجبها تحويل المتراجحة أو المتباينة إلى معادلة رياضية، وهي :

1. طريقة إضافة المتغير الراكد (s+) أو طرح المتغير الفائض (s-).
2. طريقة تجزئة العلامة الرياضية.
3. طريقة الفرضية.

بالنسبة للطريقة الأولى سبق التطرق إليها عند الحديث عن تحويل النموذج الرياضي المكتوب بالصيغة القياسية، وسوف يتم التطرف لذلك عند توضيح الحل الجبري لاعتماد هذه الطريقة عليها.

أما بالنسبة لطريقة تجزئة العلامة الرياضية فإن المقصود بها تجزئة العلامة :

$\leq$ إلى أقل $<$ ويساوي $=$

والعلامة : $\geq$ إلى أكبر $>$ ويساوي $=$

وعليه فإن القيد الأول يمكن أن يكتب كما يلي :

$$2x_1 = 4x_2 < 40$$

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

أما الطريقة الثالثة فإن المقصود بهذه الطريق وضع افتراض سبق وهو أن كل ما هو متوفر من مواد أولية أو مستلزمات إنتاج يتم استخدامه بشكل كامل في العملية الإنتاجية، على هذا الأساس فإن من المفروض اعتماد الصيغة الرياضية للقيد الذي يكتب بعلامة المساواة، أي أن: [1]

$$2x_1 + 4x_1 = 40$$

العلاقة الرياضية هذه تعبر عن استغلال المادة الأصلية الأولى بالكامل لطرح كل من المنتج الأول والمنتج الثاني بالكميات x_2 ، x_2 وهي معادلة رياضية من الدرجة الأولى. تعبر هذه المعادلة عن خط مستقيم، ولرسم الخط المستقيم ينبغي معرفة عنه نقطتين تقع أحد هاتين النقطتين على المحور الأفقي والثانية على المحور العمودي، ويتم التعرف على هذه النقاط وفق الفرضيات التالية : [1]

1- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.1 فقط، لذلك سوف لن يطرح المنتج No.2، أي أن :

$$X_2 = 0$$

$$\therefore\ 2X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{2} = 20$$

وعليه فإن إحداثيات النقطة الأولى هي : (2 , 20) .

2- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.2 فقط، لذلك لن يطرح المنتج No.1 ، أي أن:

$$X_1 = 0$$

$$\therefore\ 2X_2 = 40$$

$$X_2 = \frac{40}{2} = 20$$

---

(1) إذا كان أحد التغيرات مرفوع للقوة الثانية أي (x_1^2 أو x_2^2) فإن هذه المعادلة تعبر عن منحني.

(1) تستخدم هذه الفرضيات سواء كانت الطريقة المعتمدة في تحويل المتباينة إلى معادلة هي طريقة تجزئة العلامة الرياضية أم طريقة الفرضية.

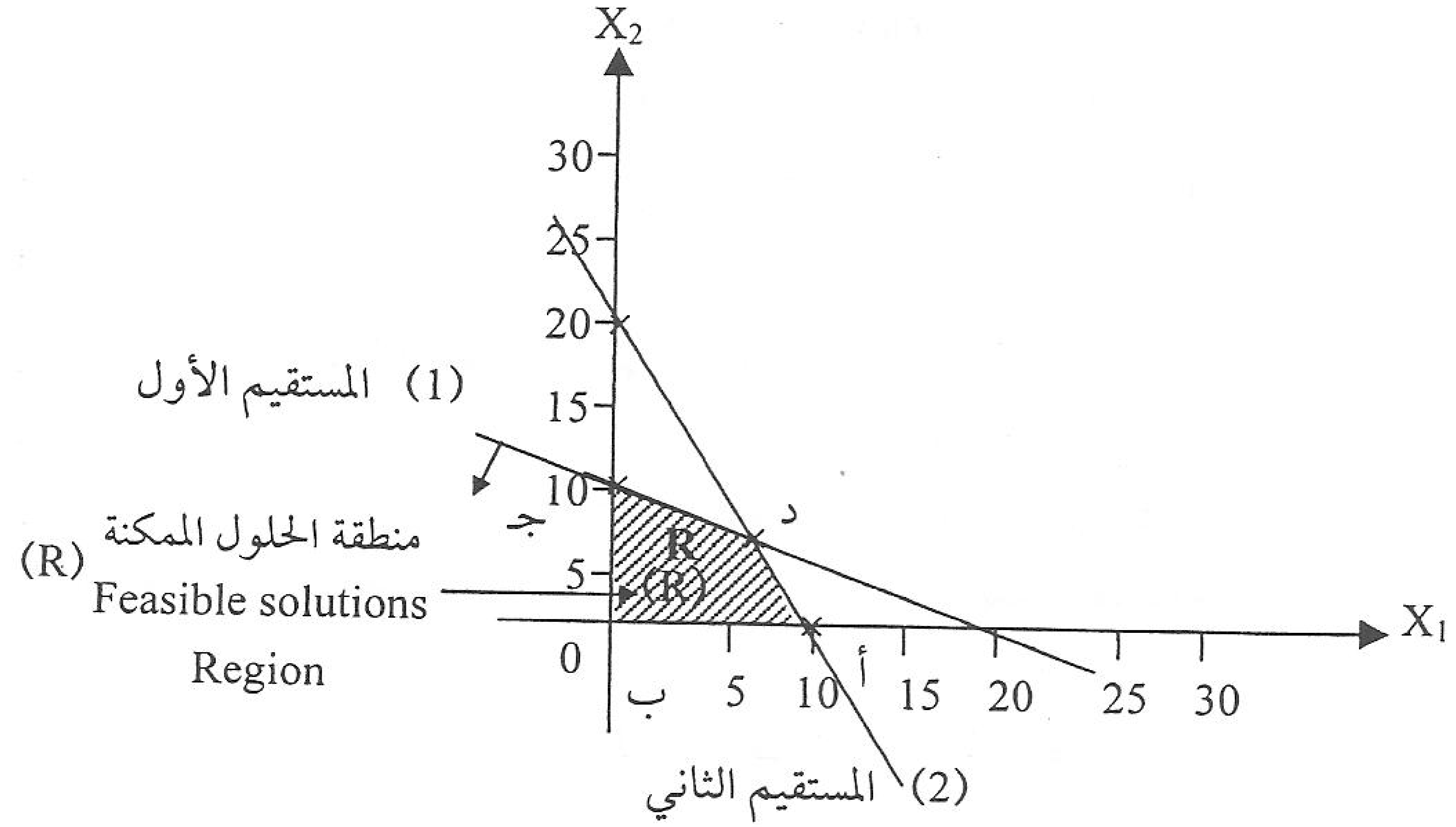
وعليه فإن إحداثيات النقطة الثانية هي : (10 ، 0)

وبنفس الطريقة بالنسبة للقيد الثاني نحصل على النقاط التالية :

النقطة الأولى : (10,0)

النقطة الثانية : (0.20)

بعد ذلك يتم رسم كلا المستقيمين ضمن الإحداثيات الأفقية والعمودية التي تم توضيحه سابقاً ونحصل الرسم البياني للمشكلة كما هو واضح في الشكل رقم (5-3).

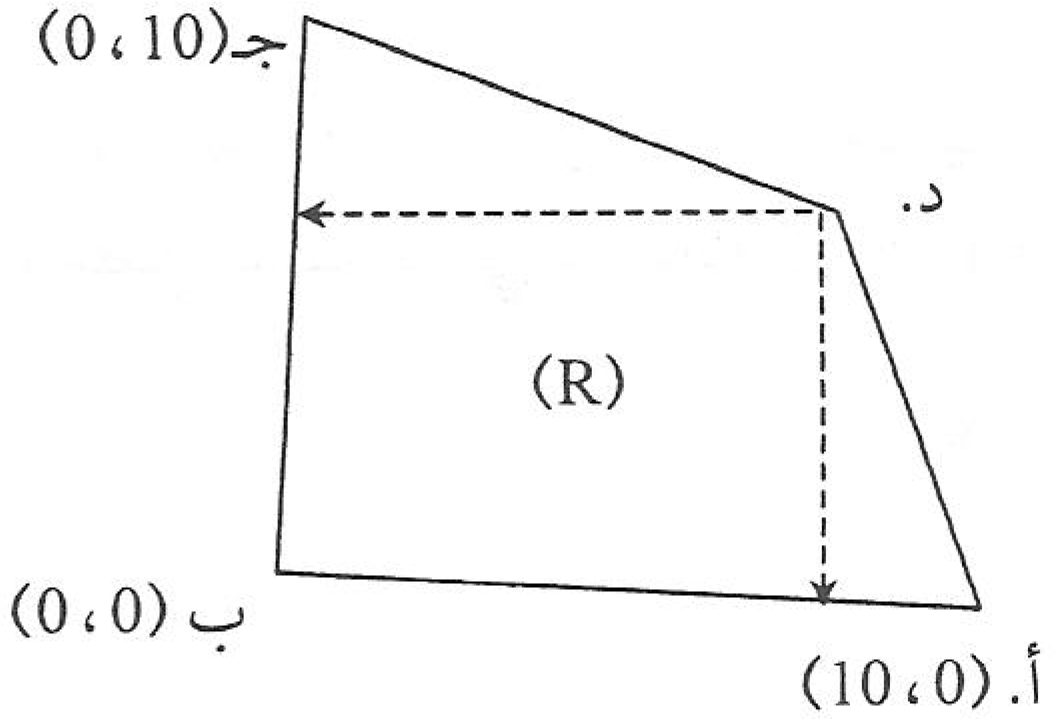


أن المساحة الواقعة تحت المستقيم الأول تحقق العلاقة الرياضية الأولى ($2x_1+4x_2\leq40$) بحيث أن أي نقطة واقعة تحت المستقيم أو عليه تؤخذ بشكل عشوائي وعند تعويضها في العلاقة المذكورة ينبغي أن تحققها. في حين أن أي نقطة لو أخذت خارج المستقيم أو عليه ينبغي أن تحقق العلاقة ($2X_1 + 4X_2 \geq 40$). وعلى هذا الأساس فإن السهم المثبت على المستقيم يتجه إلى الداخل ونفس الشيء يقال عن العلاقة الرياضية الثانية والتي تم تمثيلها من خلال المستقيم الثاني.

أن تقاطع المساحة التي تحقق المستقيم الأول مع المساحة التي تحقق المستقيم الثاني إلى ظهور منطقة مشتركة يطلق عليها اسم منطقة الحلول Solutions region

ويرمز لها من خلال الحرف R وأن الشكل الهندسي لهذه المنطقة موضح بالشكل رقم (5-4).

الشكل رقم (5-4) منطقة الحلول المركبة (R)



أن منطقة الحلول (R) هي عبارة عن شكل هندسي متوازي الأضلاع أو رباعي أو ما شابه ذلك وهو بمثابة مستوي ظهر بسبب تقاطع عدد من المستقيمات. لهذا الشكل نقاط أو زوايا متطرفة يتم التعرف عليها من خلال إحداثيات معينة. وفي مثالنا هذا نلاحظ أن النقطة (.د) مجهولة الاحداثيات، حيث يتم التعرف عليها بموجب أحد الطريقتين التاليتين :

1- طريق الرسم البياني، وذلك من خلال إنزال المساقط العمودية من نقطة تقاطع المستقيمان الأول والثاني عند النقطة (د) إلى المحور الأفقي والعمودي حيث نلاحظه أن إحداثيات هذه النقطة هي تقريباً (7,7).

2- الطريقة الجبرية، حيث بموجب هذه الطريقة يتم حساب إحداثيات هذه النقطة بالاعتماد على المستقيمات المتقاطعة عند النقطة (د) وذلك من خلال حل معادلات هذه المستقيمات أنياً وذلك كما يلي :

$2X1 + 4X2 = 40$ معادلة المستقيم الأول

$\underline{6X_1 + 3X_2 = 60}$ معادلة المستقيم الثاني

ويتم في البداية توحيد معادلات أحد متغيرات المعادلات أعلاه وليكن ذلك هو المتغير X_1 مع تغير الإشارة لأجل عملية الطرح ويكون ذلك بضرب المعادلة الأولى بـ (3-) ونحصل على ما يلي :

$$-6X_1 - 12X_2 = -120$$

$$\underline{+6_1 + 3X_2 \quad = +60}$$

وبالحذف نحصل على:

$$\text{X-1} \qquad -9X_2 = -60$$

$$9X_2 = 60$$

$$\therefore\ X_2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \cong 6.7$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على:

$$6X_1 = 3\ (6.7) = 60$$

$$6X_1 + 20.01 = 60$$

$$6X_1 = 60\text{-}20.0$$

$$6X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{6} \cong 6.7$$

يتضح مما تقدم إن الطريقة الجبرية هي أكثر دقة من طريقة الرسم.

بعد أن تم تحديد إحداثيات النقطة (د) يتم التعريف في معادلة دالة الهدف لتحديد قيمة الحل الأمثل الذي يعبر عن الأرباح الكلية المتوقعة، وذلك كما يلي:

$$Z = 8X_1 + 5X_2 \rightarrow \text{Max}$$

أ. (10,0) $\quad Z = 8\ (10) + 5\ (0) \rightarrow 80$

ب. (0,0) $\quad Z = 8\ (0\ ) + 5(0) \rightarrow 0$

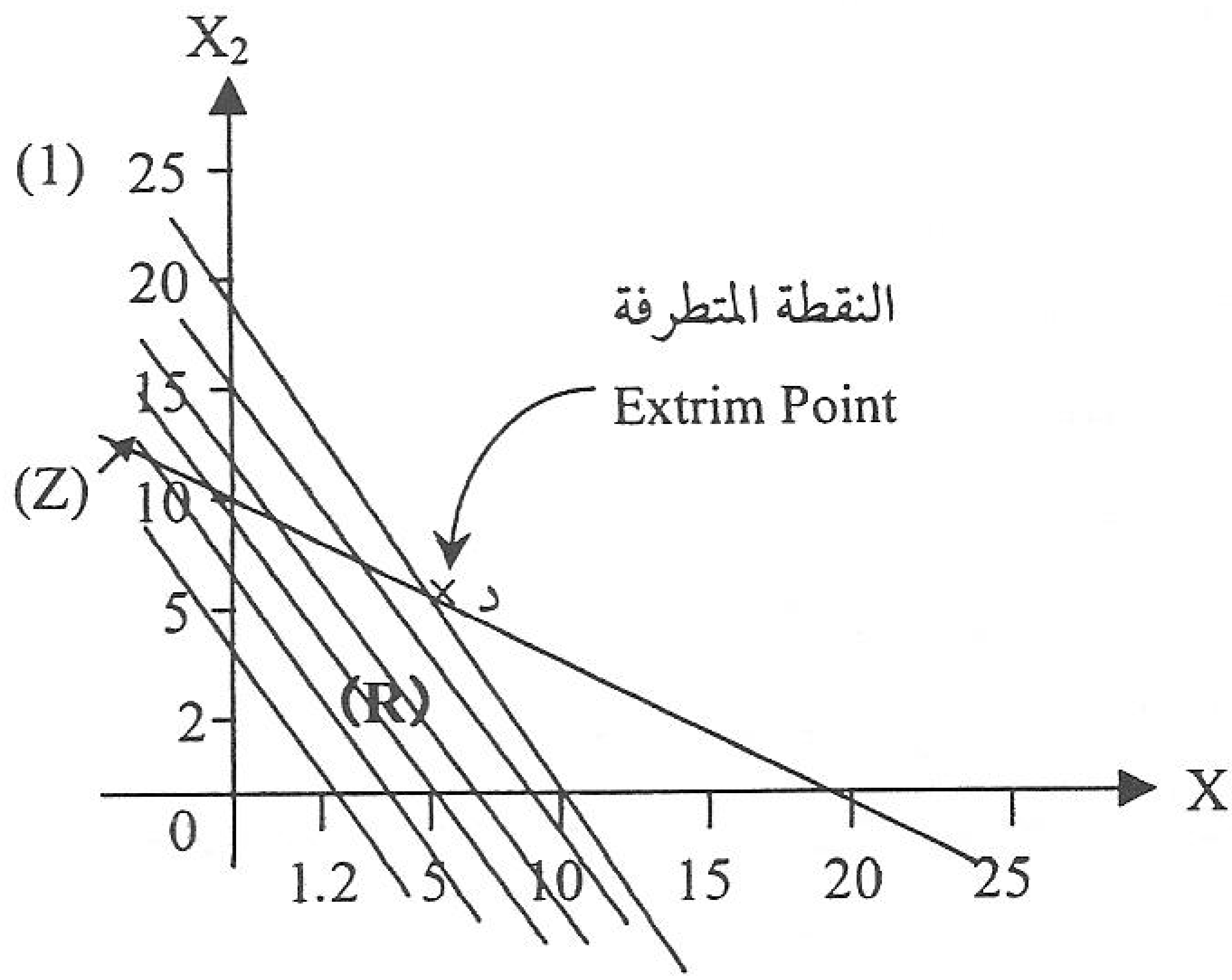
جـ. (0,10) $\quad Z = 8(0) + 5\ (10) \rightarrow 50$

د. (6.7, 6.7) $\quad Z = 8(6.7) + 5(6.7) \rightarrow 87.1$ الحل الأمثل

يتضح مما تقدم أن الحل الأمثل هو عند النقطة (د) لكون قيم احداثيات النقطة أدت إلى الحصول على أكبر قدر ممكن من الأرباح المتوقعة. وتفسر هذه النقاط الأربعة بأنها عبارة عن أربعة بدائل من خطط الإنتاج المقترحة، وأن خطة الإنتاج المثلى هي التي تقع عند النقطة (د) والتي بموجبها ينبغي طرح كل من المنتج الأول والثاني بنفس المقدار وهو (6.7) وحدة وهذا القرار يؤدي إلى الحصول على 87.1 وحدة نقدية من

البعيد عن نقطة الأصـل ، وأن آخر مستقيم يمس المنطقـة (R) بنقطـة واحـدة لابـد وأن تكون هذه النقطة هي (د) التي هي عادة تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتعـرف بالنقطة المتطرفة (Expreim point) كما هو واضح في الشكل رقم (5-5).

الشكل رقم (5-5) تأكيد أن نقطة د وتمثل نقطة الحل الأمثل.



ويتم رسم مستقيم معادلـة دالـة الهـدف بعـد أن تؤخـذ قيـم افتراضيـة للمقـدار Z وذلك كما يلي :

$$Z = 8X_1 + 5X_2$$
$$10 = 8X_1 + 5X_2$$

نفرض أن : $Z = 10$

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 0 \\ 8X_1 &= 10 \\ X_1 &= \frac{10}{3} = 1.2 \end{aligned}\right\} (1.2\ ,\ 0)$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ 5X_2 &= 10 \\ X_2 &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}\right\} \quad (0.2)$$

من الشكل رقم (5-5) يتضح أن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل، وبعبارة أخرى عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف فإن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل.

أن نقطة الحل الأمثل يمكن أن تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل، وذلك إذا كان المطلوب تصغير دالة الهدف، وهذه هي الحالة الأخرى من حالات الحل بطريقة الرسم، وذلك عندما تكون منطقة الحلول الممكنة واقعة بين المستقيمات المتقاطعة والزاوية البعيدة من الربع الأول، ولأجل توضيح هذه الحالة نعتمد المثال التالي:

تعاقدت إحدى دور الحضانة مع إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية المتخصصة بصناعة المواد الغذائية ذات المواصفات الخاصة، لتجهيزها بكميات من المواد الغذائية المذكورة. وتم الاتفاق على أن تحوي هذه المواد الغذائية على أنواع معينة من الفيتامينات، وهي الفيتامين (A) بمقدار (40) وحدة، الفيتامين (B) بمقدار (50) وحدة والفيتامين (C) بمقدار (49) وحدة. وإذا علمت أن منظمة الأعمال الإنتاجية التي تم التعاقد معها تنتج نوعين من المواد الغذائية، وهي المادة الغذائية رقم (1) والمادة الغذائية رقم (2). والجدول رقم (5-2) يوضح المواصفات الإنتاجية لهذه المواد الغذائية من حيث مقدار الفيتامينات المطلوبة لكل نوع من أنواع المواد الغذائية مع كلفة الإنتاج للوحدة الواحدة.

جدول رقم (5-2) بيانات المشكلة

المنتجات / المواد الأولية	المنتج رقم (1)	المنتج رقم(2)	مقدار المتوفر من المواد الأولية
vitamin A	2	4	40 وحدة
Vitamins B	10	5	50 وحدة
Vitamin C.	7	7	49 وحدة
الكلفة المتوقعة	8	5	

المطلوب:

ما هي الكمية المثلى التي ينبغي إنتاجها من المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) بحيث تكون مقدار الفيتامينات المكتسبة من الأنواع الثلاث هي أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج هي أقل ما يمكن.

الحل:

أن حل هذه المشكلة بطريقة الرسم يتم بنفس الخطوات التي تم اعتمادها في المثال السابق ، وعادة في البداية الخطوة الأولى صياغة النموذج الرياضي ، وذلك كما يلي :

الخطوة الأولى:

صياغة النموذج الرياضي بعد وضع الافتراضات التالية :

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Rightarrow X$

∴ كمية المادة الغذائية رقم (1) $\Rightarrow X_1$

كمية المادة الغذائية رقم (2) $\Rightarrow X_2$

التكاليف الكلية المتوقعة $\Rightarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية لنموذج المشكلة هي :

$4X1 + 10X2 \geq 40$ .... (1) قيد احتواء الفيتامين (A)

$10X_1 + 5X_2 \geq 50$ .... (2) قيد احتواء الفيتامين (B)

$7X1 + 7X2 \geq 49$ .... (3) قيد احتواء الفيتامين (C)

$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$.

$X_1 , X_2 \geq 0$

الخطوة الثانية :

تحديد إحداثيات المستقيمات التي تعبر عن القيود أعلاه وذلك كما يلي :

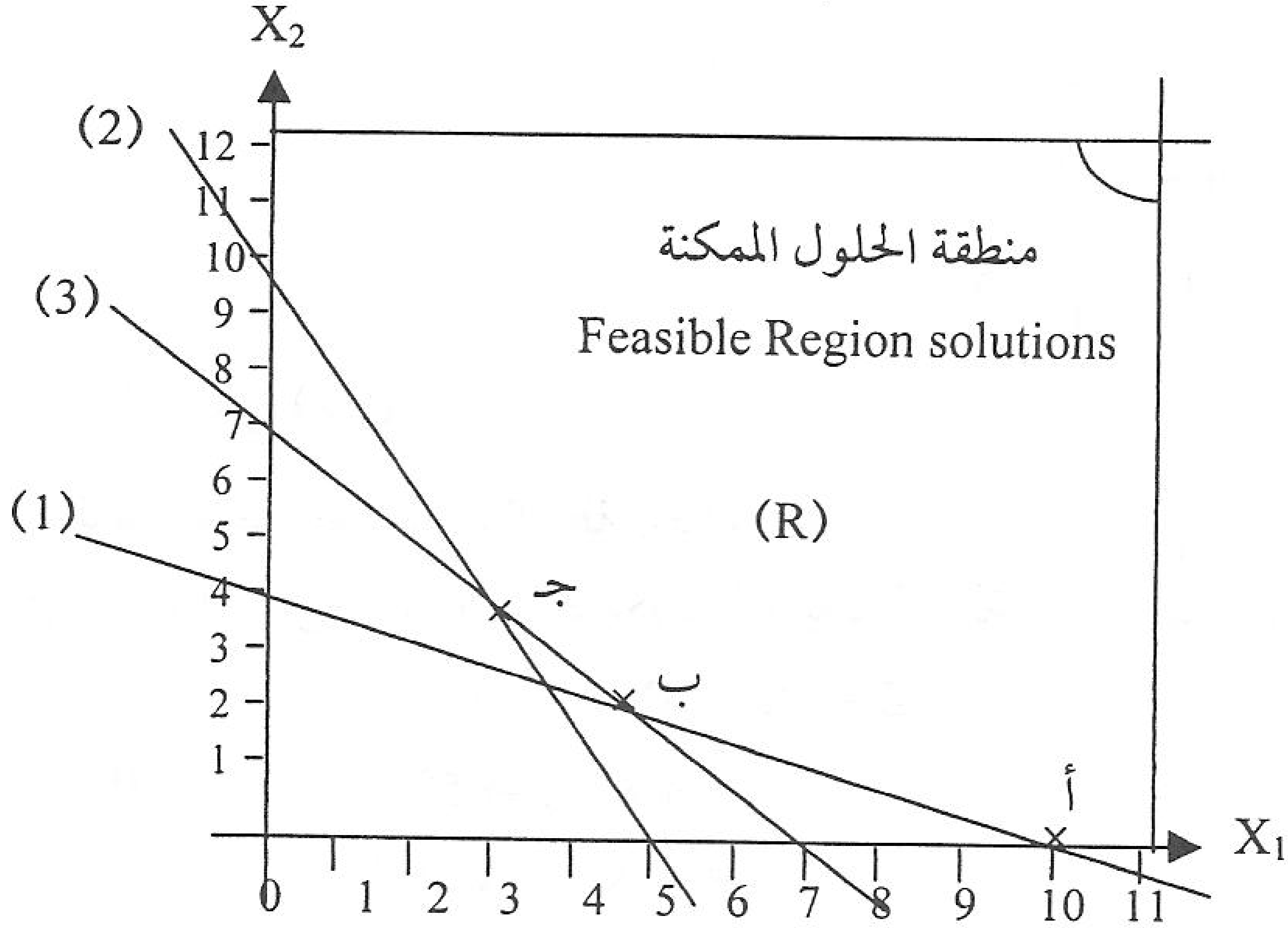
إحداثيات المستقيم الأول (0.4) و (10.0)

إحداثيات المستقيم الثاني (10.0) و (5.0)

إحداثيات المستقيم الثالث (0.7) و (7.0)

وعلى هذا الأساس يتم تصميم الشكل البياني الذي يعبر عن المشكلة ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-6).

الشكل رقم (5-6) منطقة الحلول الممكنة للمشكلة



من الشكل البياني رقم (5-6) يتضح أن النقاط التي تعبر عن الحل الأفضل هي أربعة نقاط (أ، ب، جـ، د). أن إحداثيات النقطة (أ) والنقطة (د) معروفة بينما نجد أن إحداثيات النقطة (ب) والنقطة (جـ) مجهولة. وأفضل طريقة لتحديدها هي طريقة الحل باستخدام الطريقة الجبرية أو ما يعرف بطريقة حل المعادلات الآنية وذلك كما يلي :

النقطة (ب) : نحدد من تقاطع المستقيم الثالث والأول، أي أن :

$4X_1 = 10X_2 = 40$ .... (1) بضرب طرفي المعادلة × 7-

$7X_1 + 7X_2 = 49$ .... (2) بضرب طرفي المعادلة × 4

بالحذف

$$-28X_1 - 70X_2 = -280$$
$$+28X_1 + 28X_2 = +196$$

$$-42X_2 = -84 \qquad -1\ X$$

$$42X_2 = 84$$

$$\therefore X_2 = \frac{84}{42} = 2$$

وبالتعويض في أحد المعادلتين أعلاه، نحصل على قيمة X_1 كما يلي :

$$4X_1 + 10(2) = 40$$

$$4X_1 + 20 = 40$$

$$4X_1 = 40 - 20$$

$$4X_1 = 20$$

$$\therefore X1 = \frac{20}{4} = 5$$

∴ إحداثيات النقطة ب هي (5.2) .

وبنفس الطريقة تحسب إحداثيات النقطة (جـ) من خلال تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (3) حيث نحصل على (3.4)، بذلك يكون التعريف في دالة الهدف كما يلي :

$$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$$

أ .	(10.0)	$Z = 5\ (10) + 8\ (0) \rightarrow 50$
ب.	(5.2)	$* Z = 5\ (5) + 8(2) \rightarrow 41$
جـ .	(3.4)	$Z = 5\ (3) + 8(4) \rightarrow 47$
د .	(0.10)	$Z = 5\ (0) + 8\ (10) \rightarrow 80$

ومن ذلك يتضح أن على دار الحضانة التعاقد للحصول على 5 وحدة من المنتج رقم (1) و (2) وحدة من المنتج رقم (2) حيث عند هذه الكميات من الإنتاج سوف تكون كمية الفيتامينات المكتسبة من قبل الأطفال أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج سوف تكون أقل ما يمكن وهي 41 وحدة نقدية، وهذه النتائج تعبر عن الحل الأمثل للمشكلة.

2.4.5 الطريقة الجبرية Algerbric Method :

أن هذه الطريقة هي من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري وفق احتمالات القيم المتوقعة للمتغيرات (X_2, X_1) وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المتغيرات في النموذج الرياضي اثنين فقط، وهي لا تتطلب أي رسم عند تحديد الحلول الممكنة والحل الأفضل والحل الأمثل للمشكلة. الفكرة الأساسية