نموذج النقل

٥-١ مقدمة

تُعَدُّ مسألة النقل من المسائل الهامة في بحوث العمليات، ويمكن عَدُّها نوعاً من أنواع البرمجة الخطية. يتضح من التسمية أن الهدف هو إيجاد أدنى كلفة لنقل منتج أو مادة ما من عدد من المنابع إلى عدد من المصارف. مثلاً، يمكن نقل منتج ما من عدة مصانع (منابع) إلى عدة ورش رئيسية (مصارف)، أو توزيع أعمال معينة على آلات محددة، أو توزيع موظفين فازوا بمسابقة للتعيين في وظائف مختلفة. جميع هذه المسائل وسواها يمكن أن تصاغ بالاعتماد على تعريف مسألة النقل. وهذا ما ينطبق على مسائل أخرى عديدة، مثل شبكات توزيع المياه من عدد من المستودعات الرئيسية، وكذلك الأمر بالنسبة لتخديم مناطق مختلفة بأجهزة الهاتف من قبل عدة مقاسم رئيسية، وتوزيع العمال أو الأعمال على آلات ضمن ورشة ما لتنفيذ عدد محدد من الأعمال، وكذلك مسألة الدفاع الجوي وغيرها. يمكن استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة. ولكن مميزاتها الخاصة تمكن من حلها بطرق أكثر سهولة.

٥-٢ نموذج مسألة النقل

لو فرضنا أنه لدينا m منبع و n مصرف وأن:

a_i هي عدد الوحدات المتوافرة في المنبع i، حيث أن $i=1,2,\dots,m$.

b_j هي عدد الوحدات المطلوبة في المصرف j، حيث أن $j=1,2,\dots,n$.

c_{ij} هي كلفة نقل الوحدة من المنتج على الطريق (i,j) الذي يصل بين المنبع i والمصرف j.

الجدول ٥-٢

المصارف j

المنابع i	1	2	3	المتوافر
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
المطلوب	b_1	b_2	b_3	

يُعَدُّ الاتزان أحد أهم خواص نموذج مسألة النقل، لأنه يوضح أنه من الممكن تلبية متطلبات السوق إذا وفقط إذا كانت الكمية الموردة من المخازن مساوية على الأقل الطلبات الكلية في الأسواق. حيث يجب أن يتساوى مجموع المتوافر في كل المنابع مع مجموع المطلوب في كل المصارف، أي أن العلاقة التالية يجب أن تكون محققة، لأن جميع تقنيات الحل تعتمد على اتزان النموذج:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

إذا لم يكن النموذج متزناً، وهذا هو الحال في المسائل الواقعية، يمكن فرض وجود منابع أو مصارف وهمية إضافية بطلب أو متوافر وهمي يساوي الفرق بين المتوافر والمطلوب، بحيث يصبح النموذج متزناً. سوف توضح هذه النقطة في فقرة تالية.

٥-٣ تقنية مسألة النقل

يمكن إيجاز الخطوات الأساسية لتقنية مسألة النقل مقارنة مع حل أي برنامج خطي كما يلي:

١- إيجاد حل أساسي أولي ملائم.

٢- إذا كانت جميع المتغيرات غير الأساسية تحقق شروط المثالية (كما هي الحال في طريقة السمبلكس) ينتهي الحل، وإلا يجب إيجاد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية، والذي دخوله للحل كمتغير أساسي يؤمن أفضل تحسين لقيمة معادلة الهدف. تابع للخطوة رقم ٣.

٣- باستخدام شروط الملاءمة، يجب إيجاد المتغير الراحل من بين المتغيرات الأساسية الحالية. ثم يتم إيجاد الحل الأساسي الجديد. يعاد تنفيذ الخطوة رقم ٢.

ستناقش هذه الخطوات بالتفصيل وذلك باستخدام المثال التالي:

ثلاثة مصانع رئيسية في مواقع جغرافية مختلفة. تنتج نوعاً معيناً من قطع الغيار، بطاقة إنتاجية بآلاف القطع 15 ,25 ,5. تغذي هذه المصانع الرئيسية أربعة مصانع فرعية بهذا المنتج، وحاجاتها له بآلاف القطع كما يلي 5 ,15 ,15 ,10، بمعرفة كلفة نقل المنتج الواحد من أي مصنع رئيسي لأي مصنع فرعي، المطلوب إيجاد الحل المثالي (الأقل كلفة) لمسألة توزيع هذا المنتج.

يمكن التعبير عن مسألة التوزيع هذه في شكل الجدول ٥-٣.

الجدول ٥-٣

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
2	12 x_{21}	7 x_{23}	9 x_{33}	20 x_{24}	25
3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
المطلوب	5	15	15	10	

٥-٤ إيجاد الحل الأساسي الأولي

رأينا أن نموذج مسألة النقل يحتوي على معادلة قيد واحدة لكل منبع أو مصرف، أي يحتوي النموذج على m+n معادلة قيد، معادلة واحدة منها غير مستقلة، وذلك بسبب شرط التوازن (المتوافر = المطلوب). وبالتالي يكون لدينا m+n-1 معادلة مستقلة، وهذا يعني أن أي حل أساسي يجب أن يحتوي على m+n-1 متغير أساسي.

ثمة طرق عديدة يمكن استخدامها للحصول على الحل الأساسي الأولي الملائم، سوف يتم تقديم ومناقشة أربعة طرق منها في الفقرات التالية.

٥-٤-١ طريقة الزاوية الغربية الشمالية Northwest-Corner Method

تبدأ هذه الطريقة بتوزيع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب إلى المتغير x_{11} (المتغير الموجود في الزاوية الغربية الشمالية من الجدول). يشطب العمود أو الصف المحقق، وهذا يدل على أن بقية المتغيرات في العمود أو الصف تكون قيمها أصفاراً. في حال وجود عمود وصف محققين يشطب أي واحد منهما (وذلك من أجل توليد متغيرات أساسية تساوي أصفاراً بشكل أوتوماتيكي فيما لو وجدت). بعد تعديل قيم المتوافر والمطلوب، لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، توزع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب، إلى المتغير الموجود في الخلية الأولى من الصف أو العمود غير المشطوب. وهكذا حتى نصل إلى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب.

يمكن تلخيص تطبيق هذه الخطوات على المثال المعطى بالجدول ٥-٣ كما يلي:

١- $x_{11}=5$، وبالتالي يشطب العمود الأول، لا يحصل أي توزيع آخر إلى هذا العمود. الكمية المتبقية في الصف ١ تكون 10 وحدات.

٢- $x_{12}=10$، يشطب الصف ١، يتبقى 5 وحدات في العمود٢.

٣- $x_{22}=5$، يشطب العمود ٢، يتبقى 20 وحدة في الصف ٢.

٤- $x_{23}=15$، يشطب العمود ٣، يتبقى 5 وحدات في الصف ٢.

٥- $x_{24}=5$، يشطب الصف ٢، يتبقى 5 وحدات في العمود ٤.

٦- $x_{34}=5$، يشطب الصف ٣ أو العمود ٤، وبما أنه تبقى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب، تنتهي الخطوات.

يبين الجدول ٥-٤ حل البدء الأساسي الذي استنتج بهذه الطريقة هو:

$$x_{11}=5\ ،\ x_{12}=10،\ x_{22}=5\ ،\ x_{23}=15\ ،\ x_{24}=5،\ x_{34}=5.$$

أما قيم المتغيرات المتبقية فهي أصفار، كما تحسب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$x_0=5*10 + 10*0 + 5*7 + 15*9 + 5*20 + 5*18 = 410$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ فإن كلف النقل من المنابع إلى المصارف لم تؤخذ ضمن اعتبارات الحل.

الجدول ٥-٤

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	(10) 5	(0) 10	(20)	(11)	15
2	(12)	(7) 5	(9) 15	(20) 5	25
3	(0)	(14)	(16)	(18) 5	5
المطلوب	5	15	15	10	

في بعض المسائل، عندما يتحقق عمود وصف في نفس الوقت، فإن المتغير الأساسي الذي يجب إضافته إلى الحل، يجب أن تكون قيمته صفراً. يبين الجدول ٥-٥ هذه النقطة من خلال مثال. العمود الثاني والصف الثاني تحققا معاً. إذا شطب العمود

الثاني، فإن x_{23} يصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية، لأن المتوافر المتبقي للصف الثاني يكون الآن صفراً. عوضاً عن ذلك، إذا شطب الصف الثاني، x_{32} سيصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية.

الجدول ٥-٥

	1	2	3	4		
1	5	5			~~10~~	5
2		5	0		~~5~~	0
3			8	7	15	
	5	~~10~~	8	7		
		5				

إن الحلين الأساسين اللذين تم الحصول عليهما باستخدام هذه الطريقة للمسألتين المذكورتين في الجدول ٥-٤ والجدول ٥-٥ ، يحتويان العدد الصحيح والمناسب من المتغيرات الأساسية، أي $m+n-1 = 6$. إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية تقود دائماً إلى العدد المناسب من المتغيرات الأساسية.

٥-٤-٢ طريقة أدنى كلفة The Least-Cost Method

إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية، التي قدمت في الفقرة السابقة، ليس من الضروري أن تعطي حلاً أساسياً أولياً جيداً لمسائل النقل. لأنها لم تأخذ في الحسبان كلف النقل، بينما الطرق التالية تعتمد على هذه الكلف في عملية استنتاج الحل كما سنرى. يمكن تلخيص خطوات طريقة أدنى كلفة كما يلي:

١- يخصص أكثر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب للمتغير الذي له أقل كلفة واحدية في كل الجدول، (في حال التساوي يتم الاختيار بشكل عشوائي).

٢- يشطب العمود أو الصف المحقق. كما هو الحال في طريقة الزاوية الغربية الشمالية، لدى وجود عمود وصف محققين في آن واحد، يشطب أي

واحد منهما.

٣- يعاد ترتيب المتوافر والمطلوب لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، تعاد الخطوات من البداية، تنتهي خطوات الحل عند بقاء صف أو عمود واحد غير مشطوب.

استخدمت المسألة المقدمة في الجدول ٥-٣ لتوضيح استخدام طريقة أدنى كلفة. يبين الجدول ٥-٦ الحل الأساسي الأولي الذي استنتج بهذه الطريقة.

الجدول ٥-٦

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 / 0	0 / 15	20	11 / 0	15
2	12	7	9 / 15	20 / 10	25
3	0 / 5	14	16	18	5
المطلوب	5	15	15	10	

يمكن تلخيص خطوات الحل على النحو التالي: x_{12} و x_{31} هما المتغيران المصاحبان لأدنى كلفة واحدية ($c_{12}=c_{31}=0$). في حال التساوي، كما هو الحال في هذا المثال، يتم الاختيار بشكل عشوائي، باختيار x_{12}. وحسب المتوافر في الصف الأول، والمطلوب في العمود الثاني، نرى أن $x_{12}=15$، وهذا يحقق الصف الأول والعمود الثاني. بشطب العمود الثاني، يكون المتوافر المتبقي في الصف الأول يساوي الصفر.

بعد ذلك، المتغير x_{31} له أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة. وبالتالي $x_{31}=5$ يحقق الصف الثالث والعمود الأول. بشطب الصف الثالث، يكون المطلوب المتبقي في العمود الأول يساوي الصفر.

إن المتغير x_{23} يناظر أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة ($c_{23}=9$). وحسب المتوافر

والمطلوب يمكن إعطاء $x_{23}=15$، وهذا بدوره يشطب العمود الثالث، لأن المطلوب المتبقي فيه هو صفر وحدة، بينما المتبقي من المتوافر في الصف الثاني هو 10 وحدات.

أدنى كلفة عنصر غير مشطوب تناظر $c_{11}=10$. وبما أن المتوافر المتبقي في الصف الأول والمطلوب المتبقي في العمود الأول كلاهما صفر، $x_{11}=0$. يشطب العمود الأول، والمتوافر المتبقي في الصف الأول هو صفر.

يتم التعرف على بقية المتغيرات الأساسية، وهي $x_{14}=0$ و $x_{24}=10$.

إن الكلفة المصاحبة لهذا الحل تكون كما يلي:

$$x_0 = 0*10 + 15*0 + 0*11 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ، إن الحل الأساسي الأولي المشتق بوساطة طريقة أدنى كلفة، أفضل من الحل المشتق بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية، وهذا بديهي لأنه تم اعتبار الكلف في التوزيع. أيضاً يجب ملاحظة المتغيرات الأساسية التي تساوي قيمها الصفر، وهي ضمن الحل، حيث يجب أن تكون عدد المتغيرات الأساسية في أي حل مساوية: $m + n - 1$.

هذا وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن تطبيق **طريقة أدنى كلفة في الصف**، أو **طريقة أدنى كلفة في العمود**، ويستنبط في كل من هاتين الطريقتين أيضاً حلاً أساسياً أولياً ملائماً بكلف مناسبة.

٣-٤-٥ طريقة فوجيل التقريبية Vogel's Approximation Method

بالرغم من أن هذه الطريقة (طورت عام ١٩٥٨) تعتبر من الطرق التقريبية إلا أنها تؤمن حلاً أولياً ملائماً أفضل من الطريقتين السابقتين. ومع أنها طريقة تقريبية، إلا أنها غالباً تؤمن حلاً أولياً مثالياً، أو قريباً جداً من الحل المثالي.

يمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة كما يلي:

١- تحسب غرامة لكل صف (عمود)، وذلك بطرح أصغر عنصر كلفة في

الصف (العمود) من عنصر الكلفة الأصغر التالي في نفس الصف (العمود).

٢- يحدد الصف أو العمود ذو الغرامة الأكبر، في حال تساوي غرامتين يتم الاختيار بشكل عشوائي، يوزع أكبر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب إلى المتغير ذي أدنى كلفة في الصف أو العمود المحدد. يعاد ترتيب المتوافر والمطلوب، ومن ثم يشطب الصف أو العمود المحقق، إذا تحقق صف وعمود في نفس الوقت، يشطب واحد منهما فقط، والثاني يعين له متوافر أو مطلوب صفر. لا يستخدم في حساب الغرامات القادمة أي صف أو عمود له صفر متوافر أو مطلوب.

٣- (آ) في حال بقاء صف أو عمود واحد فقط غير مشطوب تنتهي الطريقة

(ب) في حال بقاء صف (عمود) بمتوافر (بمطلوب) موجب غير مشطوب، يحدد المتغير الأساسي في الصف (العمود) حسب طريقة أدنى كلفة.

(ت) في حال كون جميع الصفوف والأعمدة الباقية لها صفر متوافر ومطلوب، تحدد المتغيرات الأساسية الأصفار حسب طريقة أدنى كلفة.

(ث) فيما عدا ذلك، تعاد حسابات الغرامات للصفوف والأعمدة غير المشطوبة، وتعاد الخطوات اعتباراً من الخطوة الثانية، يجب ملاحظة أن الصفوف والأعمدة التي لها متوافر ومطلوب أصفار لا تستخدم في حساب الغرامات.

بتطبيق هذه الطريقة على المثال المعطى في الجدول ٥-٣، يبين الجدول ٥-٧ أول مجموعة من غرامات الصفوف والأعمدة.

بما أن غرامة الصف ٣ هي العظمى (14)، وبما أن $c_{31}=0$ هي أدنى كلفة واحدية في نفس الصف، لذلك يجب تحقيقه أولا لتجنب غرامة الصف العظمى، وبالتالي تخصص كمية 5 وحدات للمتغير x_{31}. تحقق الصف ٣ والعمود ١ في نفس الوقت.

بفرض أننا شطبنا العمود ١. المتوافر المتبقي للصف ٣ يكون صفراً.

الجدول ٥-٧

المنابع	المصارف 1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 / 5	14	16	18	~~5~~	14
المطلوب	~~5~~	15	15	10		
غرامة العمود	10	7	7	7		

يوضح الجدول ٥-٨ المجموعة الجديدة من الغرامات بعد شـطب العمـود ١. (لاحظ أن الصف ٣ بمتوافر صفر لم يستخدم في حساب الغرامات).

الجدول ٥-٨

المنابع	المصارف 1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0	20	11	15	11
2	12	7	9 / 15	20	~~25~~,10	2
3	5				0	-
المطلوب	~~5~~	15	~~15~~	10		
غرامة العمود	-	7	11	9		

كما هو ملاحظ في الجدول ٥-٨ أن غرامتي الصف ١ والعمود ٣ متسـاويتان.

بفرض أنه تم اختيارعشوائي للعمود الثالث، لذلك يجب أن يخصص أكبر ما يمكـن 15

وحدة إلى المتغير ذي أدنى كلفة في العمود ٣ وهو x_{23}. يشطب العمود ٣ ، ويعدل المتوافر في الصف 2 إلى 10 واحدات.

تعاد أيضاً عملية حساب الغرامات للصفوف والأعمدة غير المشطوبة كما هو موضح في الجدول ٥-٩ وهو يبين أن غرامة الصف ٢ هي العظمى، لذلك

الجدول ٥-٩

المنابع	المصارف 1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	[10]	[0]	[20]	[11]	15	1
2	[12]	[7] 10	[9] 5	[20]	~~25,10~~	13
3	[ ] 5	[ ]	[ ]	[ ]	0	-
المطلوب	~~5~~	~~15~~,5	~~15~~	10		
غرامة العمود	-	7	-	9		

يخصص 10 وحدات إلى المتغير x_{22} ذي أدنى كلفة واحدية. يشطب الصف ٢، ويعدل المطلوب في العمود ٢ إلى 5 وحدات. تعاد عملية حساب الغرامات كما هو موضح في الجدول ٥-١٠ وهو يبين أن غرامة الصف ١ هي العظمى، لذلك يخصص 5 وحدات إلى المتغير x_{12} ذي أدنى كلفة واحدية. يشطب العمود ٢ نظراً لتحققه، ويعدل المطلوب في الصف ١ إلى 10 واحدات.

بقي لدينا الصف ١ غير مشطوب بمتوافر 10 والصف ٣ غير مشطوب بمتوافر صفر وكذلك العمود ٤ بمطلوب 10. وبالتالي يجب توزيع 10 وحدات للمتغير x_{14}، ويشطب الصف ١ كونه محققاً، ومن ثم اختيار المتغير $x_{34}=0$ كمتغير أساسي صفري من أجل توليد متغيرات أساسية بعدد $m+n-1$.

الجدول ٥–١٠

المنابع \ المصارف	1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0 5	20	11 10	~~15,10~~	11
2	12	7 10	9 5	20	~~25,10~~	
3	0 5			 0		
المطلوب	~~5~~	~~15,5~~	~~15~~	~~10~~		
غرامة العمود	-	0	-	0		

وبالتالي يكون الحل الناتج وفق هذه الطريقة كما يلي:

$$x_{12}=5,\ x_{14}=10,\ x_{22}=10,\ x_{23}=15,\ x_{31}=5,\ x_{34}=0$$

وكلفة هذا التوزيع هي (x_0 = 315 وحدة كلفة). (وهو الحل المثالي كما سنرى لاحقاً).

ملاحظة: في حال تساوي غرامتين يتم الاختيار بشكل عشوائي، وهذا الاختيار حساس، في هذا المثال لو تم الاختيار في العملية الثانية الصف 1 بدلاً من العمود ٣، لنتج حلٌ أسوأ، على أي حال هناك طريقة للاختيار المميز والسليم مبينة في النسخة الكاملة لهذه الطريقة. (N.Reinfeld and W. Vogel, Mathematical Programming, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1958)

٥–٤–٤ طريقة رسل التقريبية Russell's Approximation Method

تُعَدُّ هذه الطريقة (طورت عام ١٩٦٩) أيضاً كلف النقل من المنابع إلى المصارف عند إيجاد الحل الأولي، لذلك فإن الحل الأولي المستنتج باستخدامها يمكن أن يكون مثالياً أو قريباً جداً من الحل المثالي. تتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

١– حساب الفروق المطلقة لكل خلية من خلايا المصفوفة وفق العلاقة التالية:

الفروق المطلقة للخلية=كلفة الخلية-أعلى كلفة في الصف-أعلى كلفة في العمود.

٢- يتم اختيار الخلية ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (في حالة التساوي يتم الاختيار عشوائياً، أو الخلية ذات أدنى كلفة).

٣- تعين كمية الصف أو العمود لتلك الخلية أيهما أقل.

٤- يستبعد من حساب الفروق الصف أو العمود المحقق بالكامل.

٥- تكرر العمليات السابقة حتى يتم تحقيق جميع الأعمدة والصفوف.

سوف يستخدم المثال قيد الدراسة المعطى في الجدول ٥-٣ لتوضيح هذه الطريقة، على النحو التالي:

الجدول ٥-١١

المصارف

المناجم	1	2	3	4	المتوافر
1	10 -22	0 -34	20 -16	11 -29	15
2	12 -20	7 -27	9 -31	20 -20	25
3	0 -30	14 -18	16 -22	18 -20	5
المطلوب	5	15	15	10	

يمكن حساب فروق الخلايا كما يلي:

فروق الخلية (1,1)=10-20-12=-22

فروق الخلية (1,2)=0-20-14=-34

فروق الخلية (1,3)=20-20-16=-16

فروق الخلية (1,4)=11-20-20=-29

وهكذا كما هو موضح في الجدول ٥-١١ وفي الزاوية اليمنى السفلية. ومنه نجد

أن الخلية (1,2) هي ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (34-) يوزع لها حسب المتوافر في الصف 1 والمطلوب في العمود 2 أيهما أقل، بناءً على ذلك يعطى لها 15 وحدة. بهـــذا التوزيع تم استيفاء العمود 2، والصف 1. إذاً يستبعدان من حسابات الفروق التاليـــة. يعدل الجدول ٥-١١ كما هو موضح في الجدول ٥-١٢ وتكرر العمليات على النحو التالي:

الجدول ٥-١٢

المنابع	المصارف 1	2	3	4	المتوافر
1		15			~~15~~
2	12 / -20		9 / -27	20 / -20	25
3	0 / -30		16 / -18	18 / -20	5
المطلوب	5	~~15~~	15	10	

نجد أن الخلية (3,1) هي ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (30-) يوزع لها حسب المتوافر في الصف 3 والمطلوب في العمود 1 أيهما أقل، بناءً على ذلك يعطـــى لهـــا 5 وحدات. بهذا التوزيع تم استيفاء العمود 1، والصف 1. إذاً يستبعدان مـــن حســـابات الفروق التالية. يعدل الجدول ٥-١٢ كما هو موضـــح في الجـــدول ٥-١٣ وتكـــرر العمليات على النحو التالي:

الجدول ٥-١٣

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1		15			~~15~~
2			[9] 15	[20] 10	25
3	5				~~5~~
المطلوب	~~5~~	~~15~~	15	10	

بعد ذلك، نجد أنه تبقى الصف 2، يوزع على خلاياه وفق طريقة أدنى كلفة، أي يوزع على الخلية (2,3) 15 وحدة ، ويوزع على الخلية (2,4) 10 وحدات، وبالتـــالي يصبح الحل الأساسي الأولي المستنتج بهذه الطريقة كما هو موضح في الجدول ٥-١٤.

الجدول ٥-١٤

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	[10] 0	[0] 15	[20]	[11]	15
2	[12]	[7] 0	[9] 15	[20] 10	25
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5
المطلوب	5	15	15	10	

من أجل توليد متغيرات أساسية بعدد m+n-1، يمكن استخدام طريقة أدنى كلفة لاختيار المتغيرات الأساسية الصفرية، ولكن يجب الانتباه لعدم عزل متغير أساسي ضمن صفه وعموده، لأن ذلك يعيق اختبارات المثالية كما سنرى لاحقاً. وبالتالي يكون الحل الناتج وفق هذه الطريقة كما يلي:

$$x_{12}=15,\ x_{23}=15,\ x_{34}=10,\ x_{31}=5,\ x_{11}=x_{22}=0$$

وكلفة هذا التوزيع هي: وحدة كلفة $x_0 = 335$.

كمقارنة بين الطرق المستخدمة لتوليد حل أساسي أولي ملائم، نبين فيما يلي الكلف الناتجة عن كل منها:

طريقة الزاوية الغربية الشمالية	410 وحدة كلفة
طريقة أدنى كلفة	335 وحدة كلفة
طريقة فوجيل التقريبية	315 وحدة كلفة
طريقة رسل التقريبية	335 وحدة كلفة

بشكل عام يمكن القول أن الحلول الأساسية الأولية الناتجة عن الطرق التي تراعي كلف النقل عند إيجادها تكون أفضل من طريقة الزاوية الغربية الشمالية بالرغم من سهولتها وسرعتها، إلا أن العبرة ليست بالسرعة إنما بأن يكون الحل الأولي الناتج أقرب ما يمكن من الحل المثالي، وذلك بغية تقليل عدد الخطوات لدى اختبارات المثالية كما سنرى لاحقاً.

لا يوجد حتى الآن معيار للمفاضلة بين هذه الطرق لدى حل مسألة ما، إلا أنه يفضل استخدام إحدى الطريقتين الأخيرتين، لأن الحلول الناتجة عن استخدامهما تكون قريبة من المثالية إن لم تكن كذلك.

٥-٥ اختبارات المثالية

وفق خطوات تقنية مسألة النقل التي قدمت في الفقرة ٥-٣، فإن عملية إيجاد حل أساسي أولي ملائم، يعد بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل هذه المسألة. أما الخطوة الثانية فهي اختبار ما إذا كان هذا الحل هو الحل المثالي أم لا؟ أي اختبار مثالية الحل. إذا اتضح أن الحل مثالياً، تكون المسألة قد حلت، أما إذا تبين أن الحل غير مثالي فإن تقنية مسألة النقل تتطلب العمل على تحسينه بغية الوصول إلى الحل المثالي.

يجب التوضيح منذ البداية على أن اختبارات المثالية في مسألة النقل، هي في

مفهومها وأساسها، تتشابه إلى حد كبير مع اختبارات المثالية التي سبق اتباعها في خوارزمية السمبلكس، وهي منهجياً تتبع نفس خطوات تحسين الحل الأساسي الأولي لطريقة السمبلكس. أي يتم تقويم كل متغير غير أساسي في الجدول من حيث مقارنة الربح الذي يمكن أن يحققه فيما لو دخل الحل وأصبح أساسياً. لدى الوصول إلى النقطة التي لايُقدّم فيها أيٌ من المتغيرات غير الأساسية، أيَّ تحسين إضافي على الحل، فيما لو دخله، يكون بذلك قد تم التوصل إلى الحل المثالي.

أسوة بطريقة السمبلكس، فإن المتغيرات الأساسية في كل عملية، هي تلك التي لها قيمٌ موجبة، أو تلك التي أعطيت قيماً صفرية، وذلك من أجل أن يكون عدد المتغيرات الأساسية يساوي m+n-1 ، أو تلك التي تناظر الخلايا المشغولة في جدول مسألة النقل. أما المتغيرات غير الأساسية فهي تلك التي تناظر الخلايا غير المشغولة أو الفارغة في الجدول. ولذلك يتم حساب ومقارنة كلف النقل لكل خلية فارغة.

قبل الدخول في تفاصيل وخطوات الطرق التي يمكن أن تتبع في اختبار المثالية، يجب توضيح شرط المثالية في مسائل النقل بشكل أفضل، من خلال مثال بسيط، وذلك عوضاً عن تطبيقه على المصفوفة الأصلية الكبيرة نسبياً اختصاراً للعمليات الحسابيةالمطلوبة، ثم ينقل هذا المفهوم للتطبيق على المسألة قيد الدراسة.

مثال: بفرض أن الجدول ٥-١٥ يمثل الحل الأساسي الأولي لمسألة نقل ما، والمطلوب إجراء اختبارات المثالية عليها، وذلك وفقاً للقاعدة التي طرحت أعلاه.

الجدول ٥-١٥

المنتج	1	2	المتوافر
1	3 50	6 10	60
2	4	10 60	60
المطلوب	50	70	

يتضح من الجدول ٥-١٥ الذي يقدم حلا أساسياً اولياً ملائماً، بأن المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) هي x_{11},x_{12},x_{22} ، والمتغير غير الأساسي الوحيد (الخلية غير المشغولة) هو x_{21}، لاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية يساوي $m+n-1=3$ ، وهو المطلوب من أجل إمكانية الاستمرار في الحل. والكلفة الكلية لهذا التوزيع هي: $x_0=810$. يجب اختبار المتغير غير الأساسي x_{21}، فيما إذا كان يحقق شرط المثالية أم لا، (كما هي الحال في طريقة السمبلكس). أي إذا كانت كلفة دخوله كمتغير أساسي تحسن من قيمة الحل الحالي (يجب إدخاله للحل بأكبر قيمة ممكنة ويتابع الحل)، أم تسيء إليه (يكون الحل الحالي هو الحل المثالي).

لنتخيل أننا رفعنا قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد، وهذا يقود إلى انتهاك لقيود المنابع والمصارف، وحتى يتم المحافظة عليها محققة علينا تعديل قيم المتغيرات الأساسية كما هو موضح في الجدول ٥-١٦.

الجدول ٥-١٦

المنابع	1	2	المتوافر
1	3 50 -	6 10 +	60
2	4 x_{21} +	10 60 -	60
المطلوب	50	70	

إن رفع قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد يترتب عليه التغيرات التالية مجتمعة كما هو موضح في الجدول ٥-١٦

أ- تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة.

ب- زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة.

ت- تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة.

وهذا التخفيض والزيادة سينعكس حتماً على كلفة التوزيع، ويجب معرفة فيما

إذا كانت محصلة التكاليف في صالح هذا التغيير أم لا؟ إن الترجمة الفعلية لهذه التغيرات يمكن حسابها كما يلي:

زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +4

تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -3

زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +6

تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -10

وبالتالي تكون المحصلة النهائية للتغيير +4-3+6-10= -3

وهذا يعني أنه لو فكرنا في زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحدة، فإن هذا سيترتب عليه انخفاض كلفة النقل الكلية لذلك الحل الأولي بمقدار 3 واحدات كلفة، وهذا يعني أن الحل الأولي غير مثالي، حيث يمكن تخفيض كلفته كما رأينا، ويكون هذا المتغير هو المتغير الداخل. من ناحية أخرى، يجب زيادة قيمة هذا المتغير بأقصى كمية ممكنة حتى يكون التوفير في كلفة النقل الكلية أفضل مايمكن، أي ماهي القيمة القصوى للمتغير x_{21} الذي يمكن أن يأخذها؟ إن تحديد الكمية (الحد الأقصى) التي يمكن أن تعطى إلى المتغير x_{21} تتحدد أيضاً من خلال حركة التغيرات التي استخدمت في حساب المحصلة النهائية لكلفة التغيير. وكما ذكرنا إن دخول المتغير x_{21} كمتغير أساسي سيترتب عليه تغييرات في المتغيرات الأساسية من تخفيض وزيادة، يمكن أن يعبر عن ذلك بإشارة (-) وإشارة (+) كما هو موضح في الجدول ٥-١٦ وفي الزاوية اليمنى السفلية من كل خلية تتأثر بهذا التغيير. طالما أن هناك قيداً بعدم السلبية في قيم جميع المتغيرات، إذاً يتعين أن يدخل المتغير الداخل بأقصى قيمة له، شريطة ألا يترتب على ذلك أن تصبح قيمة أي متغير سالبة، أي تكون قيمته هي أقل قيمة لمتغير ذي إشارة سالبة في الدارة المرسومة. تطبيقاً لهذه القاعدة في هذا المثال البسيط، سنجد أن هناك خليتين إشاراتهما سالبة وهما x_{11} و x_{22} ، قيمة المتغير الأول هي 50 وحدة، وقيمة الثاني

هي 60 وحدة. إذاً الحد الأقصى الذي يمكن تعيينه للمتغير الداخل x_{21} هو 50 وحدة، كما هو موضح في الجدول ٥-١٧

الجدول ٥-١٧

المنتج	1	2	المتوافر
1	(3)	(6) 60	60
2	(4) 50	(10) 10	60
المطلوب	50	70	

وكذلك الأمر فإن المتغير الذي ستؤول قيمته إلى الصفر في الـدارة المرسـومة سيكون هو المتغير الراحل، وهو في هذه الحالة المتغير x_{11} ، وأما كلفـة النقـل بعـد التحسين فهي $x_0=660$ ، أي هناك تحسين مقداره 150 وحدة كلفة كما هو متوقع.

يوضح هذا المثال البسيط الخطوات الأساسية في اختبارات المثالية لمسألة النقـل، وكذلك خطوات تحسين الحل الجاري، ولكن يتعين علينا أن نستعرض ونتعرف علـى خطوات ومنهاج الطرق التي يمكن استخدامها لاختبارات المثالية في هذا النـوع مـن المسائل، حيث يمكن القيام باختبارات المثالية لمسائل النقل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

١- طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

٢- طريقة المضاريب Multipliers Method

وفيما يلي المنهاج الذي تبنته كل منهما في اختبار المثالية.

٥-٥-١ طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

عندما تكون مسألة النقل المطلوب حلها كبيرة مقارنة مع المثال السابق والمكون من أربع خلايا فقط، يمكن التصور أن نمط التغيير المطلوب إحداثه لإعادة التخصـيص يكون صعباً بعض الشئ، ولهذا توجد بعض الطرق التي تعالج هذا التصـور بمنهجيـة

أسهل. وإحدى هذه الطرق يطلق عليها طريقة حجر المسافات أو التدرج، كما ترجمت في بعض المراجع العربية باسم نقطة الارتكاز أو حجر الوطء.

يمكن أن يُعَدُّ الحل الأساسي الأولي الذي تم استنتاجه من استخدام إحدى الطرق السابقة هو الحل الجاري، والطريقة التي تمكننا من اختبار هذا الحل الجاري هل هو مثاليٌّ أم لا؟ تكمن في اختبار جميع المتغيرات غير الأساسية، وهل إدخالها للحل كمتغيرات أساسية يحسن من قيمة معادلة الهدف أم لا؟ في حال وجود متغير كهذا سوف يتم اختياره على أنه المتغير الداخل، وفي هذه الحالة، أحد المتغيرات الأساسية يجب أن يترك الحل ويصبح المتغير الراحل (كطريقة السمبلكس).

لنتمكن من إيجاد المتغير الداخل والمتغير الراحل، يجب تعريف دارة مغلقة لكل متغير غير أساسي. تتألف هذه الدارة من عدد من القطع المستقيمة المتتالية الأفقية والرأسية وليست القطرية أو المتقاطعة. نهايات هذه القطع المستقيمة يجب أن تكون متغيرات أساسية، فيما عدا بداية ونهاية هذه الدارة يجب أن تبدأ وتنتهي في المتغير غير الأساسي قيد الاختبار. ولكن هذا لا يمنع مرور المسار على خلايا متغيرات أساسية دون المساس بها أو المرور بخلايا متغيرات غير أساسية دون الإضافة إليها، أي لا تكون ضمن دارة المتغير قيد الاختبار، وذلك حفاظاً على الكميات المتوافرة في الصفوف والكميات المطلوبة في الأعمدة. ينبغي ملاحظة أن المسار لكل متغير غير أساسي هو عبارة عن دارة مغلقة أو مضلع مغلق جميع رؤوسه هي متغيرات أساسية، عدا رأس واحد وهو المتغير غير الأساسي المطلوب تقويمه. كما يمكن الإثبات والبرهنة على أنه يوجد مضلع مغلق واحد لكل متغير غير أساسي، أي لا يكون هناك سوى مسار دارة مغلقة واحدة لكل متغير غير أساسي في الحل.

يبين الجدول ٥-١٨ الحل الأساسي الأولي الملائم، الذي تم الحصول عليه بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية.

x_{21}	$x_{21} - x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{21}$	-5
x_{31}	$x_{31} - x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{24} - x_{34} - x_{31}$	-15
x_{32}	$x_{32} - x_{22} - x_{24} - x_{34} - x_{32}$	+9
x_{33}	$x_{33} - x_{23} - x_{24} - x_{34} - x_{33}$	+9

باستعراض قيم صافي التغيير في الكلفة للمتغيرات الستة التي تم تقويمها، يتضح أن هناك قيماً موجبة وقيماً سالبة (ويمكن أن تكون هناك قيمٌ صفرية أيضاً)، وهذا يعني مايلي:

أ- إذا كانت قيمة صافي التغيير موجبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً سوف يسيء الى الكلفة، ويبعد الحل عن المثالي.

ب- إذا كانت قيمة صافي التغيير صفرية، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً لن يسيء ولن يحسن الكلفة، وتبقى كلفة الحل كما هي (حل منحل سيشرح مضمونه لاحقاً).

ت- إذا كانت قيمة صافي التغيير سالبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً، سوف يترتب عليه تخفيض الكلفة بمقدار صافي التغيير لكل وحدة يتم تخصيصها لهذا المتغير، ويقرب الحل من المثالي. ومعنى ذلك أنه إذا ظهرت قيمٌ سالبة لصافي التغيير لأي متغير غير أساسي، فإن هذا يعني أن الحل الحالي غير مثالي.

وبالعودة إلى الجدول ٥-١٩ يمكن القول بأن الحل الأساسي الأولي المبين بالجدول ٥-١٨ هو حل غير مثالي ويجب تحسين الحل.

يمكن اتباع الخطوات التالية لتحسين الحل الجاري عندما يكون غير مثالي:

١- تحديد المتغير الداخل.

٢- تحديد المتغير الراحل، وقيمته تكون هي قيمة المتغير الداخل.

٣- تعديل جدول مسألة النقل، والبدء بعملية جديدة.

١- تحديد المتغير الداخل:

المتغير الداخل هو المتغير غير الأساسي ذو أكبر قيمة صافي تغيير أو كلفة دخول بإشارة سالبة، لأنه يقدم أقصى توفير ممكن في معادلة الهدف مقارنةً مع بقية المتغيرات غير الأساسية والتي لها قيمة صافي تغيير سالبة.

بتطبيق هذا المعيار على المثال قيد الحل، يكون المتغير x_{31} هو المتغير الداخل حيث كلفة دخوله للحل هي 15- وهي أكبر قيمة بإشارة سالبة.

٢- تحديد المتغير الراحل:

المتغير الراحل هو أحد المتغيرات الأساسية وضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، وهو المتغير الذي له أصغر قيمة وإشارته سالبة (-)، أي هو المتغير الذي ستقل قيمته للصفر في حال إجراء عملية التعديل لقيم المتغيرات لتتلاءم مع الحل الجديد، يمكن أن يكون أي من المتغيرات x_{11} و x_{22} و x_{34} المتغير الراحل، لأنها جميعاً قيمها 5 وحدات، وذات إشارة سالبة، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{34} ليكون المتغير الراحل. لاحظ أن قيمة المتغير الداخل في الجدول الجديد تكون 5 وحدات وهي قيمة المتغير الراحل حالياً.

٣- تعديل جدول مسألة النقل:

بعد اختيار المتغير الداخل وهو x_{31}، وتحديد أقصى قيمة له وهي 5 وحدات، يجب تعديل جدول النقل بحيث يكون الجدول الجديد محققاً لقيود المنابع وقيود المصارف. أي إعطاء قيمة $x_{31}=5$ ، وإنقاص قيمة المتغير x_{11}، وزيادة قيمة المتغير x_{12}، وإنقاص قيمة المتغير x_{22}، وزيادة قيمة المتغير x_{23}، وإنقاص قيمة المتغير x_{34} كله بمقدار 5 وحدات. لاحظ أن المتغير x_{34} هو المتغير الراحل. يبين الجدول ٥-٢٠ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢٠

المنبع	المصارف 1	المصارف 2	المصارف 3	المصارف 4	المتوافر
1	10 / 0 / -	0 / 15 / +	20 / +18	11 / -2	15
2	12 / -5 / +	7 / 0 / -	9 / 15	20 / 10	25
3	0 / 5	14 / +24	16 / +24	18 / +15	5
المطلوب	5	15	15	10	

وبناءً على هذا التعديل، فإن تكاليف النقل الكلية تكون:

$$x_0 = 0*10 + 15*0 + 0*7 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$$ وحدة كلفة

بمقارنة هذه الكلفة مع كلفة الحل الأولي الذي تم إعداده باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية، نجد أن الكلفة الكلية قد قلت بمقدار 15*5 = 75 وحدة كلفة.

يمكن اختصار هذه الحسابات على الجدول، وذلك بحساب كلفة دخول كل متغير غير أساسي من دارته المرافقة له، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٠. بالتالي يمكن إيقاف العمليات إذا كانت جميع الكلف موجبة أو أصفار، ويكون الحل الجاري هو الحل المثالي، وإلا يجب اختيار المتغير غير الأساسي ذو الكلفة الأكبر بالسالب على أنه المتغير الداخل.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الداخل يجب أن يكون x_{21} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (5-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية. ومن دارته المرافقة: $(x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21})$، نجد أن كلا المتغيرين x_{11} و x_{22} مرشحان لأن يكونا المتغير الراحل، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{11} بشكل عشوائي ليرحل عن الحل، بما أن قيمته تساوي الصفر، فلن يكون هناك أي تعديل على قيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة، ولكن سيرحل المتغير x_{11} عن

الحل ويدخل المتغير x_{21} للحل ولكن بقيم صفرية (لاحظ انحلال الحل). يبين الجـــدول ٥-٢١ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢١

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 +5	0 **15** -	20 +18	11 -2 +	15
2	12 **0**	7 **0** +	9 **15**	20 **10** -	25
3	0 **5**	14 +19	16 +19	18 +10	5
المطلوب	5	15	15	10	

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من دارالها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢١.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الــداخل يجب أن يكون x_{14} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (2-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، ومن دارته المرافقـــة: ($x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14}$)، نجد أن المتغير x_{24} هو المتغير الراحل، وبما أن قيمته تساوي 10، إذاً يجب تعديل قـــيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، أي إضافة 10 لقيم المتغيرات ذات إشارة (+)، وطرح 10 من قيم المتغيرات ذات إشـــارة (-) . يـــبين الجـــدول ٥-٢٢ هـــذه التعديلات.

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من دارالها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٢.

الجدول ٥-٢٢

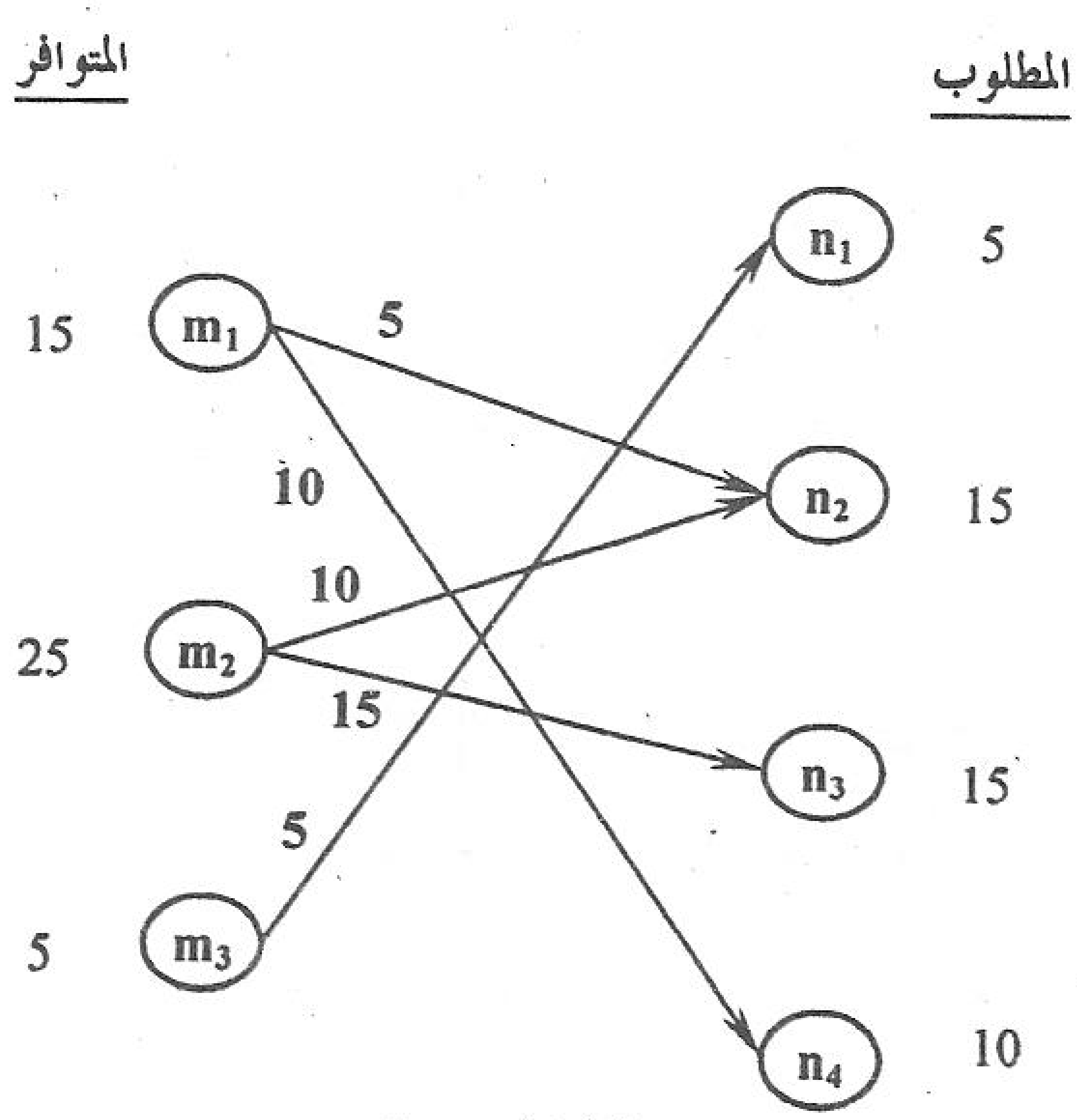
المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	(10) +5	(0) **5**	(20) +18	(11) **10**	15
2	(12) **0**	(7) **10**	(9) **15**	(20) +2	25
3	(0) **5**	(14) +19	(16) +19	(18) +12	5
المطلوب	5	15	15	10	

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن جميع هذه الكلف $\bar{c}$ موجبة وهذا يعني تحقق شرط المثالية، والحل المثالي هو: $x_{12}=5$, $x_{14}=10, x_{21}=0, x_{22}=10, x_{23}=15, x_{31}=5$ ، كما هو موضح بالشكل ٥-٢.

يمكن حساب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$$x_0 = 5*0 + 10*11 + 0*12 + 10*7 + 15*9 + 5*0 = 315$$ وحدة كلفة



الشكل ٥-٢

٥-٥-٢ طريقة المضاريب (أو طريقة التوزيع المعدل)

Multipliers Method (or Modified Distribution Method)

إن خطوات الحل المتبعة في هذه الطريقة مشابهة تماماً للخطوات المتبعة في طريقة حجر المسافات، كما ينحصر الاختلاف الوحيد في كيفية حساب كلف دخول المتغيرات غير الأساسية للحل في كل عملية، أما عملية تحديد المتغير الراحل وتعديل الجدول فهي تتم بنفس الطريقة تماماً دون أي اختلاف.

تحديد المتغيرّ الداخل: يحدد المتغير الداخل باستخدام شرط المثالية، كما هو الحال في طريقة السمبلكس. بينما يعتمد حساب معاملات معادلة الهدف أساساً على علاقات الأولي – المرافق التي طرحت في الفصل الثالث. سوف تقدم آلية طريقة المضاريب أولاً، ثم تشرح الخطوات بدقة وذلك بالاعتماد على نظرية الترافق. كما هو الحال في طريقة حجر المسافات التي قدمت في الفقرة السابقة، فإن الحسابات في الطريقتين متماثلة إلا أن طريقة حجر المسافات تعطي الانطباع بأنها ليس لها علاقة البتة مع طريقة السمبلكس. تعاد في طريقة المضاريب نفس العمليات ولكن ينحصر الاختلاف فقط في كيفية حساب المتغيرات غير الأساسية في كل عملية.

يمكن توضيح خطوات هذه الطريقة كما يلي:

يرافق كل صف i في جدول مسألة النقل مضروب u_i ، وبالمثل يرافق كل عمود j مضروب v_j. بعد ذلك، لكل متغير أساسي في الحل الجاري، على المضاريب u_i و v_j تحقيق المعادلة التالية:

$$u_i+v_j=c_{ij} \; ; \qquad \text{لكل متغير أساسي } x_{ij}$$

وبالتالي يكون عدد المعادلات $m+n-1$ (لأنه لدينا $m+n-1$ متغير أساسي) في $m+n$ مجهول. يمكن إيجاد قيم المضاريب من هذه المعادلات، وذلك بفرض قيمة عشوائية لأي من المضاريب (عادة توضع $u_1=0$)، وبالتالي حل $m+n-1$ معادلة في

m+n-1 مجهول (المضاريب المتبقية).

بتطبيق هذه الخطوات على المتغيرات الأساسية في الجدول ٥-٢٣ (الحل الجاري الذي استنتج باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية)، نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$x_{11} : u_1 + v_1 = c_{11} = 10$$
$$x_{12} : u_1 + v_2 = c_{12} = 0$$
$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 7$$
$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 9$$
$$x_{24} : u_2 + v_4 = c_{24} = 20$$
$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} = 18$$

باختيار $u_1=0$ كما ذكرنا سابقاً، يمكن حساب قيم بقية المضاريب بشكل متسلسل من المعادلات:

$$v_1 = 10, v_2 = 0, v_3 = 2, v_4 = 13 \quad و \quad u_1 = 0\ , u_2 = 7\ , u_3 = 5$$

يمكن إظهار قيم هذه المضاريب على جدول المسألة من أجل تسهيل عملية الحسابات اللاحقة، كما هو موضح في الجدول ٥-٢٣ .

بعد حساب قيم المضاريب، تحسب كلفة دخول كل متغير غير أساسي x_{pq} للحل كما يلي:

لكل متغير غير أساسي x_{pq} ; $\overline{c_{pq}} = c_{pq} - u_p - v_q$

هذه القيم $\overline{c_{pq}}$ ستكون تماماً مثل القيم التي تم حسابها وفق طريقة حجر المسافات السابقة، بغض النظر عن الاختيار العشوائي لقيمة أحد المضاريب الصفرية.

وبالتالي حساب المتغيرات غير الأساسية يتم على النحو التالي:

$$x_{13}: \quad \overline{c_{13}} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - 0 - 2 = +18$$
$$x_{14}: \quad \overline{c_{14}} = c_{14} - u_1 - v_4 = 11 - 0 - 13 = -2$$
$$x_{21}: \quad \overline{c_{21}} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 7 - 10 = -5$$
$$x_{31}: \quad \overline{c_{31}} = c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - 5 - 10 = -15 \quad \longleftarrow$$
$$x_{32}: \quad \overline{c_{32}} = c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - 5 - 0 = +9$$
$$x_{33}: \quad \overline{c_{33}} = c_{33} - u_3 - v_3 = 16 - 5 - 2 = +9$$

وهي نفس القيم التي حسبت في طريقة حجر المسافات، وهي تظهر أيضاً أن x_{13} هو المتغير الداخل، لأن كلفة دخوله للحل $\overline{c_{pq}}$ هي الأكثر سلبية من كلف جميع المتغيرات غير الأساسية، أي يحسن من قيمة معادلة الهدف أفضل من بقية المتغيرات غير الأساسية. أما المتغير الراحل فيتم اختياره حسب طريقة الدارة المرتبطة بالمتغير x_{31} الموضحة في طريقة حجر المسافات أيضاً.

إن المعادلات $u_i+v_j=c_{ij}$، التي استخدمت لحساب قيم المضاريب، ذات بنية بسيطة وسهلة ولاداعي لكتابتها صراحةً. يمكن حساب قيم المضاريب من جدول مسألة النقل مباشرةً بملاحظة أن u_i للصف i و v_j للعمود j يكون مجموعها مساوياً c_{ij} عندما تكون الخلية لدى تقاطع الصف i والعمود j تحوي متغيراً أساسياً x_{ij}. بعد حساب قيم هذه المضاريب على الجدول، يمكن حساب الكلف $\overline{c_{pq}}$ لدخول المتغيرات غير الأساسية x_{pq} للحل بطرح كل من قيمة مضروب الصف u_i وقيمة مضروب العمود v_j من كلفة النقل c_{ij}، كما يمكن كتابة هذه الكلف في خلايا المتغيرات غير الأساسية، وفي الركن السفلي اليساري في كل منها، كما هو موضح في الجدول ٥-٢٣ ، والذي يبين أيضاً أن المتغير الداخل يجب أن يكون المتغير x_{31}.

أما عملية تحديد المتغير الراحل وتعديل الجدول فهي تماماً مثل تلك التي نوقشت في طريقة حجر المسافات.

الجدول ٥-٢٣

المصارف

المنابع	$v_1=10$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	المتوافر
$u_1=0$	10 / 5 -	0 / 10 +	20 / +18	11 / -2	15
$u_2=7$	12 / -5	7 / 5 -	9 / 15	20 / 5 +	25
$u_3=5$	0 / -15 +	14 / +9	16 / +9	18 / 5 -	5
المطلوب	5	15	15	10	

بعد رسم دارة المتغير الداخل x_{31} ، وتحديد الزوائد(+) والنواقص (-) على رؤوس الدارة نرى أن المتغير x_{34} هو المتغير الراحل وقيمة المتغير الداخل تساوي ٥ وحدات، يمكن بعد ذلك رسم جدول جديد وتعدل قيم المتغيرات ضمن دارة المتغير الداخل. يبين الجدول ٥-٢٤ ذلك.

الجدول ٥-٢٤

المصارف

المنابع	$v_1=10$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	المتوافر
$u_1=0$	10 / 0 -	0 / 15 +	20 / +1	11 / -2	15
$u_2=7$	12 / -5 +	7 / 0 -	9 / 15	20 / 10	25
$u_3=-10$	0 / 5	14 / +24	16 / +24	18 / +15	5
المطلوب	5	15	15	10	

يبين الجدول ٥-٢٤ أن المتغير الداخل هو x_{21}، ومن الدارة المرتبطة به يكون المتغير الراحل هو x_{11} أو x_{22} بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{11} على أنه المتغير الراحل، نحصل على الجدول ٥-٢٥.

الجدول ٥-٢٥

	المصارف				المتوافر
	$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	
المنابع $u_1=0$	(10) +5	(0) 15 -	(20) +18	(11) -2 +	15
$u_2=7$	(12) 0	(7) 0 +	(9) 15	(20) 10 -	25
$u_3=-5$	(0) 5	(14) +19	(16) +19	(18) +10	5
المطلوب	5	15	15	10	

يبين الجدول ٥-٢٥ أن المتغير الداخل هو x_{14} لأن كلفة دخوله للحــل (2-)، ومن الدارة المرتبطة به يكون المتغير الراحل هو x_{24}، نحصل على الجدول ٥-٢٦، الذي يبين حساب كلف دخول جميع المتغيرات غير الأساسية، وهي جميعاً ذات قيم موجبة. وهذا يدل، كما نعلم، أن الحل الجاري هو الحل المثالي، وهو نفس الحل المثالي الذي تم الحصول عليه في طريقة حجر المسافات، وطبعاً بنفس الكلفة.

الجدول ٥-٢٦

	المصارف				المتوافر
	$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=11$	
المنابع $u_1=0$	(10) +5	(0) 5	(20) +18	(11) 10	15
$u_2=7$	(12) 0	(7) 10	(9) 15	(20) +2	25
$u_3=-5$	(0) 0	(14) +19	(16) +19	(18) +12	5
المطلوب	5	15	15	10	

مقارنة طريقة المضاريب مع طريقة السمبلكس: يمكن التعرف على العلاقة بين طريقة المضاريب وطريقة السمبلكس، بعد تبيان أن كلف دخــول المــتغيرات غــير

وهذا يعطي m+n-1 معادلة. وبالتالي، بفرض قيمة عشوائية لـ u_1 (=0)، يمكن حساب قيم باقي المضاريب.

بعد ذلك تحسب معاملات المتغيرات غير الأساسية x_{pq} في معادلة الهدف من الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد المرافق، أي: $u_p+v_q-c_{pq}$. وبما أن مسألة النقل هي لإيجاد القيمة الصغرى، يكون المتغير الداخل هو ذو أكبر $u_p+v_q-c_{pq}$ بالموجب.

وهذا يجعل العلاقة بين طريقة المضاريب وطريقة السمبلكس واضحة. في الواقع، إن قيم المضاريب في الجدول المثالي هي قيم المتغيرات المرافقة مباشرة. وهذه القيم يجب أن تحقق نفس قيم معادلة الهدف في الأولي والمرافق. إن مضاريب السمبلكس المناظرة في الجدول ٥-٢٦ المثالي هي: $u_1=0$، $u_2=7$، $u_3=-5$، $v_1=5$، $v_2=0$، $v_3=2$، $v_4=11$.

وقيمة معادلة الهدف في المرافق هي:

$$w=\sum_{i=1}^{3} a_i u_i+\sum_{j=1}^{4} b_j v_j=(15*0+25*7+5*-5)$$

$$+(5*5+15*0+15*2+10*11)=315$$

وهي نفس القيمة في الأولي.

٥-٦ مسألة النقل العابر The Transshipment Model

تفترض مسألة النقل القياسية، التي نوقشت حتى الآن، أن المسار المباشر بين المنبع والمصرف هو الأقل كلفة. أحياناً، في بعض المسائل، يمكن أن يعطى جدول بالمسافات بين المنابع والمصارف، وهذا يعني أن هناك حاجة إلى بعض الحسابات التحضيرية لإيجاد أقصر المسارات بين المنابع والمصارف قبل إيجاد كلفة نقل الوحدة المطلوبة لنموذج مسألة النقل القياسية.

إن عملية حسابات أقصر مسار في المسائل الصغيرة تكون عادة قضية سهلة. ولكن مع زيادة عدد المنابع والمصارف، يجب استخدام طرق نظامية خاصة، تدعى

مسائل التعيين او التخصيص Assignment Problems

٦-١ مفهوم مسائل التعيين

تظهر مشكلات التخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة سواء في المجالات المدنية ام المجالات العسكرية فقد يتطلب الأمر تعيين مجموعة من الأفراد للقيام بمجموعة من المهمات وكل فرد يعيين للقيام بمهمه واحدة فقط ففي هذه الحالة يتطلب الأمر وضع الشخص المناسب في المكان المناسب له وبعبارة أخرى يتم التعيين وفقاً لقواعد تخفيض التكاليف وتعظيم المردود (الأرباح). كذلك تظهر مسائل التخصيص حينما يتطلب الأمر تكليف مجموعة من الوحدات أو المجموعات للقيام بتنفيذ مجموعة من الأنشطة مثلاً قد يكلف مجموعة من الأفراد الاشراف على مجموعة من المكائن. ولنفرض وجود ثلاثة أشخاص للتعيين وللاشراف على ثلاثة مكائن حيث تكاليف تعيين كل شخص الى أية ماكنة مبين في الجدول أدناه.

		المكائن		
		A	B	C
الافراد	1	24	20	28
	2	26	30	18
	3	32	25	20

يتكون الجدول اعلاه من ثلاث صفوف وثلاثة اعمدة فاذا تم تعيين الفرد الأول للماكنة A فان الاجرة الاسبوعية ستكون 24 دينار بينما اذا تم تعينه للماكنة B فان الاجرة الاسبوعية ستكون 20 دينار واذا تم تعيينه للماكنة الثالثة فان الاجرة الاسبوعية ستكون 28 دينار حيث لا يمكن تعيين أي فرد لأكثر من ماكنة وعليه فيجب أن يتساوى عدد المكائن بعدد الأفراد. والمسألة أعلاه هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية حيث يمكن صياغته كما يلي:

$$\text{Minimize } (Z) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} \cdot X_{ij}$$

Subjet to

وفقاً للقيود التالية

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j,i} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$X_{ai} = 0 \text{ or } 1$ لجميع j , i

$X_{ij} = 0 \text{ or } 1$ لجميع $j , 1$

ويمكن تطبيق هذه الصياغة على مثالنا اعلاه كما يلي:

X_{ij} $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

1: في حالة تخصيص الماكنة j للفرد i

0: في حالة عدم تخصيص لماكنة j للفرد i

ويكون مجموع التكاليف الكلية لتعيين الافراد الى المكائن سيكون Z حيث Z يمكن التعبير عنها .

$$Z = 24X_{11} + 20X_{12} + 28X_{13} + 36X_{21} + 30X_{22} + 18X_{23} + 32X_{21} + 25X_{32} + 20X_{33}.$$

هذ المسألة تحتاج الى نوعين من القيود:

- المجموعة الأولى انه لا يمكن تكليف فرد واحد للإشراف على أكثر من ماكنة واحدة فقط بعبارة أخرى

الصف الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

الصف الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

الصف الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

- اما المجموعة الثانية من القيود فتقضي عدم تعيين اكثر من فرد للاشراف على ماكنة واحدة فقط وبعبارة اخرى:

العمود الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

العمود الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

العمود الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

حيث Xij تساوي 0 او 1.

٦-٢ طرق حل مسائل التخصيص

هناك عدة طرق لايجاد الحل الامثل لمسائل التخصيص حيث تتفاوت كل طريقة عن الأخرى بعدد الخطوات المطلوبة للوصول للحل الأمثل ومن هذه الطرق.

١- طريقة العد الكامل.

٢- طريقة السمبلكس Simplex method أو الحل باستخدام النموذج الرياضي.

٣- طريقة النقل.

٤- الطريقة الهنغارية (الطريقة المجرية).

وسيقتصر تركيزنا على الطريقة الهنغارية لأنها من أفضل الطرق على الاطلاق لاستخراج الحل الأمثل لمسائل التعيين الا أنه من المفيد أن نستعرض الطرق الأخرى باعطاء فكرة أو مثال بسيط لكل طريقة قبل الخوض بالطريقة الهنغارية.

1- طريقة العد الكامل أو طريقة الحصر Solution by Enumeration Method

في هذه الطريقة نبحث عن جميع البدائل لتوزيع m وظيفة على m من المكائن مثلاً ثم نختار التخصيص المناسب عند احتساب التكلفة أو الربح الأعظم في مسائل أخرى ويمكن ايجاد البدائل باستخدام مبدأ طرق العد فاذا كان لدينا m وظيفة فان عدد البدائل يساوي m! الا أن عيب هذه الطريقة سيكون شاقاً اذا كان عدد الوظائف m كبيراً وفي بعض الأحيان يصعب حلها.

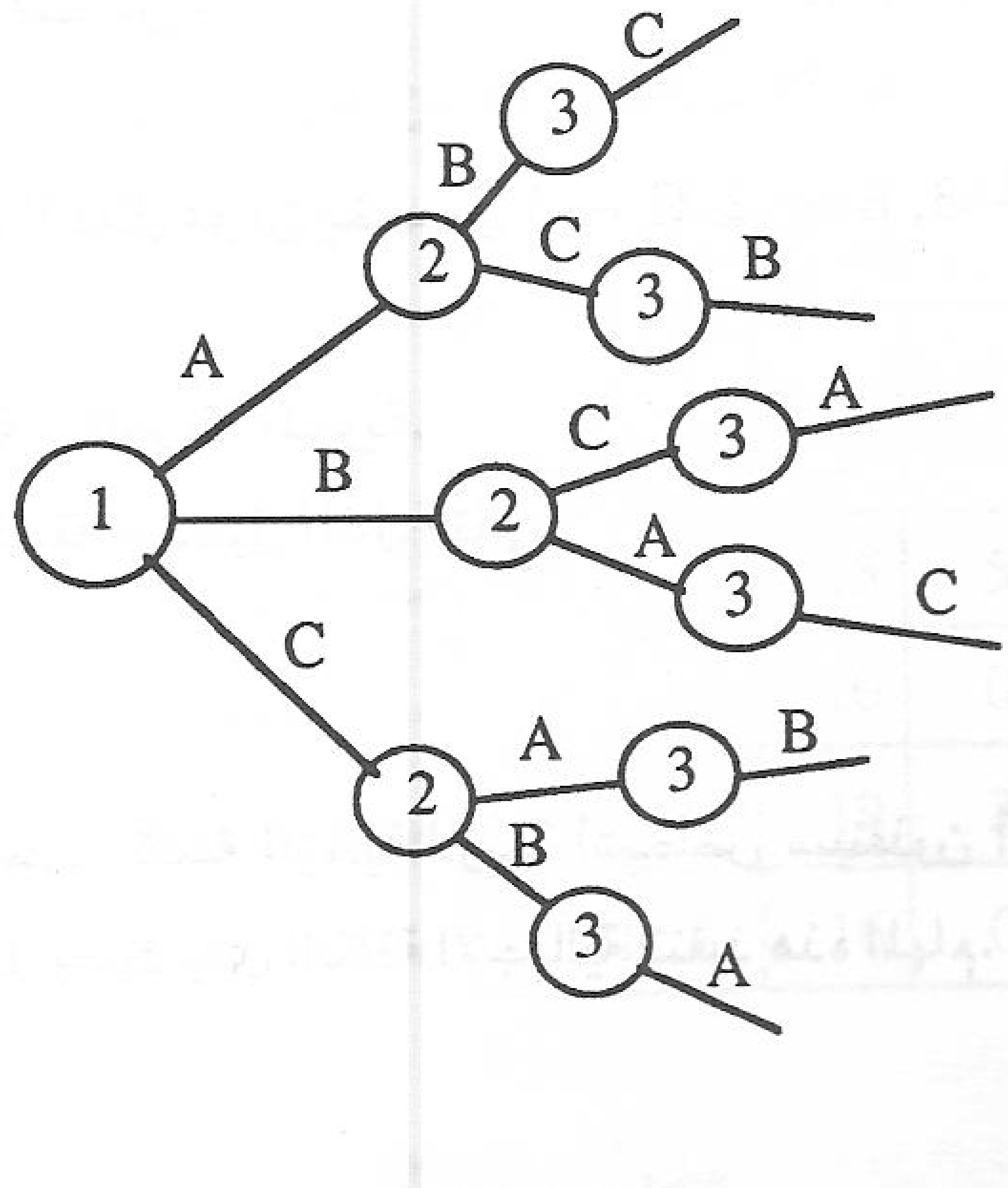
مثال:

لدينا ثلاث مكائن A ,B, C وثلاثة أوامر 1 ,2 ,3 والجدول التالي يبين الوقت الزمني لتنفيذ المكائن للأمر المعين. والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاث من قبل المكائن الثلاث بأقل وقت ممكن.

الاوامر / المكائن	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	21

الحل:

نكون شجرة العد. **عدد الطرق الممكنة للتخصيص**



التخصيص الاول	$A \to 1,\ B \to 2,\ C \to 3$
تكلفة التخصيص الاول =	$35 = 21 + 4 + 10$
التخصيص الثاني	$A \to 1, 2 \to C, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الثاني =	$32 = 13 + 9 + 10$
التخصيص الثالث	$1 \to B, 2 \to A, 3 \to C$
تكلفة التخصيص الثالث =	$55 = 21 + 22 + 15$
التخصيص الرابع	$1 \to B, 2 \to C, 3 \to A$
تكلفة التخصيص الرابع =	$33 = 9 + 9 + 15$
التخصيص الخامس	$1 \to C, 2 \to A, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الخامس =	$41 = 41 + 22 + 6$
التخصيص السادس	$1 \to C, 2 \to B, 3 \to C$
تكلفة التخصيص السادس =	$31 = 21 + 4 + 6$

فيكون الحل الامثل لهذه البدائل هو أن يخصص $C \leftarrow 3, B \leftarrow 2, C \leftarrow 1$

2- الطريقة الهنفارية أو الطريقة المجرية.

لتوضيح هذه الطريقة سنتناول المثال التالي.

مثال:

الجدول التالي يمثل التكلفة الزمنية لأربعة أشخاص سينفذون أربعة مهام والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل بحيث يقلل التكلفة الاجمالية لتنفيذ هذه المهام.

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	15	25	10	35
2	17	27	40	21
3	12	28	9	19
4	10	26	17	23

جدول رقم (1)

الحل:

سنذكر الخطوات المتبعة لحل مثل هذه المسائل أثناء عملية الحل.

1- نختار أصغر عنصر في كل صف وطرحه من باقي عناصر نفس الصف. لينتج جدول التكاليف غير المباشرة جدول (2).

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D	
1	5	15	0	25	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف1
2	0	10	23	4	اصغر عنصر هو (17) طرح من عناصر الصف 2
3	3	19	0	10	اصغر عنصر هو (9) طرح من عناصر الصف 3
4	0	16	7	13	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف 4

جدول رقم (2)

2- نختار اصغر عنصر في كل عمود من اعمدة جدول (2) لينتج جدول رقم (3) ادناه.

* اصغر عنصر في العمود الاول في جدول (2) هو 0.

** اصغر عنصر في العمود الثاني في جدول (2) هو 10.

*** اصغر عنصر في العمود الثالث في جدول (2) هو 0.

**** اصغر عنصر في العمود الرابع في جدول (2) هو 4.

3- نغطي الصفوف أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية أو رأسية كما هو الحال في جدول (3).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	5	5	0	21
2	0	0	23	0
3	3	9	0	6
4	0	6	7	9

جدول رقم (3)

4- اذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فاننا نكون لم نصل للحل الأمثل بعد وعليه فاننا نختار أصغر رقم من الأرقام التي لم تغطي بخطوط ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة ونضيف هذا الرقم الى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي وفي مثالنا فان الرقم هو 0. ونحصل على الجدول (4).

D	C	B	A	المهام / الاشخاص
26	0	0	5	1
0	28	0	5	2
1	0	4	3	3
4	7	1	0	4

جدول رقم (4)

5- نكرر ما ورد في الخطوة رقم (3) لنحصل على الجدول أعلاه وبما أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية يساوي 4 = عدد الصفوف أو الأعمدة لمسألة التعيين أو التخصيص فعليه فاننا نكون وصلنا للحل الأمثل ونكون جدول التخصص جدول رقم (5) ونحصل عليه كما يلي:

- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل صف. وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر المخصص.
- نبدأ بتخصيص الصفر في كل عمود ونشطب باقي الاصفار التي تقع في الصف الذي يقع منه الصفر. وهكذا نحصل على جدول التخصص الامثل رقم (5).

الاشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	26
2	5	$\cancel{0}$	28	$\boxed{0}$
3	3	4	$\boxed{0}$	1
4	$\boxed{0}$	1	7	4

جدول رقم (5)

ويكون التخصص الامثل كما يلي:

الشخص 1 نخصص له المهمة B بتكلفة 25 دقيقة

الشخص 2 نخصص له المهمة D بتكلفة 21 دقيقة

الشخص 3 نخصص له المهمة C بتكلفة 9 دقيقة

الشخص 4 نخصص له المهمة A بتكلفة 10 دقيقة

ويكون أجمالي التكلفة = 65 دقيقة

إدارة المشاريع
Project Managements

٦-١ مقدمة

يعرف المشروع على أنه المهمة التي تتألف من مجموعة من الفعاليات المتداخلة والمرتبطة مع بعضها بعضاً، والتي يجب تنفيذها جميعاً في تسلسل محدد قبل نهاية المهمة أو المشروع. ترتبط الفعاليات مع بعضها بعضاً في تسلسل منطقي، حيث لايمكن البدء في تنفيذ بعضها قبل الانتهاء من تنفيذ بعضها الآخر. بشكل عام، يمكن النظر إلى المشروع على أنه مجموعة من الأعمال أو الفعاليات التي تنفذ مرة واحدة، ويمكن أن لايتكرر تنفيذها بالتسلسل نفسه في المستقبل، كما يمكن النظر إلى فعالية ما في مشروع معين كعمل يتطلب إنجازه زمناً وموارد محددين.

في الماضي، كانت جدولة المشاريع (زمنياً) تنفذ بتخطيط بسيط، إذ لم يكن متوافراً حينها سوى مخططات كانت (Gantt bar chart)، وهي تعد وقتها أفضل أداة معروفة، يمكن بوساطتها تحديد أزمنة البدء والنهاية لكل فعالية على محور أفقي للزمن. عيب ذلك هو عدم إمكانية التعرف على علاقات الربط والتداخل (وهي التي تتحكم بشكل رئيسي في تقدم تنفيذ المشروع) بين مختلف الفعاليات من المخطط المذكور. إن ازدياد التعقيد في المشاريع الحالية، يتطلب وجود تقنيات للتخطيط تكون ذات منهجية ومردود أفضل، بحيث يكون هدفها هو الإدارة المثالية لتنفيذ المشروع. يتضمن المردود هنا التخفيض قدر الإمكان في زمن إنجاز المشروع مع الأخذ في الحسبان، الاستثمار الاقتصادي المناسب والملائم للموارد المتوافرة.

برزت إدارة المشاريع كمجال علمي جديد بتطوير تقانتين تحليليتين للتخطيط، والجدولة، والتحكم بالمشاريع، وهما طريقة المسار الحرج Critical Path Method

١- ما هي الفعاليات التي تنفذ في لحظة زمنية معينة؟

٢- ماهي المدة الزمنية التي يمكن خلالها تأخير تنفيذ فعالية ما، دون تأخير تنفيذ المشروع؟

٣- ما هو التأثير الذي سيحصل على المشروع إذا نفذت فعالية ما، في نصف المدة؟

إن فوائد هذه التقنية ليست بإعطاء معلومات عددية فقط، بل بتحديد مجموعة الفعاليات الحرجة، التي يكون تنفيذها مهماً لتنفيذ كامل المشروع في أقل مدة زمنية. وبالتالي يجب تركيز الجهود والمهارات على هذه الفعاليات من المشروع. تشير الدراسات لمؤسسات صناعية وتجارية، بأن عدداً صغيراً من الفعاليات ضمن مشروع معين يتطلب تدخل الإدارة، أما باقي الفعاليات فهي تنفذ دون مشاكل جدية. إن هذه التقنية تسمح بالتعرف على الفعاليات الهامة، وتوجه نظر الإدارة من أجل التحكم فيها.

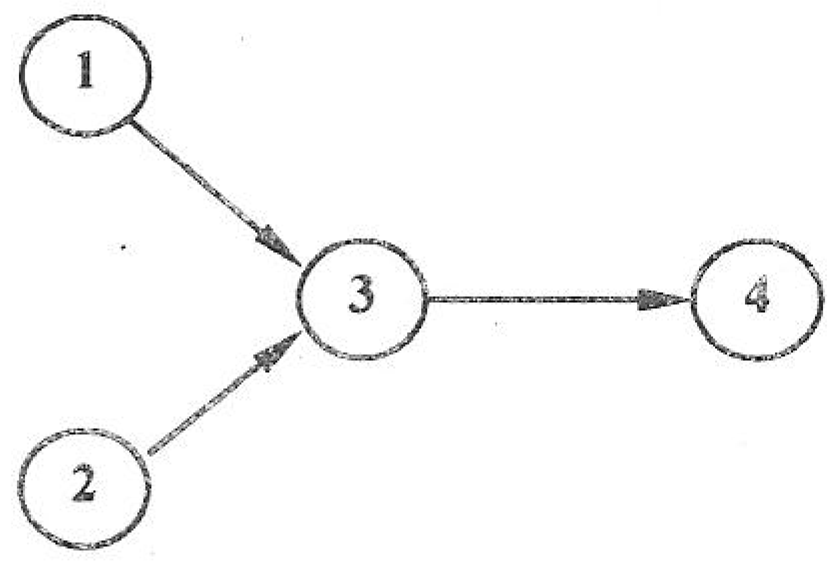
للتمكن من تمثيل المشروع كمخطط شبكي، يجب أولاً، كما ذكرنا، تقسيم المشروع إلى فعاليات، إضافة إلى ذلك، ينبغي التعرف على الفعاليات التي يجب أن ينتهي تنفيذها قبل البدء في تنفيذ كل فعالية، أي الفعاليات السابقة.

٦-٤ تمثيل المخطط الشبكي

يمثل المخطط الشبكي علاقات التداخل والأسبقية بين فعاليات المشروع المختلفة. يستخدم عادة سهم لتمثيل كل فعالية، ويدل رأس السهم على اتجاه نمو المشروع. تحدد علاقات الأسبقية بين الفعاليات بوساطة أحداث (events). يمثل الحدث نقطة في الزمن، ويدل على انتهاء بعض الفعاليات، وبدء أخرى جديدة. بالتالي بدء وانتهاء فعالية ما يعرف بوساطة حادثين، يطلق عليهما حادثي الذنب والرأس. مع التنويه بأن الفعاليات المنبثقة من حدث معين لا يمكن البدء بتنفيذها حتى ينتهي تنفيذ الفعاليات المنتهية في الحدث نفسه. حسب مصطلحات نظرية الشبكات، تمثل كل فعالية بسهم

موجه، وكل حدث يمثل بعقدة. ليس من الضروري أن يتناسب طول السهم مع زمن تنفيذ الفعالية، أو أن يرسم كخط مستقيم.

يبين الشكل ٦-١(آ) التمثيل التقليدي لفعالية ما (i,j)، حيث i هو حدث الذنب، و j هو حدث الرأس. بينما يوضح الشكل ٦-١(ب) مثالاً آخر، حيث يجب تنفيذ الفعاليتين (٣،١) و (٣،٢) قبل البدء بتنفيذ الفعالية (٤،٣). يحدد اتجاه النمو في الفعالية بترقيم حدث الذنب بعدد يكون أصغر من عدد حدث الرأس، وهذا الإجراء يكون مناسباً للحسابات الآلية، وسوف يتبع في هذا الفصل.



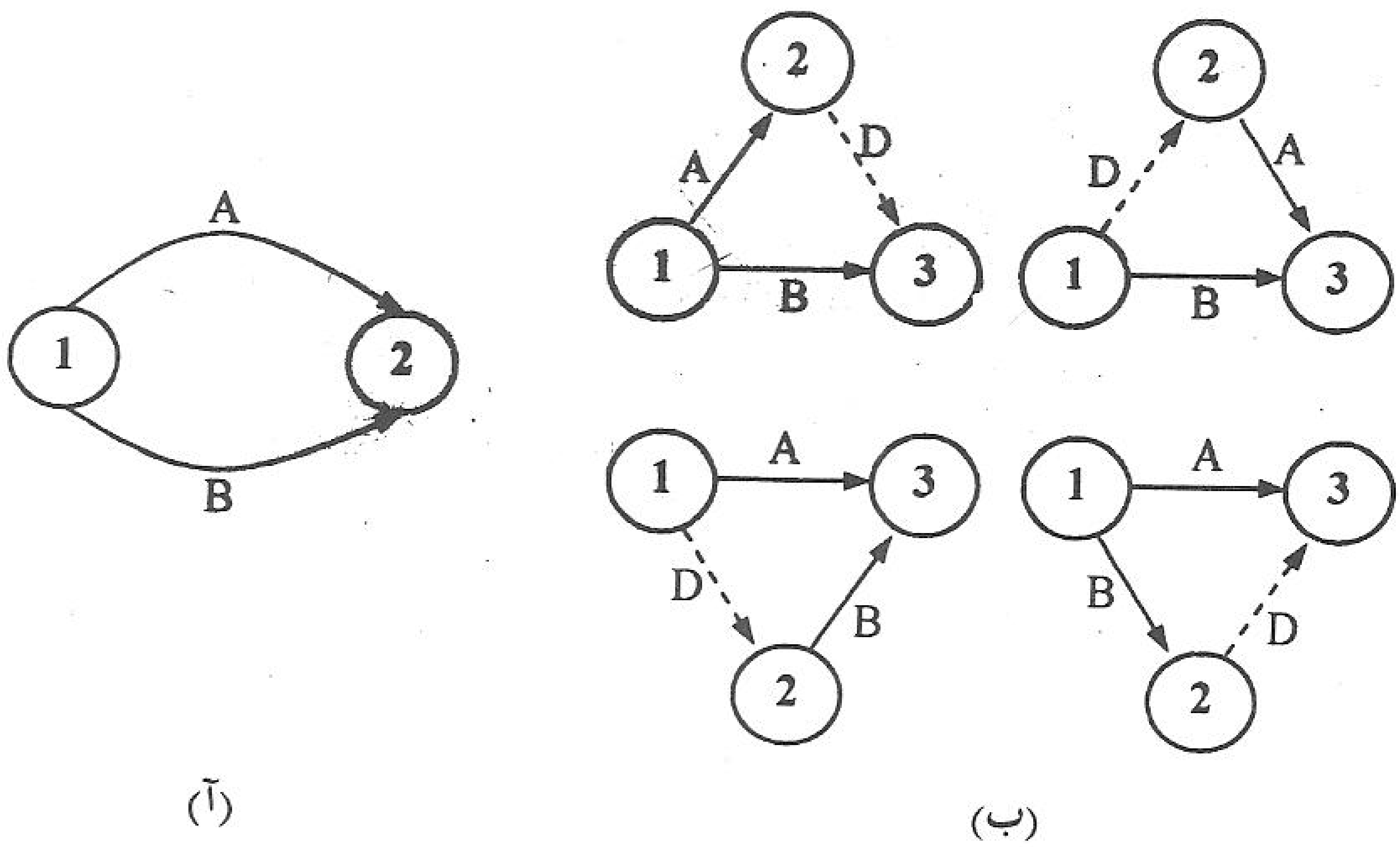
الشكل ٦-١

يجب التقيد بالقواعد التالية خلال إنشاء المخطط الشبكي لمشروع ما:

١- تمثل كل فعالية بسهم واحد فقط في المخطط الشبكي. لايمكن تمثيل فعالية ما مرتين في المخطط الشبكي، وذلك كي نتمكن من التعرف على حالة تقسيم فعالية ما إلى أجزاء، في مثل هذه الحالة، يمثل كل جزء بسهم منفصل.

٢- لا يجوز تمثيل فعاليتين يكون لهما نفس حادثي الذنب وحادثي الرأس، أي مبتدئتين في عقدة ومنتهيتين في عقدة أخرى. يمكن أن تبرز حالة كهذه عندما يكون تنفيذ فعاليتين أو أكثر على التوازي ممكناً. يبين الشكل ٦-٢(آ) مثالاً على ذلك، حيث الفعاليتان A و B لهما نفس حدث الرأس

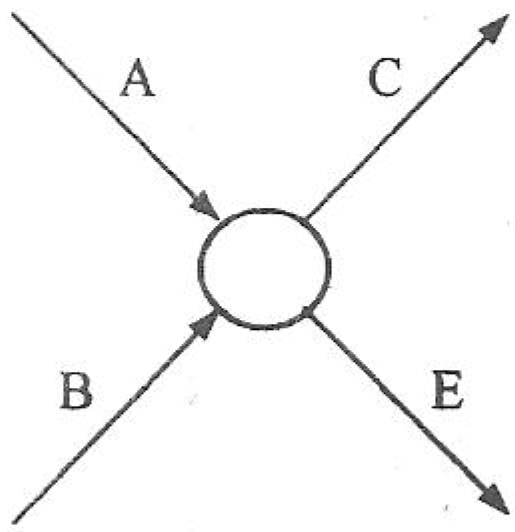
ونفس حدث الذنب، **أي تمثيل خاطئ.** لذلك يجب استخدام فعالية وهمية (dummy)، زمن تنفيذها صفر، إما بين A وإحدى حدثي النهاية، أو بين B وإحدى حدثي النهاية. يبين الشكل ٦-٢(ب) إضافة **الفعالية الوهمية** D، **أي تمثيل صحيح.** كنتيجة لإضافة D، تمثل الفعاليتين A و B بحادثي نهاية مختلفين. يجب ملاحظة أن أزمنة تنفيذ الفعاليات الوهمية تكون أصفار، أي لاتستخدم أي موارد.



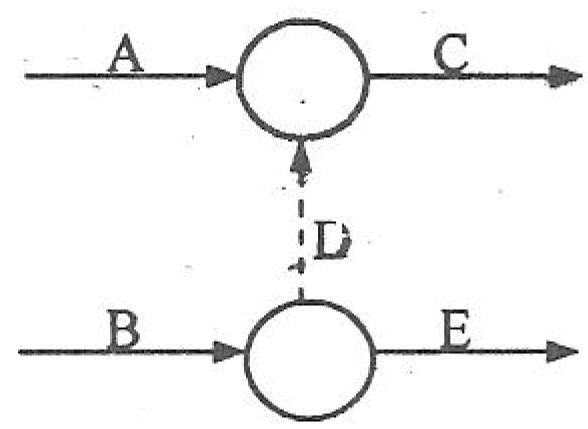
الشكل ٦-٢

تفيد الفعاليات الوهمية أيضاً، في إرساء العلاقات المنطقية في المخطط الشبكي، حيث لايمكن تمثيل هذه العلاقات بشكل صحيح دون استخدام الفعاليات الوهمية. مثلاً، في مشروع ما، الفعاليتان A و B تسبقان الفعالية C، بينما الفعالية B فقط تسبق الفعالية E. يبين الشكل ٦-٣ (آ) **التمثيل الخاطئ** لهذه الحالة، لأنه على الرغم من كون العلاقات المنطقية بين الفعاليتين A,B و C محققة، إلا أن التمثيل في المخطط يتضمن أن الفعالية E مسبوقة بالفعاليتين A و B. يبين الشكل ٦-٣ (ب) **التمثيل الصحيح** لهذه العلاقات، باستخدام الفعالية الوهمية D، وبما أن الفعالية D يكون زمن

تنفيذها صفراً، تكون علاقات الأسبقية المفروضة على المشروع محققة.



(آ)



(ب)

الشكل ٦-٣

٣- يجب اختبار علاقات الأسبقية بشكل مستمر خلال إنشاء المخطط الشبكي، وذلك بالإجابة على الأسئلة التالية لدى إضافة أية فعالية إلى المخطط.

(آ)- ماهي الفعاليات التي يجب إنهاؤها قبل البدء بهذه الفعالية مباشرةً؟

(ب)- ماهي الفعاليات التي يجب أن تلي هذه الفعالية؟

(ت)- ماهي الفعاليات التي يجب تنفيذها على التوازي مع هذه الفعالية؟

إن هذه القواعد تشرح نفسها بنفسها، وهي فعلياً تسمح باختبار وإعادة اختبار علاقات الأسبقية، خلال متابعة إنشاء المخطط الشبكي.

٦-٥ إنشاء المخطط الشبكي

إن عملية إنشاء المخطط الشبكي يمكن أن تتم باستخدام عدة طرق، يمكن تلخيص إحداها على النحو التالي: يجب البدء برسم عقدة البداية، ثم تضاف الفعاليات بشكل تدريجي للعقدة الأولى، وعندما يكون هذا صعباً تتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: ترسم عقدة بداية المشروع التي تكون هي عقدة البداية لجميع الفعاليات التي لا تسبقها أية فعالية. ثم ترسم هذه الفعاليات، كأسهم منبثقة من هذه العقدة.

الخطوة الثانية: إذا كانت جميع فعاليات المشروع مرسومة، تنفذ الخطوة الرابعة،

وإلا يتم البحث عن فعالية ما غير مرسومة بعد، بشرط أن تسبقها فقط فعالية واحدة مرسومة. ترسم هذه الفعالية، بحيث تكون عقدة بدايتها هي عقدة نهاية سابقتها. تعاد هذه الخطوة، وإذا لم يتبق فعالية تحقق ذلك تنفذ الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة: يتم البحث عن فعالية لم ترسم بعد، والتي تسبقها فعاليتان أو أكثر رسمت. ترسم عقدة النهاية لإحدى الفعاليات السابقة لها، وإذا كان ضرورياً لجميع هذه الفعاليات، وتولد فعاليات وهمية مناسبة تنتهي في عقدة بداية هذه الفعالية والتي من الممكن رسمها الآن. يعاد تنفيذ الخطوة الثانية.

الخطوة الرابعة: ترسم عقدة نهاية المشروع. تكون هذه العقدة نهاية جميع الفعاليات التي لم ترسم عقد نهايتها.

بعد إنشاء المخطط الشبكي، يجب ملاحظة القواعد التالية في ترقيم العقد، إذا كانت هنالك رغبة لاستخدام الحاسوب لحل المسألة:

١- ترقم عقدة بداية المشروع بـالرقم 1.

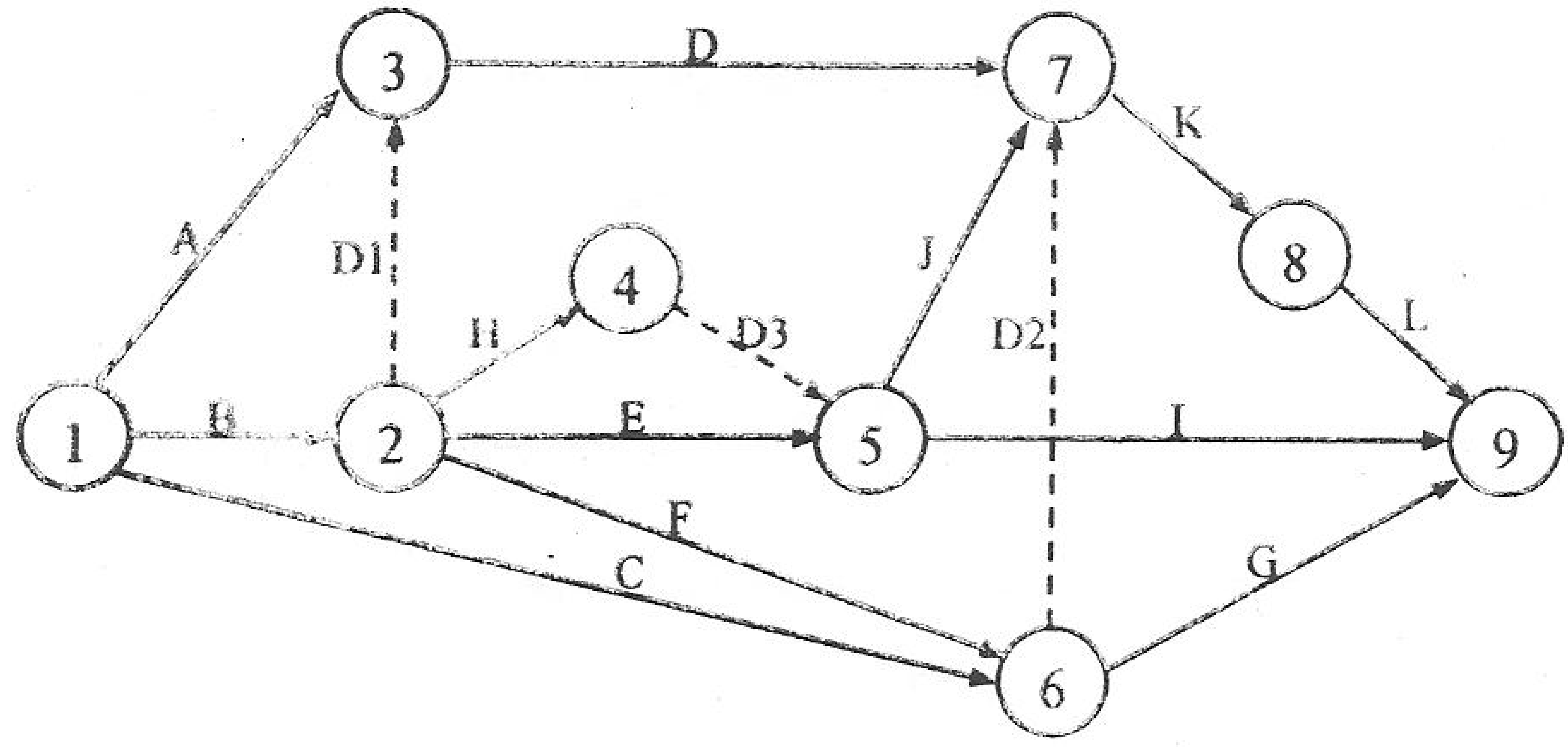
٢- ترقم بقية العقد، بحيث إذا بدأت الفعالية في العقدة i وانتهت في العقدة j يجب أن تكون i أصغر من j.

٣- يدل الرقم k على عقدة وحيدة.

يوضح المثال التالي عملية استخدام الخطوات السابقة.

مثال: المطلوب إنشاء المخطط الشبكي لفعاليات المشروع المكون من الفعاليات A، B، C، ...، L، بحيث تكون علاقات الأسبقية التالية محققة:

اسم الفعالية	الفعاليات السابقة
A	-
B	-
C	-
D	A , B
E	B
F	B
G	F , C
H	B
I	E , H
J	E , H
K	C , D , F , J
L	K



الشكل ٦-٤

يبين الشكل ٦-٤ المخطط الشبكي الناتج. حيث استخدمت الفعاليات الوهمية D1، D2 لتحقيق علاقات الأسبقية المفروضة من قبل فعاليات المشروع. أما الفعالية الوهمية D3 فقد استخدمت لتحديد نهاية الفعاليتين E و H في حدث واحد هو العقدة

رقم 5.

٦-٦ حسابات المسار الحرج

يقود تطبيق تقنية PERT-CPM إلى جدول يعطي زمني البدء والنهاية لكل فعالية من فعاليات المشروع. يمثل إنشاء المخطط الشبكي الخطوة الأولى في عملية تحقيق هذا الهدف. بسبب التداخلات بين الفعاليات المختلفة، فإن إيجاد هذين الزمنين يتطلب إجراء حسابات خاصة. تنفذ هذه الحسابات مباشرة على المخطط الشبكي، وباستخدام عمليات رياضية بسيطة. تنتهي هذه الحسابات في تصنيف فعاليات المشروع كفعاليات حرجة أو غير حرجة. تصنف فعالية ما على أنها حرجة، إذا كان أي تأخير في بدء تنفيذها سوف يسبب تأخيراً في زمن إنجاز كامل المشروع. أما الفعاليات غير الحرجة، فهي تلك التي يكون الفرق بين أبكر زمن يمكن أن تبدأ فيه، وآخر زمن يمكن أن تنتهي فيه (كما هو مسموح من قبل المشروع)، أطول من زمن تنفيذها الفعلي. في مثل هذه الحالة، تملك الفعاليات غير الحرجة أزمنة فائضة (slack) أو (float).

سوف تناقش فوائد التعرف على الفعاليات الحرجة وغير الحرجة، ومعرفة الأزمنة الفائضة في فقرة لاحقة. بينما تخصص هذه الفقرة لكيفية الحصول على هذه المعلومات فقط.

٦-٦-١ إيجاد المسار الحرج

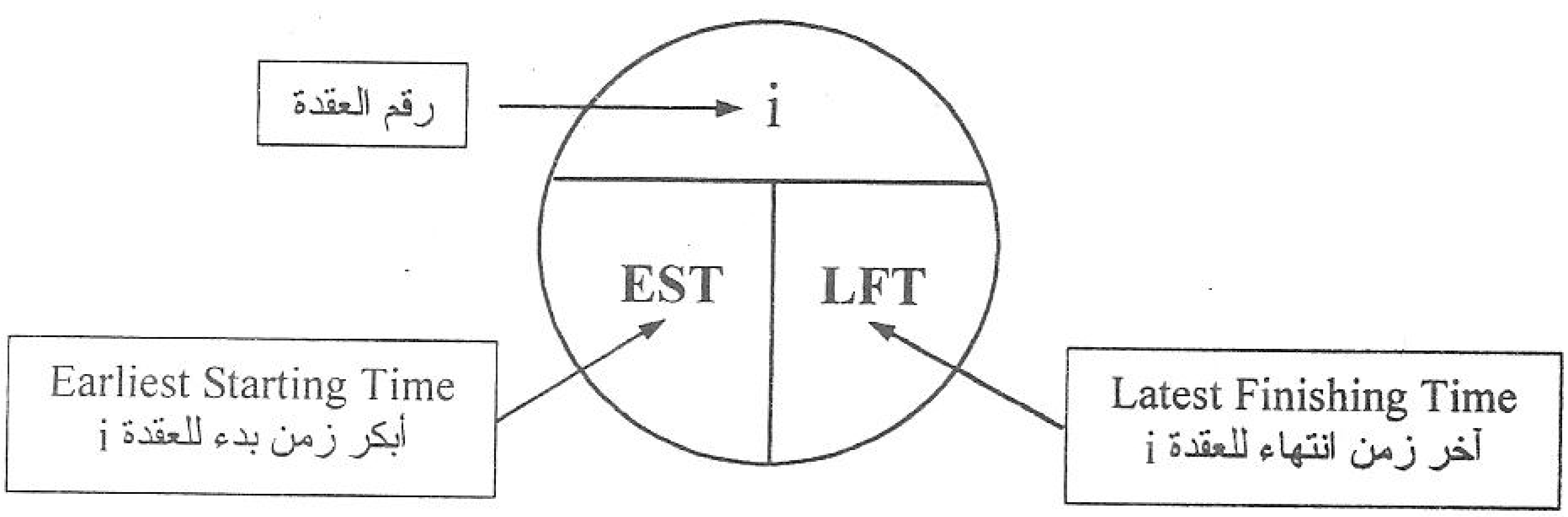
يعرف المسار الحرج جميع الفعاليات الحرجة ضمن المشروع، والفعاليات الحرجة عبارة عن سلسلة من الفعاليات تربط العقدة الأولى مع العقدة الأخيرة في المخطط الشبكي للمشروع. ستوضح طريقة إيجاد المسار الحرج بمثال عددي:

بفرض أن الفعاليات المبينة في المثال السابق مع أزمنة (وحدة زمنية[يوم]) تنفيذ كل منها معطاة كما يلي:

الفعالية	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
مدة التنفيذ	3	12	4	10	2	3	2	4	3	16	2	2

لو تمت معرفة أن أبكر زمن انتهاء للفعالية C هو نهاية اليوم الرابع، وأن أبكر زمن انتهاء للفعالية F هو نهاية اليوم الخامس عشر، أي أن أبكر زمن لانتهاء جميع الفعاليات التي تنتهي في العقدة 6 هو نهاية اليوم الخامس عشر (أطول زمن من زمني الانتهاء المبكر). فقط في هذا الوقت يمكن للفعاليات المنبثقة من العقدة ٦ أن تبدأ. أي إن الفعاليتين G و K لايمكن أن يبدأ تنفيذهما إلا في اليوم الخامس عشر لبدء تنفيذ المشروع. يعرف أبكر زمن بدء لفعالية ما، بأنه يساوي أبكر زمن للعقدة التي تبدأ منها الفعالية، أي آخر أزمان الانتهاء المبكرة لجميع الفعاليات السابقة، وفي هذه الحالة يكون هذا الزمن هو اليوم الخامس عشر. وهكذا تتم الحسابات إلى أن نوجد أبكر زمن لانتهاء تنفيذ كامل المشروع.

بغية إجراء الحسابات على المخطط الشبكي، من المناسب تقسيم دائرة كل عقدة إلى ثلاثة أجزاء، كما هو موضح في الشكل ٦-٥ التالي:



الشكل ٦-٥

حيث: EST(i) هو أبكر زمن يمكن أن تبدأ فيه الفعاليات المنبثقة من العقدة i.

و LFT(i) هو آخر زمن يمكن أن تنتهي فيه الفعاليات المنتهية في العقدة i.

. يتم حساب المسار الحرج على مرحلتين كما يلي:

المرحلة الأولى: تدعى مرحلة المرور الأمامي. حيث تبدأ الحسابات من العقدة الأولى وتتقدم حتى العقدة الأخيرة. يحسب لكل عقدة أبكر زمن يمكن البدء فيه بتنفيذ الفعاليات المنبثقة من هذه العقدة، ويسمى زمن البدء المبكر EST(i) للعقدة i، مع ملاحظة أن: $EST(1) = 0$.

بفرض أن D_{ij} تمثل زمن تنفيذ الفعالية (i,j)، يمكن إيجاد زمن البدء الباكر لجميع العقد، أي EST(j)، من $j = 2$ وحتى $j = n$ باستخدام العلاقة التالية:

$$EST\left(j\right) = \max_{i} \left\{EST\left(i\right) + D_{ij}\right\}$$

وذلك لجميع الفعاليات(i,j) المعرفة.

$$EST\left(1\right) = 0$$
$$EST\left(2\right) = 0 + 12 = 12$$
$$EST\left(3\right) = \max_{i=1,2} \left\{0 + 3 , 12 + 0\right\} = 12$$
$$EST\left(4\right) = 12 + 4 = 16$$
$$EST\left(5\right) = \max_{i=2,4} \left\{12 + 2 , 16 + 0\right\} = 16$$
$$EST\left(6\right) = \max_{i=1,2} \left\{0 + 4 , 12 + 3\right\} = 15$$
$$EST\left(7\right) = \max_{i=3,5,6} \left\{12 + 10 , 16 + 16 , 15 + 0\right\} = 32$$
$$EST\left(8\right) = 32 + 2 = 34$$
$$EST\left(9\right) = \max_{i=5,6,8} \left\{16 + 3 , 15 + 2 , 34 + 2\right\} = 36$$

بعد الانتهاء من حسابات المرحلة الأولى، يمكن الاستنتاج أن زمن تنفيذ المشروع الأصغري هو 36 يوماً.

المرحلة الثانـــية: تدعى مرحلة المرور العكسي. حيث تبدأ الحسابات من العقدة الأخيرة وتتحرك بشكل عكسي حتى العقدة الأولى. يحسب لكل عقدة آخر زمن للانتهاء فيه من تنفيذ الفعاليات المنتهية في هذه العقدة، ويسمى زمن الإنجاز المتأخر

LFT(i) للعقدة i. بفرض أن n هي آخر عقدة في المشروع يكون: = LFT(n)
.EST(n)

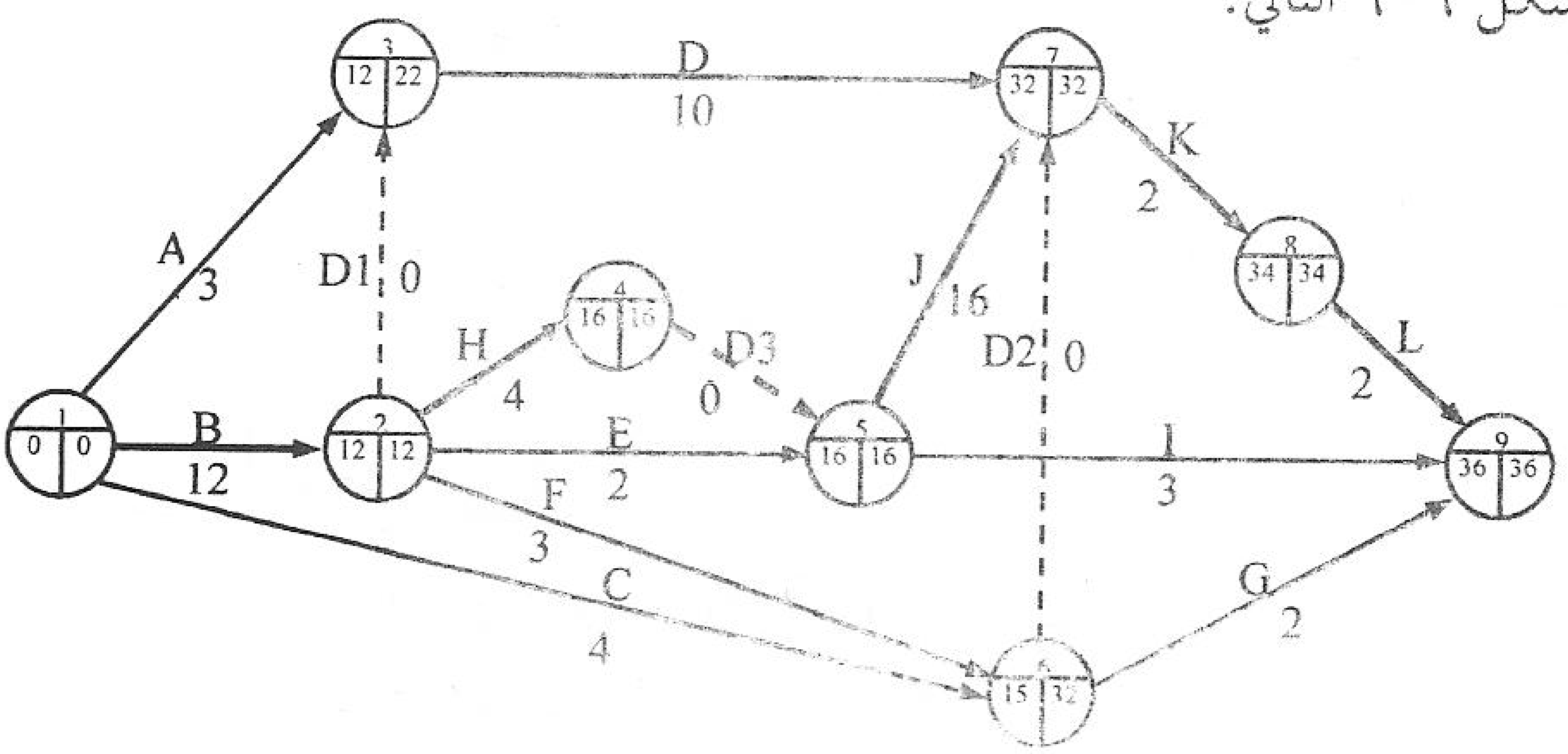
بعد ذلك، يمكن إيجاد زمن الإنجاز المتأخر لجميع العقد، أي LFT(i)، من i = n-1 وحتى i = 1 ، أي مرحلة المرور العكسي، باستخدام العلاقة التالية:

$$LFT(i) = \min_{j} \{ LFT(j) - D_{ij} \}$$

وذلك لجميع الفعاليات(i,j) المعرفة.

$$LFT(9) = EST(9) = 36$$
$$LFT(8) = 36 - 2 = 34$$
$$LFT(7) = 34 - 2 = 32$$
$$LFT(6) = \min_{j=7,9} \{32 - 0 , 36 - 2\} = 32$$
$$LFT(5) = \min_{j=7,9} \{32 - 16 , 36 - 3\} = 16$$
$$LFT(4) = 16 + 0 = 16$$
$$LFT(3) = 32 - 10 = 22$$
$$LFT(2) = \min_{j=3,4,5,6} \{22 - 0 , 16 - 4 , 16 - 2 , 32 - 3\} = 12$$
$$LFT(1) = \min_{j=2,3,6} \{12 - 12 , 22 - 3 , 32 - 4\} = 0$$

يمكن القيام بهذه الحسابات على المخطط الشبكي مباشرة، كما هو موضح في الشكل ٦-٦ التالي:



الشكل ٦-٦

بالانتهاء من حسابات مرحلتي المرور الأمامي والعكسي، يمكن استخدام نتائج هذه الحسابات في تحديد الفعاليات الحرجة كما يلي:

اعتبر العقدة رقم 3 في الشكل ٦-٦ حيث: $LFT(3)=22\ ,\ EST(3)=12$

وكذلك العقدة رقم 7 حيث: $EST(7)=32$

بملاحظة أن الفعالية D يستغرق تنفيذها 10 أيام فقط، نرى بوضوح أن هذه الفعالية يمكن تأخيرها 10 أيام دون أن يؤثر هذا التأخيرعلى زمن البدء الباكر للفعاليات التي تليها. وبالتالي لا تؤثر على زمن إنجاز المشروع المبكر. الفعالية D ليست حرجة.

بالمقارنة نفسها، نرى أن الفعالية H لا يمكن تأخيرها أية مدة زمنية دون أن يتأثر زمن البدء الباكر للفعاليات التي تليها، وبالتالي فإن تأخيرها سوف يؤخر زمن إنجاز المشروع المبكر. الفعالية H حرجة.

أية فعالية (i , j) تكون حرجة إذا حققت الشروط الثلاثة التالية:

1- $EST(i)=LFT(i)$

2- $EST(j)=LFT(j)$

3- $EST(j)-EST(i)=LFT(j)-LFT(i)=D_{ij}$

تدل هذه الشروط، في حال تحققها لأية فعالية، على أنه لايوجد أي زمن فائض بين زمن البدء المبكر وزمن البدء المتأخر لهذه الفعالية. كما يمكن التعرف على هذه الفعاليات الحرجة من المخطط الشبكي مباشرة، وهي تلك الفعاليات التي تكون قيم EST و LFT متساويتين لكل من عقدتي الرأس والذنب، والفرق بين قيمتي EST لعقدتي الرأس والذنب يساوي الفرق بين قيمتي LFT لعقدتي الرأس والذنب يساوي زمن تنفيذ الفعالية.

في مثالنا هذا تكون الفعاليات الحرجة (الأسهم الغامقة) هي:

$(1,2)\ ,\ (2,4)\ ,\ (4,5)\ ,\ (5,7)\ ,\ (7,8)\ ,\ (8,9)$

B , H , D3 , J , K , L

وهي التي تعرف المسار الحرج. ويكون الزمن 36 يوماً هو فعلاً أقل زمن ممكن لإنجاز المشروع. لاحظ أن الفعاليات (2,5),(5,9) تحقق الشرطين الأول والثاني، ولكنها لا تحقق الشرط الثالث، وبالتالي فهي ليست حرجة. لاحظ أيضاً بأن المسار الحرج يشكل سلسلة من الفعاليات المتصلة بين العقدة الأولى والعقدة الأخيرة للمشروع.

٦-٦-٢ حساب الزمن الفائض

بعد الانتهاء من إجراء حسابات المسار الحرج، يجب حساب الزمن الفائض للفعاليات غير الحرجة. طبعاً، أية فعالية حرجة يكون لها صفر زمن فائض. ولهذا السبب نفسه تكون حرجة. أي فعالية ليست على المسار الحرج يمكن تأخير البدء في تنفيذها ضمن حدود، وهذا يعني أنه لكل فعالية غير حرجة زمناً فائضاً. قبل بيان كيفية حساب الزمن الفائض للفعاليات غير الحرجة، يجب تعريف المتغيرين التاليين:

LST(i,j) هو آخر زمن يمكن أن تبدأ به الفعالية (i,j).

EFT(i,j) هو أبكر زمن يمكن أن تنفذ به الفعالية (i,j).

اللذين يمكن حسابهما من تعريفهما وفق العلاقتين التاليتين:

$$LST(i,j) = LFT(j) - D_{ij}$$

$$EFT(i,j) = EST(i) + D_{ij}$$

يوجد نوعان هامان من الأزمنة الفائضة:

آ- الزمن الفائض الكلي Total Float(TF):

يعرف الزمن الفائض الكلي على أنه أطول مدة زمنية يمكن تأخير البدء بتنفيذ فعالية ما (i,j)، دون أن يؤدي هذا التأخير إلى تأخير إنجاز المشروع، ويساوي الفرق بين زمن البدء المبكر EST(i) وزمن البدء المتأخر LST(i,j) للفعالية (i,j). كما يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$TF(i,j) = LST(i,j) - EST(i) = LFT(j) - EST(i) - D_{ij}$$

في المثال السابق يحسب الزمن الفائض الكلي للفعالية غير الحرجة C أو الفعالية (١،٦) كما يلي:

$$LST(1,6) = LFT(6) - D_{16} = 32 - 4 = 28$$
$$TF(1,6) = LST(1,6) - EST(1) = LFT(6) - EST(1) - D_{16}$$
$$= 28 - 0 = 32 - 0 - 4 = 28 \quad \text{days}$$

هذا يعني أنه بالإمكان تأخير تنفيذ الفعالية C لمدة 28 يوماً دون أن يؤثر ذلك على إنجاز المشروع المبكر.

ب- الزمن الفائض الحر Free Float (FF):

يعرف الزمن الفائض الحر على أنه أطول مدة زمنية يمكن تأخير البدء بتنفيذ فعالية ما (i,j)، دون أن يؤدي هذا التأخير إلى تأخير البدء المبكر للفعاليات التي تليها، ويساوي الفرق بين زمن البدء المبكر EST(j) وزمن البدء المتأخر EFT(i,j) للفعالية (i,j). كما يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$FF(i,j) = EST(j) - EFT(i,j) = EST(j) - EST(i) - D_{ij}$$

في المثال السابق يحسب الزمن الفائض الحر للفعالية غير الحرجة C أو الفعالية (6,1) كما يلي:

$$EFT(1,6) = EST(1) + D_{16} = 0 + 4 = 4$$
$$FF(1,6) = EST(6) - EFT(1,6) = EST(6) - EST(1) - D_{16}$$
$$= 15 - 4 = 15 - 0 - 4 = 11 \quad \text{days}$$

هذا يعني أنه بالإمكان تأخير تنفيذ الفعالية C لمدة 11 يوماً دون أن يؤثر ذلك على زمن البدء المبكر للفعالية G.

إضافة إلى هذين الزمنين الفائضين الهامين (نظراً لاستخدامهما الواسع)، هنالك الزمن الفائض المستقل، والزمن الفائض للأمان، وهما يستخدمان في بعض المسائل.

وكلاهما يشتق من فرضيات قاسية أو متشائمة على جدول المشروع. الزمن الفائض الحر يكون دائماً أصغر من أو يساوي الزمن الفائض الكلي. يساعد الزمن الفائض الكلي والزمن الفائض الحر في التخطيط للمشروع ، حيث يكون لدى المخطط الخيار لزمن البدء بتنفيذ الفعاليات التي لها زمن فائض بحيث يحقق هدفاً معيناً مفروضاً عليه (مثلاً أقل عدد من العاملين، أو مايسمى اتزان الموارد الذي سيناقش في فقرة تالية).

يلخص الجدول ٦-١ حسابات المسار الحرج،التي يمكن الحصول عليها من حسابات المخطط إلشبكي، مع الأزمنة الفائضة للفعاليات غير الحرجة، والتي يجب أن تحسب وفق العلاقات السابقة، وهو يحتوي على جميع المعلومات الضرورية لإنشاء المخطط الزمني.

لاحظ أيضاً أن الزمن الفائض الكلي للفعاليات الحرجة دائماً يساوي الصفر، وكذلك الأمر فإن الزمن الفائض الحر يجب أن يساوي الصفر طالما أن الزمن الفائض الكلي هو صفر. كما أنه يمكن لفعالية غير حرجة أن تملك زمناً فائضاً حراً يساوي الصفر.

الجدول ٦-١

الفعالية	مدة التنفيذ	أبكر		آخر		الزمن الفائض الكلي	الزمن الفائض الحر
		بدء	انتهاء	بدء	انتهاء		
		EST	EFT	LST	LFT	TF	FF
A	3	0	3	19	22	19	9
B	12	0	12	0	12	0	0
C	4	0	4	28	32	28	11
D	10	12	22	22	32	10	10
E	2	12	14	14	16	2	2

F	3	12	15	29	32	17	0
G	2	15	17	34	36	19	19
H	4	12	16	12	16	0	0
I	3	16	19	33	36	17	17
J	16	16	32	16	32	0	0
K	2	32	34	32	34	0	0
L	2	34	36	34	36	0	0