جامعة حماة
كلية الاقتصاد

الأساليب الكمية

مفهوم الأساليب الكمية

يفهم من مصطلح الأساليب الكمية بأنها مجموعة من الأدوات Tools أو الطرق Methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري المزمع اتخاذه بخصوص حالة معينة ، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة. ويتطلب تطبيقها واستخدامها أيضاً تحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر.

وقد عرفها البعض بأنها تلك الأطر الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها. ويتم تدعيم هذه الأطر الرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الآخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة. وبذلك تكون هذه الأطر الرياضية بمثابة الوسيلة أو الأسلوب التي من خلالها يتم معالجة المشكلة في الواقع العملي بعد أن يتم استيعاب معظم متغيراتها وثوابتها بحيث يتم التوصل في النهاية إلى الحل المطلوب لها.

تتصف هذه الأساليب بأن بعضها ذات طابع أو صفة احتمالية والبعض الآخر يتصف في كونه ثابت أو ساكن والبعض الآخر يتصف في كونه متغير بشكل مستمر حسب طبيعة العامل الزمني. إضافة إلى ذلك هنالك تقسيمات وتصنيفات لهذه الأساليب الكمية حسب طبيعة الاستخدام وحسب طبيعة العوامل الداخلة فيها كما سيرد ذلك أدناه.

أنواع الأساليب الكمية:

ضمن المنهج الكمي لإدارة الأعمال يمكن أن نميز بين الكثير من أنواع الأساليب الكميه التي تستخدم من قبل متخذ القرار في مجال ترشيد القرار الإداري أو لغرض حل مشكلة معينة في أحد مجالات إدارة المنشأة من أجل الحصول على الحلول المطلوبة. وفي هذا الصدد يمكن أن يتم الحصول على ثلاثة أنواع من الحلول حسب ما هو وارد في أدبيات المنهج الكمي لإدارة الأعمال وهي :

1- الحل الممكن Feasible Solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal Solution .

أن هذه الأساليب تقع تحت تسميات مختلفة في أدبيات المنهج الكمي إلا أن

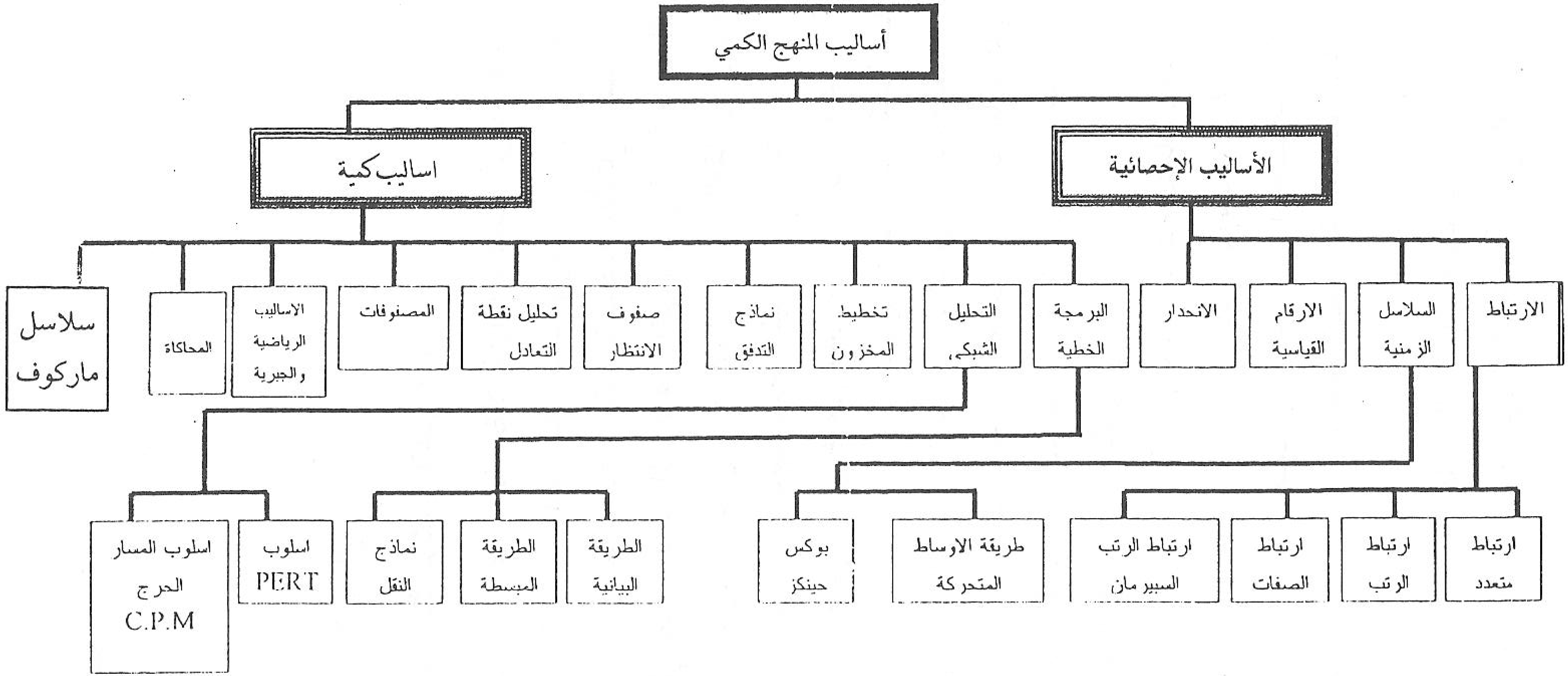
الشائع منها يقع تحت عنوان بحوث العمليات. يضاف إلى ذلك الأساليب الإحصائية كما هو واضح في الشكل رقم (1-1) حيث يتضح في الشكل المذكور ما يلي :

أولاً: أساليب كمية مختلفة :

1. البرمجة الخطية	Linear Programming
2. البرمجة الديناميكية	Dynamic Programming
3. نماذج الخزين	Inventory Models
4. شبكات العمل	Networks
5. نماذج الانتظار	Queuing Models
6. نظرية القرار	Decision Theory
7. المحاكاة	Simulation
8. نظرية الاحتمالات	Probabilities Theory
9. نظرية المباريات	Games Theory
10. الأساليب الرياضى والجبرية	Mathematical & Algebric
11. سلاسل ماركوف	Markov Chians
12. أسلوب المصفوفات	Matrices Methods
13. نماذج التدفق	Transshipment

ثانياً: الأساليب الإحصائية:

1. أسلوب الارتباط.
2. أسلوب الانحدار.
3. نماذج التوقع.
4. المقاييس والاختبارات الإحصائية.



الشكل (1-1) أنواع الأساليب التي يمكن أن تستخدم ضمن المنهج الكمي

البرمجة الخطية Linear Programming

من أجل البدء بخطوات توضح الأفكار المتعلقة باستخدام هكذا نوع من الأساليب يتطلب الأمر في البداية تحديد مفهوم البرمجة الخطية وكذلك مستلزمات تطبيقها في مختلف المجالات الإدارية لمتطلبات الأعمال.

1.5 مفهوم ومستلزمات تطبيق البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة التي تستخدم في ترشيد عملية اتخاذ القرارات المختلفة في منظمات الأعمال. بدأ استخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي George Dantzing لحل بعض مشكلات التخطيط في المجالات العسكرية، وقد ازداد تطبيقها من الآونة الأخيرة لحل الكثير من المشكلات الصناعية والاقتصادية والعسكرية وذلك بالتوافق مع الزيادة في استخدام الحواسيب وتطورها وظهور البراجيات الحديثة على نطاق واسع.

أن البرمجة الخطية تبحث عادة في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والمحددات المفروضة وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمة الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (Maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العائد النقدي المتوقع من خطة إنتاج معينة وما شابه ذلك. وقد يتعلق الأمر بتقليل أو تدنية (Minimize) قيمة الهدف، كما هو الحال في عملية تقليل تكاليف النقل أو تدنية تكاليف الإنتاج وما شابه ذلك. وقد عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية، بأنها الطريقة الرياضية التي بموجبها يتم تخصيص الموارد النادرة أو المحددة من أجل تحقيق هدف معين ومحدد. وعادة يكون من المستطاع التعبير عن هذا الهدف والقيود المرتبطة به في صيغة معادلات أو متباينات خطية. وهناك تعريف آخر ومختصر للبرمجة الخطية ينص على أنها ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهتم

بشكل أو بآخر بالاستغلال الأمثل للموارد المحددة (بشرية أو مادية وما شابه ذلك) لتلائم الأهداف المطلوبة. ويتم ذلك وفق أسلوب علمي مبرمج. وهنا لابد من الإشارة والتوضيح بأن مصطلح البرمجة Programming الوارد ذكره أعلاه يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي والعلمي في تحليل المشكلة وعلاجها. أما مصطلح الخطية فإنه يعني أن هناك علاقة ثابتة يبن المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود يمكن تمثيلها في هيئة خط مستقيم.

أن من مستلزمات استخدام البرمجة الخطية في حل المشاكل التي تواجه منظمة الأعمال، هو توفر الشروط التالية:

1- تحديد الهدف الذي تسعى المنظمة إلى تحقيقه، وقد ينطوي الهدف المذكور على تحقيق أقصى عائد أو الوصول بالكلفة إلى أدنى مستوى ممكن. والصيغة الرياضية للهدف يطلق عليها اصطلاحاً دالة الهدف (objective function).

2- ينبغي أن تكون الموارد المتاحة لتحقيق الهدف محدودة، وهذا يعني أنه ليس هناك حاجة لبرمجة استخدام الموارد التي لا تتصف بالمحدودية حتى وإن كانت تمثل عنصراً أساسياً في تحقيق الهدف.

3- وجود بدائل مختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيد البرمجة، بحيث يكون بمقدور متخذ القرار اختيار واحد من هذه البدائل.

4- إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة وهدف الدراسة والمتغيرات بصورة كمية أو رقمية.

5- وجود علاقة بين المتغيرات أو العوامل المتغيرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة. وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطية، وهذا يعني أن دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة هي علاقات رياضية من الدرجة الأولى سواء كانت مكتوبة في صيغة معادلات أم متباينات.

أن الواقع العملي يمكن أن يكشف عن استخدامات واسعة للبرمجة الخطية، وأهم هذه الاستخدامات هي:

1- توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة من مواد أولية، قوى عاملة مكائن ومعدات ومستلزمات إنتاج مختلفة، وذلك بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد.

2- صياغة جداول أو برامج عمل بما يضمن تقليل كلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن وبما يضمن أفضل المزايا لمتخذ القرار في المنظمة.

3- تخطيط الإنتاج بأنواعه لاختيار ذلك الهيكل أو التشكيلة في المنتجات التي تضمن أعلى العوائد للمنظمة ويحقق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

4- التوزيع الأمثل للمنتجات أو البضائع بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام. أو الاستهلاك بأقل كلفة كلية للنقل والتوزيع.

يكون تطبيق أو استخدام البرمجة الخطية وفق خطوات واضحة ومحددة، يمكن إجمالها على النحو التالي:

أولاً: دراسة وتحليل المشكلة وجمع البيانات اللازمة عنها مع تحديد كافة الفرضيات والثوابت اللازمة لتطبيق الأسلوب المذكور.

ثانياً: تحديد الهدف المطلوب، حيث قد يكون بلوغ أقصى ربح ممكن أو تخفيف التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. ويتم صياغة الهدف ضمن النموذج الرياضي للمشكلة في صيغة علاقة رياضية تكتب بشكل دالة وتسمى بدالة الهدف (objective function).

ثالثاً: تحديد القيود Constraints التي تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف، وتعبر هذه القيود عن طبيعة الموارد المتاحة من مواد أولية، وقوى عامل ومكائن وحدات وغير ذلك من مستلزمات الإنتاج المحددة، ويتم التعبير عن هذه القيود من خلال متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى.

بالإضافة إلى ما تقدم فإن هناك قيوداً من نوع آخر يطلق عليها اسم قيود اللاسلبية (Non - negativity constraints) والتي تعني أن جميع قيم المتغيرات حقيقية وغير سالبة. ويعني أيضاً لا يجوز أن تكون الأعداد والكميات سالبة.

2.5 النموذج العام للبرمجة الخطية

General form of linear Programming:

في ضوء ما تقدم من توضيحات حول طبيعة البرمجة الخطية ومفهومها ومكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، نجد أن بالإمكان التعبير عن النموذج بأبسط صورة

له كما يلي :

إذا كان المطلوب هو العمل على إيصال قيمة دالة الهدف إلى القيمة المثلى لها ، أي أن :

$$\text{Optimize } Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

بعد إستيعاب الشروط المعبر عنها كما يلي :

Subject to:

$$\text{constraints} \begin{cases} g\,i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le, =, \ge bi \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots d\,m\,n) \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

ويمكن إعادة صياغة هذا النموذج الرياضي بعد الأخذ بنظر الاعتبار كافة الحدود الممكنة للنموذج من حيث عدد المتغيرات (j) وعدد القيود و (i) (حيث أن $(j = 1, 2, \dots, n,\ i = 1, 2, m)$. وكذلك بعد الأخذ بنظر الاعتبار إمكانية أن يكون المطلوب هو تعظيم الهدف إلى أعلى مستوى ممكن أو تدنيته إلى أدنى مستوى ممكن ، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

القيود $\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j \le, =, \ge bi \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

دالة الهدف $Z = \sum_{j=1}^{n} c\,j\,x\,j \rightarrow \text{Max. or Min}$

$x\,j \ge 0\ (j = 1, 2, \dots n)$ قيد اللاسلبية

تعتبر هذه الصيغة الأساس الرياضي للعديد من الصيغ الرياضية وعلى أساسها يمكن كتابة الصيغة التفصيلية التي تأخذ نظر الاعتبار الصفوف والأعمدة الممكنة الخاصة بالنموذج. وأن كتابة الصيغة التفصيلية يعرف أيضا بعملية فتح النموذج العام أن الصيغة التفصيلية تكتب كما يلي :

القيود

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le \ = \ \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le \ = \ \ge b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le = \ \ge b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow$ Max. or Min.

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$

من الصيغ الرياضية الواردة أعلاه يتم اشتقاق نوعين أساسيين في الصيغ الرياضية وهي :

أولاً : الصيغة القانونية Canonical Form :

أن من أهم صفات هذه الصيغة هي أن القيود في النموذج الرياضي تظهر بعلامة (≤) أقل أو يساوي أو (≥) أكبر ما يساوي أو كليهما معاً. وعادة تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمة لها (.Max) مع الصيغة التي تكون قيودها الرياضية مكتوبة بعلامة (≤). في حين تصل دالة الهدف إلى اقل قيمة لهما (Min) إذا كانت قيود النموذج الرياضي مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي وتعرف هذه الصيغة بأنها الصيغة الرياضية الغير مستقرة. ويمكن كتابة الصيغة القانوية canonical form للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية كما يلي :

1- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي :

القيود

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad b_2 \\ \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow$ Max.

قيود الأسلوب $x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j \leq, =, \geq bi \quad (i=1,2,...,m)$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c\,j\,x\,j \rightarrow Xj \geq 0\,Max\,(j=1,2,...,n)$$

2- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

القيود $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\dots n)$$

3- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامات مختلفة (≤) أقل أو يساوي وكذلك علامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

القيود $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow Max . or Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq, \geq b_i \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Max. or Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\dots n)$$

ثانياً: الصيغة القياسية Standard Form :

أن الصيغة القياسية هي الحالة المستقرة للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية يتم اشتقاقها من الصيغة القانونية السابقة بعد أن يتم إضافة عدد من المتغيرات وطبقاً لكل نوع من أنواع العلامات الرياضية (≤ ، = ، ≥) وذلك كما هو واضح في الجدول(5-1).

جدول رقم (5-1) قواعد إضافة المتغيرات

نوع المتغير الذي يضاف إلى دالة الهدف	نوع المتغير الذي يضاف إلى القيد	نوع العلامة الرياضية في القيد
$Max.\ Z = ...+0.S$ $Min.\ Z = ...+0.S$	$+S$	≤أقل أو يساوي
$Max.\ Z = ...+0.S-MR$ $Min.\ Z = ...+0.S+MR$	$-S+R$	أكبر أو يساوي ≥
$Max\ Z = ...-MR$ $Min.\ Z = ...+MR$	$+R$	= يساوي

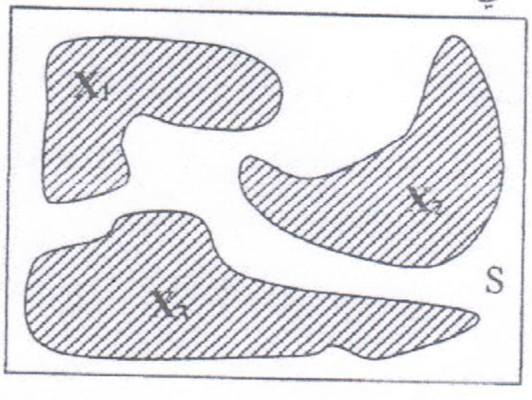
حيث أن :

$+S$ هي متغير slack variable يضاف إلى طرق المعادلة الأصغر ويسمى أيضاً المتمم الرياضي وبلغه الإنتاج يعرف بمقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة. والمثال التالي يوضح فكرة المتغير المذكور :

إذا كان لدينا قطعة قماش طولها 5 متر وعرضها 3 متر ومطلوب استغلالها لإنتاج بدلات معينة فإنها يمكن أن تأخذ الشكل التالي :

5 متر

3 متر



ومن الشكل المذكور نستنتج أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

وإذا كان S هو مقدار الفضلات بعد فإن :

$$x1 + x2 + x3 + S = 15$$

حيث أن S تمثل في هذه الحالة أيضاً بمثابة المتمم الرياضي أو المتغير الراكد المشار إليه أعلاه.

S- ⇐ ويسمى بالتغير الفائض (sur pluse) ويعبر عن مقدار المواد الفائضة - أي على سبيل المثال إذا كانت الحاجة إلى مادة أولية معينة هي 100 وحدة وكان الموجود هو 120 فإن الـ 20 الإضافية هي مقدار الفائض عن الحاجة. وعادة تطرح من الطرف الكبير في العلاقة التي تحمل العلاقة ≤ أكبر أو يساوي.

R ⇐ المتغير الاصطناعي Artificial variable وهو ذلك المتغير الذي يستخدم بهدف معالجة الإشارة السالبة للتغير الفائض (S-). ويضاف هذا المتغير أيضا إلى القيد الذي يحمل علامة المساواة من أجل تكوين ما تسمى بمصفوفة الوحدة identity Matirix $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ضمن طريقة السمبلكس التي هي ضرورية لإكمال عملية الحل.

ومن الجدير بالذكر هنا أن هذا المتغير ليس له أي معنى ضمن المشكلة المدرسة. وأن وجوده في المشكلة هو فقط لأغراض رياضية بحتة وبالتحديد من أجل معالجة الإشارة السالبة للمتغير الفائض التي تتعارض مع قيد اللاسلبية (Si≥0)، وبذلك فإن من المفروض التخلص من هذا المتغير في المراحل الأولى من عمليات الحل، ومن أجل تنفيذ هذه المهمة يستخدم معامل كبير بمقدار (M) لمرافقة هذا المتغير وعادة يكون أكبر من أي معامل آخر موجود في النموذج الرياضي وذلك من أجل التعمد بعدم ظهور هذا المتغير في النتائج النهائية للمشكلة.

M ⇐ معامل المتغير الاصطناعي R وهو كمية كبيرة جدا افتراضية وعلى الأغلب تكون من مضاعفات الرقم (10) عشرة أي (الخ ... ، 1000 ، 100 ، 10) وعلى أساس هذا المعامل يتم تسمية طريقة الحل المسماة M-Technique أو ما يسمى أيضا (Big - M).

وعلى أساس ما تقدم فإن الصيغ القياسية لنماذج البرمجة الخطية هي كما يلي:

1- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_1 &= b_2 \\ am_1x_1 + am_2x_2 + \dots + a_{mn}x_{n} + s_m &= b_m \end{aligned}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0.5_1 + 0.5_2 \dots .0.5\ m \rightarrow Max.$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j + si = bj \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj + 0.Si \rightarrow Max.$$

$$xj \geq 0 \qquad si \geq 0$$

2- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - S + R = b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - S + R_2 = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$am_1x_1 + am_2x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n - Sm + Rm = b_m$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0.S_1 + 0.S_2 + \dots 0.Sm + MR_1 + MR_2 + \dots + MR_m \rightarrow Min$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$$

$$R_1, R_2, \dots, R_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{m} a\,i\,j\,x\,j - si + Ri = bi \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj + 0.si + MRi \rightarrow Min$$

$$xj \geq 0 \quad , \quad si \geq 0 \quad , \quad Ri \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامات رياضية مختلطة (≥ = ≤)، فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي (على افتراض لدينا ثلاثة قيود فقط فإن دالة

الهدف تصل إلى Min).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to Min$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

يصبح النموذج أعلاه مكتوباً بالصيغة القياسية كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - s_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n + \quad R_3 = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0.S_1 - 0.S_2 + MR_2 + MR_3 \to Min$$
$$X_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$
$$S_1, s_2 \geq 0$$
$$R_2, R_3 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3.5 افتراضات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يتميز النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية بعدد من الافتراضات كي يكون مناسباً ومقبولاً من الناحية العلمية والعملية، وهي :

أولاً: التناسبية Proportionality :

يعني هذا الافتراض أن المساهمة في حالة الهدف من جهة والكمية المستخدمة من المصادر من جهة أخرى أن تكون متناسبة مع قيمة كل متغير من متغيرات القرار. ولتوضيح ذلك نفرض أن أحد قيم المتغيرات الأساسية لمشكلة معينة هو 10 ($X_1 = 10$) وأن هامش الربح للوحدة الواحدة من هذا المتغير يساوي 5 دينار، وأن كل وحدة واحدة من هذا المتغير الأساسي يتطلب وحدة من المادة الأولية الأصلية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية، وعليه فإن مساهمة هذا المتغير الأساس في دالة الهدف هي 50 دينار (5×10) وأن انتاج 10 وحدات من هذا المتغير يتطلب 30 وحدة ($10\times2 + 10\times1 = 30$) وحدة من المواد الأولية المتاحة.

ثانياً: الإضافية Additivity :

أن هذا الافتراض يعني أن قيمة دالة الهدف والموارد الكلية المستخدمة في المشكلة يمكن إيجادها من خلال جمع مساهمة دالة الهدف والموارد المستخدمة لجميع المتغيرات. أي أن قيمة دالة الهدف تمثل مجموع مساهمات جميع المتغيرات الأساسية، وكذلك فإن الموارد الكلية المستخدمة تمثل مجموع الموارد المستخدمة لكل متغير من هذه المتغيرات.

ثالثاً: قابلية القسمة Divisibility :

وتعني هذه المتغيرات يمكن أن تأخذ قيماً كسرية وليس بالضرورة أن تكون جميع قيم المتغيرات أعداداً صحيحة.

رابعاً: اللاسلبية Negativity–Non :

وتعني هذه أن متغيرات القرار لا يمكن أن تكتب كميات ومقادير سالبة، حيث أن من المعروف من الناحية المنطقية أن القيم السالبة للكميات والمقادير تعتبر مستحيلة. إذ لا يمكن أن يكتب الإنتاج أو التسويق للبضائع والسلع بالسالب. وعادة يعبر عن هذه الافتراض ($xj \geq 0$).

4.5 طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار إليها أعلاه تبدأ بعد ذلك مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. يتفق معظم الكتاب المهتمين بأسلوب البرمجة الخطية بأن هناك ثلاث طرق أساسية لحل نموذج البرمجة الخطية، وهي:

أولاً: الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method .

ثانياً: الطريقة الجبرية Algebric Method .

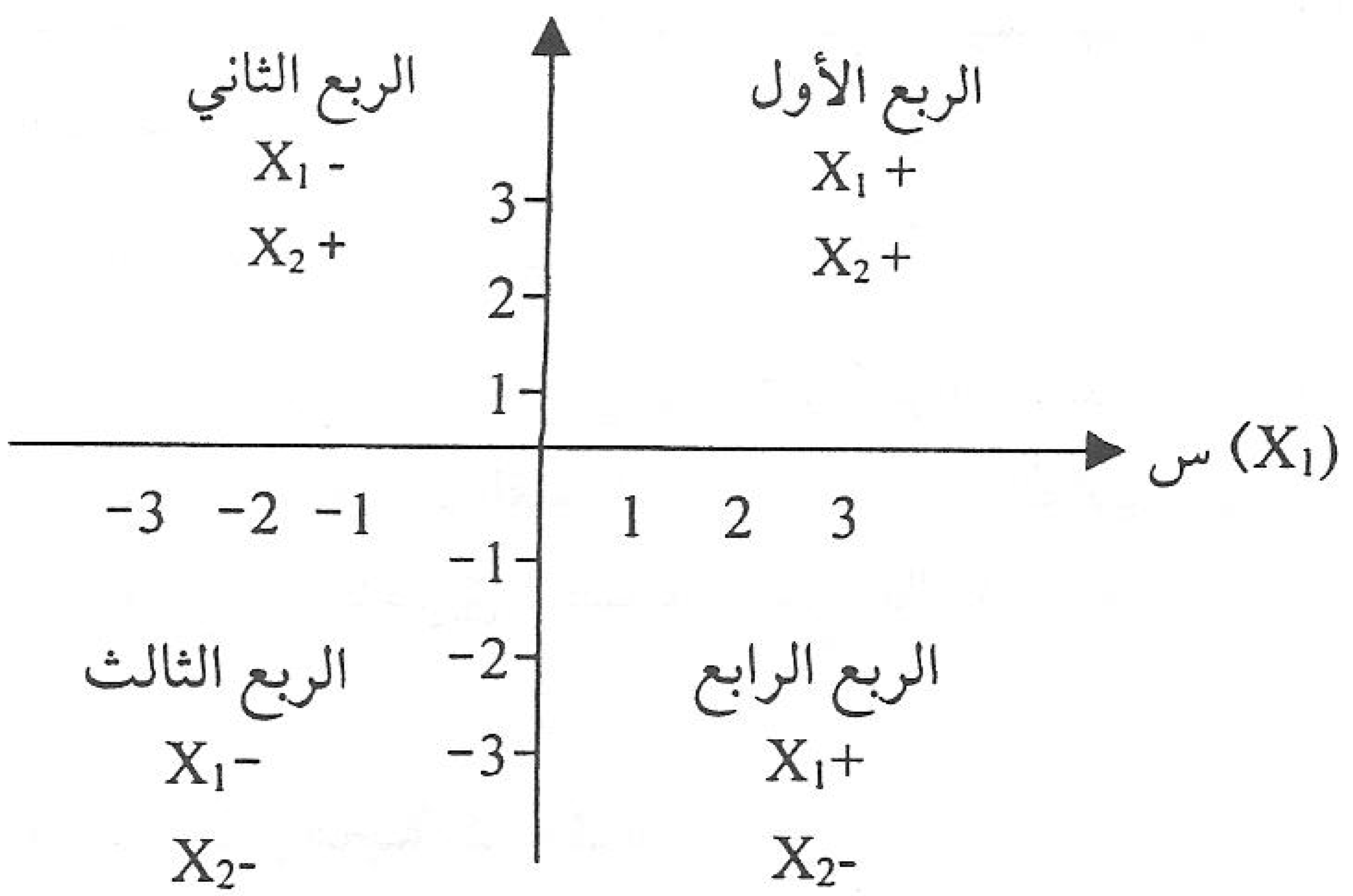
ثالثاً: الطريقة المبسطة (السيمبلكس) Simplex Method .

الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphic Method :

تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الأساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة

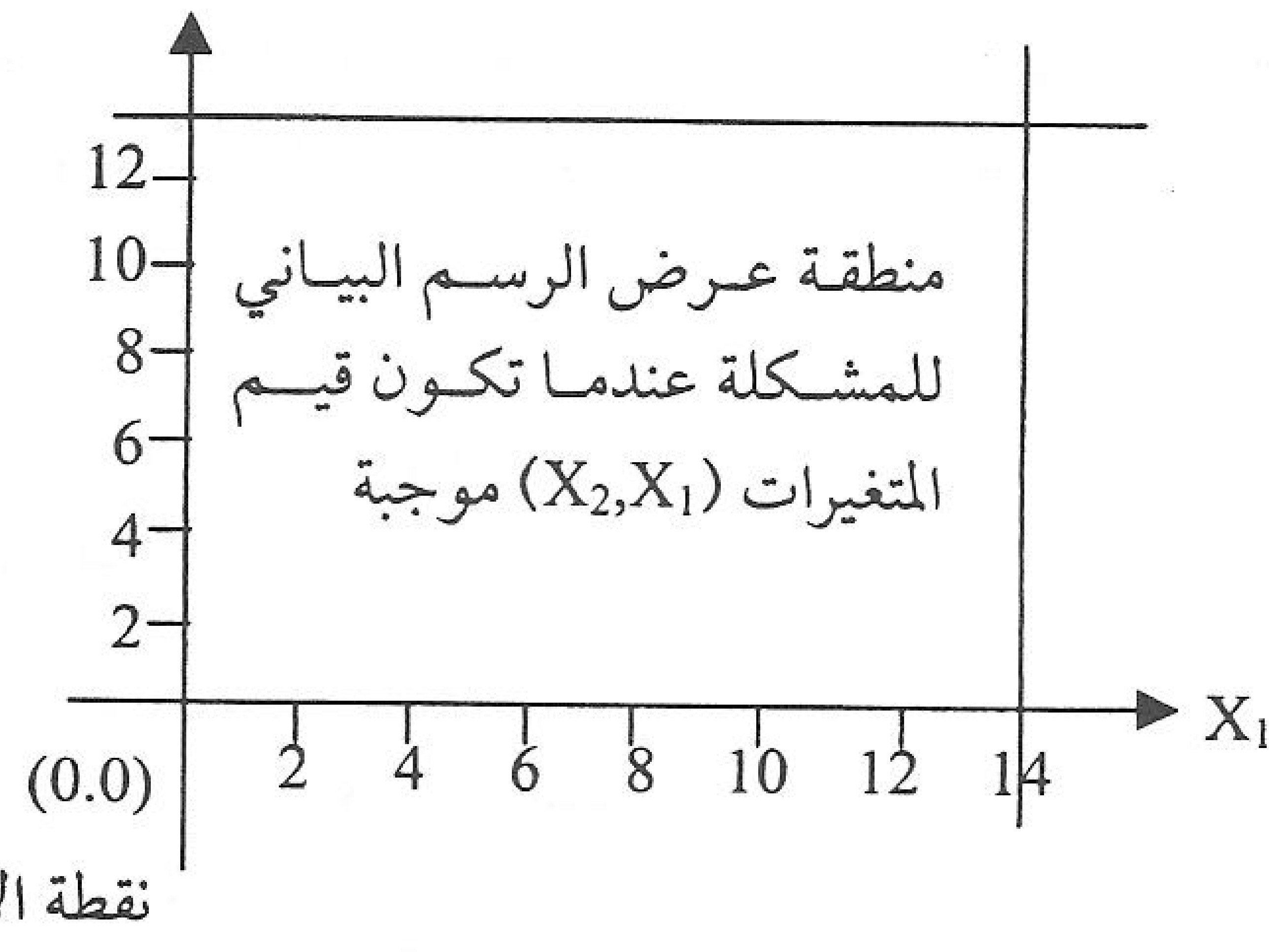
الخطية. وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون عدد المتغيرات للمشكلة اثنين فقط (X_1, X_2). أن فكرة هذه الطريقة تعتمد بالدرجة الأساس على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة، الذي من المفروض أن يتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية. ومن أجل توضيح فكرة هذه الطريقة ينبغي تقديم فكرة أولية عن هذه الإحداثيات. حيث تعبر هذه الاحداثيات عن ما يسمى بالمحاور السينية (الأفقية) والمحاور الصادية (العمودية) التي يشيع استخدامها في الهندسة التحليلية وهي كما في الشكل رقم (5-1).

الشكل رقم (5-1) المحاور الأفقية والعمودية



يلاحظ من الشكل رقم (5-1) أن كل قيم المتغيرات (X_2,X_1) في الربع الأول موجبة، في حين كانت مختلفة الإشارة في الأرباع الأخرى. لذلك فإن الطريقة البيانية تعتمد بشكل أساسي على إظهار الحلول والنتائج النهائية للمشكلة في الربع الأول لكون قيم المتغيرات (X_2,X_1) تتفق مع الافتراض الرابع الوارد ذكره أعلاه والذي ينص على أن كل قسم المتغيرات (Xj) ينبغي أن تكون موجبة $(Xj \geq 0)$ أي لا يمكن قبول القيم السالبة. ولهذا السبب يتم التركيز على الربع الأول فقط وعدم إظهار بقية الأرباع كما هو واضح في الشكل رقم (5-2).

الشكل رقم (5-2) الربع الأول الذي قيم فيه عرض الرسم البياني للمشكلة حيث قيم المتغيرات (X_2,X_1) موجبة.



من أجل توضيح فكرة الحل بالطريقة البيانية نعتمد المثال التالي:

تتوفر لدى إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية نوعين من المواد الأولية البديلة وذلك بكميات محدودة. ترغب هذه المنظمة في خرج نوعين من المنتجات الغذائية وهما (المنتجA ، المنتج B).

يحتاج المنتج A إلى 2 وحدة من المادة الأولية الأولى، في حين يحتاج إلى 6 وحدة من المادة الأولية الثانية حتى يمكن إنتاجه. المنتج الثاني B يحتاج إلى 4 وحدة من المادة الأولية الأولى، أما إذا قررت استخدام المادة الأولية الثاني فإنه سوف يحتاج إلى 3 وحدة.

وقد علمت ما يلي:

1- كمية المواد الأولية المتوفرة من النوع الأول هي بحدود (40) وحدة ومن النوع لثاني (60) وحدة.

2- الربح المتوقع الحصول عليه عند بيع المنتج هو 8 دينار وعند بيع المنتج B الربح المتوقع هو 4 دينار.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- استخدام طريقة الرسم البياني Graphical Method لتحديد أفضل كمية من المنتج A والمنتج B تم مصلحة المنشأة إنتاجها وبما يؤدي إلى تحقيق أكبر كمية من الأرباح في ظل تحقيق حالة الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسيين.

الحل:

لحل هكذا نوع من المشاكل يفترض في بداية الأمر عرض البيانات المتوفرة في إطار جدول خاص كما هو واضح أدناه:

المنتجات / المواد الأولية	المنتج A	المنتج B	مقدار المتوفر من المواد الأولية
المادة الأولية I	2	4	40 وحدة
المادة الأولية II	6	3	60 وحدة
الأرباح المتوقعة	8	5	

نفرض أن كمية الإنتاج ⇐ X

كمية الإنتاج من المنتج الأول A. ⇐ X_1

كمية الانتاج من المنتج الثاني B. ⇐ X_2

الأرباح الكلية المتوقعة ⇐ Z

وعليه فإن مقدار ما نحتاجه الكمية X_1 من المنتج A_1 من المادة الأولية الأولى هي X_1 مضروبة في 2 ما نحتاجه الوحدة الواحدة من المنتوج المذكور، أي بعبارة أخرى يكون لدينا ($2X_1$). وهكذا بالنسبة لبقية القيم، علماً بأن مقدار ما يتم استهلاكه من المادة الأولية الأولى لطرح المنتج A والمنتج B ينبغي أن يكون مساوياً أو أقل من الكمية المتوفرة في المخازن من المادة الأولية المذكورة والبالغة 40 وحدة، أي أن:

$2x_1 + 4 \times 2 \leq 40$ .... (1) فيه استخدام المادة الأولية I.

وهكذا بالنسبة للمادة الأولية الثانية، وعندها نحصل على:

$6x_1\ 3 \times 2 \leq 60$ .... (2) فيه استخدام المادة الأولية II

وإذا ما علمنا أن الأرباح الكلية المتوقعة في بيع المنتج .Aومن بيع المنتج B تحسب من خلال معادلة تجمع الاثنين، ينبغي أن تصل إلى أعلى قيمة ممكنة، أي أن:

$$Z=5x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$$

فإن بناءاً على ما تقدم يمكن جمع كافة عناصر النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدرس وذلك كما يلي:

القيود
$$\begin{cases} 1 \ldots\ 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 2 \ldots\ 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \end{cases}$$

دالة الهدف $Z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

قيود اللاسلبية $x1\ ,\ x2 \geq 0$

أن القيد الأول والثاني مكتوبان بصيغة المتراجحات أو المتباينات لذلك لا يمكن رسم أو التعامل مع هذه العلاقات الرياضية إلا بعد تحويلها إلى صيغة المعادلات الرياضية المستقرة. وبشكل عام هنالك ثلاثة طرق أساسية يتم بموجبها تحويل المتراجحة أو المتباينة إلى معادلة رياضية، وهي:

1. طريقة إضافة المتغير الراكد (+s) أو طرح المتغير الفائض (-s).
2. طريقة تجزئة العلامة الرياضية.
3. طريقة الفرضية.

بالنسبة للطريقة الأولى سبق التطرق إليها عند الحديث عن تحويل النموذج الرياضي المكتوب بالصيغة القياسية، وسوف يتم التطرف لذلك عند توضيح الحل الجبري لاعتماد هذه الطريقة عليها.

أما بالنسبة لطريقة تجزئة العلامة الرياضية فإن المقصود بها تجزئة العلامة:

$\leq$ إلى أقل < ويساوي =

والعلامة : $\geq$ إلى أكبر < ويساوي =

وعليه فإن القيد الأول يمكن أن يكتب كما يلي:

$$2x_1 = 4x_2 < 40$$

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

أما الطريقة الثالثة فإن المقصود بهذه الطريق وضع افتراض سبق وهـو أن كـل ما هو متوفر من مـواد أولية أو مستلزمات إنتاج يتم استخدامه بشكل كامل في العملية الإنتاجية، على هذا الأساس فإن من المفروض اعتماد الصيغة الرياضية للقيد الذي يكتب بعلامة المساواة، أي أن : [1]

$$2x_1 + 4x_1 = 40$$

العلاقة الرياضية هذه تعبر عن استغلال المادة الأصلية الأولى بالكامل لطرح كـل من المنتج الأول والمنتج الثاني بالكميات x_2 ، x_2 وهـي معادلة رياضية من الدرجة الأولى. تعبر هذه المعادلة عن خط مستقيم، ولرسم الخط المستقيم ينبغي معرفة عنه نقطتين تقع أحد هاتين النقطتين على المحور الأفقي والثانية على المحور العمودي، ويتم التعرف على هذه النقاط وفق الفرضيات التالية : [1]

1- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.1 فقط، لذلك سوف لن يطرح المنتج No.2، أي أن :

$$X_2 = 0$$

$$\therefore\ 2X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{2} = 20$$

وعليه فإن إحداثيات النقطة الأولى هي : (2 , 20) .

2- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.2 فقط، لذلك لن يطرح المنتج No.1 ، أي أن:

$$X_1 = 0$$

$$\therefore\ 2X_2 = 40$$

$$X_2 = \frac{40}{2} = 20$$

---

(1) إذا كان أحد التغيرات مرفوع للقوة الثانية أي (x_1^2 أو x_2^2) فإن هذه المعادلة تعبر عن منحني.

(1) تستخدم هذه الفرضيات سواء كـانت الطريقة المعتمدة في تحويل المتباينة إلى معادلة هي طريقة تجزئة العلامة الرياضية أم طريقة الفرضية.

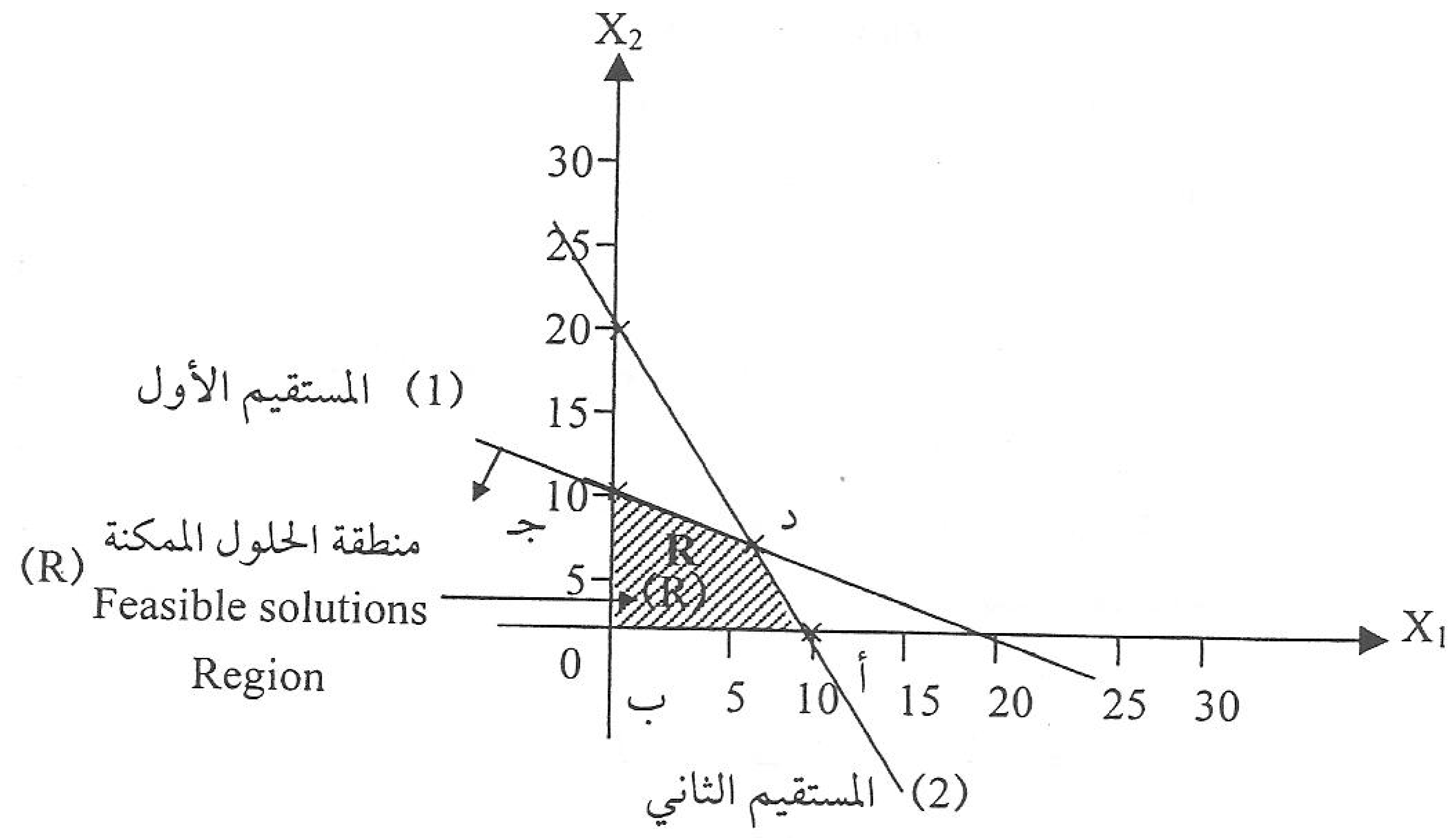
وعليه فإن إحداثيات النقطة الثانية هي : (10 ، 0)

وبنفس الطريقة بالنسبة للقيد الثاني نحصل على النقاط التالية :

النقطة الأولى : (10,0)

النقطة الثانية : (0.20)

بعد ذلك يتم رسم كلا المستقيمين ضمن الإحداثيات الأفقية والعمودية التي تم توضيحه سابقاً ونحصل الرسم البياني للمشكلة كما هو واضح في الشكل رقم (5-3).

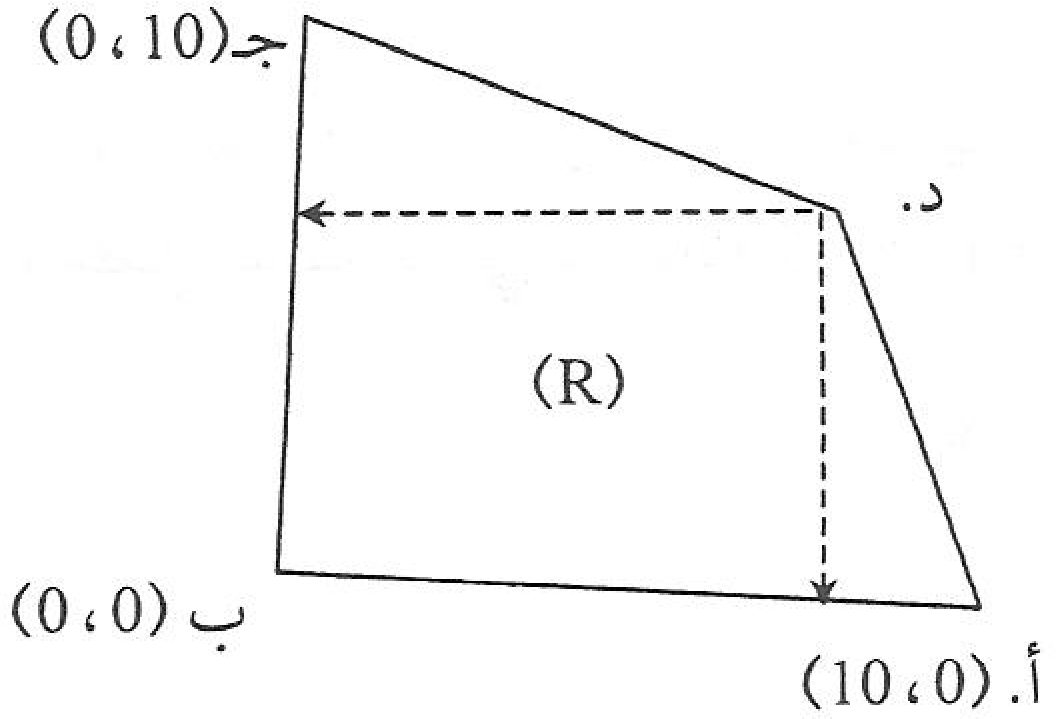


أن المساحة الواقعة تحت المستقيم الأول تحقق العلاقة الرياضية الأولى ($2x_1+4x_2\leq40$) بحيث أن أي نقطة واقعة تحت المستقيم أو عليه تؤخذ بشكل عشوائي وعند تعويضها في العلاقة المذكورة ينبغي أن تحققها. في حين أن أي نقطة لو أخذت خارج المستقيم أو عليه ينبغي أن تحقق العلاقة ($2X_1 + 4X_2 \geq 40$). وعلى هذا الأساس فإن السهم المثبت على المستقيم يتجه إلى الداخل ونفس الشيء يقال عن العلاقة الرياضية الثانية والتي تم تمثيلها من خلال المستقيم الثاني.

أن تقاطع المساحة التي تحقق المستقيم الأول مع المساحة التي تحقق المستقيم الثاني إلى ظهور منطقة مشتركة يطلق عليها اسم منطقة الحلول Solutions region

ويرمز لها من خلال الحرف R وأن الشكل الهندسي لهذه المنطقة موضح بالشكل رقم (5-4).

الشكل رقم (5-4) منطقة الحلول المركبة (R)



أن منطقة الحلول (R) هي عبارة عن شكل هندسي متوازي الأضلاع أو رباعي أو ما شابه ذلك وهو بمثابة مستوي ظهر بسبب تقاطع عدد من المستقيمات. لهذا الشكل نقاط أو زوايا متطرفة يتم التعرف عليها من خلال إحداثيات معينة. وفي مثالنا هذا نلاحظ أن النقطة (.د) مجهولة الاحداثيات، حيث يتم التعرف عليها بموجب أحد الطريقتين التاليتين :

1- طريق الرسم البياني، وذلك من خلال إنزال المساقط العمودية من نقطة تقاطع المستقيمان الأول والثاني عند النقطة (د) إلى المحور الأفقي والعمودي حيث نلاحظه أن إحداثيات هذه النقطة هي تقريباً (7,7).

2- الطريقة الجبرية، حيث بموجب هذه الطريقة يتم حساب إحداثيات هذه النقطة بالاعتماد على المستقيمات المتقاطعة عند النقطة (د) وذلك من خلال حل معادلات هذه المستقيمات أنياً وذلك كما يلي :

$2X1 + 4X2 = 40$ معادلة المستقيم الأول

$6X_1 + 3X_2 = 60$ معادلة المستقيم الثاني

ويتم في البداية توحيد معادلات أحد متغيرات المعادلات أعلاه وليكن ذلك هو المتغير X_1 مع تغير الإشارة لأجل عملية الطرح ويكون ذلك بضرب المعادلة الأولى بـ (-3) ونحصل على ما يلي :

$$-6X_1 - 12X_2 = -120$$

$$+6_1 + 3X_2 \quad = +60$$

وبالحذف نحصل على:

$$X\text{-}1 \qquad -9X_2 = -60$$

$$9X_2 = 60$$

$$\therefore X_2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \cong 6.7$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على:

$$6X_1 = 3\ (6.7) = 60$$

$$6X_1 + 20.01 = 60$$

$$6X_1 = 60\text{-}20.0$$

$$6X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{6} \cong 6.7$$

يتضح مما تقدم إن الطريقة الجبرية هي أكثر دقة من طريقة الرسم.

بعد أن تم تحديد إحداثيات النقطة (د) يتم التعريف في معادلة دالة الهدف لتحديد قيمة الحل الأمثل الذي يعبر عن الأرباح الكلية المتوقعة، وذلك كما يلي:

$$Z = 8X_1 + 5X_2 \rightarrow Max$$

أ. (10,0) $\quad Z = 8\ (10) + 5\ (0) \rightarrow 80$

ب. (0,0) $\quad Z = 8\ (0\ ) + 5(0) \rightarrow 0$

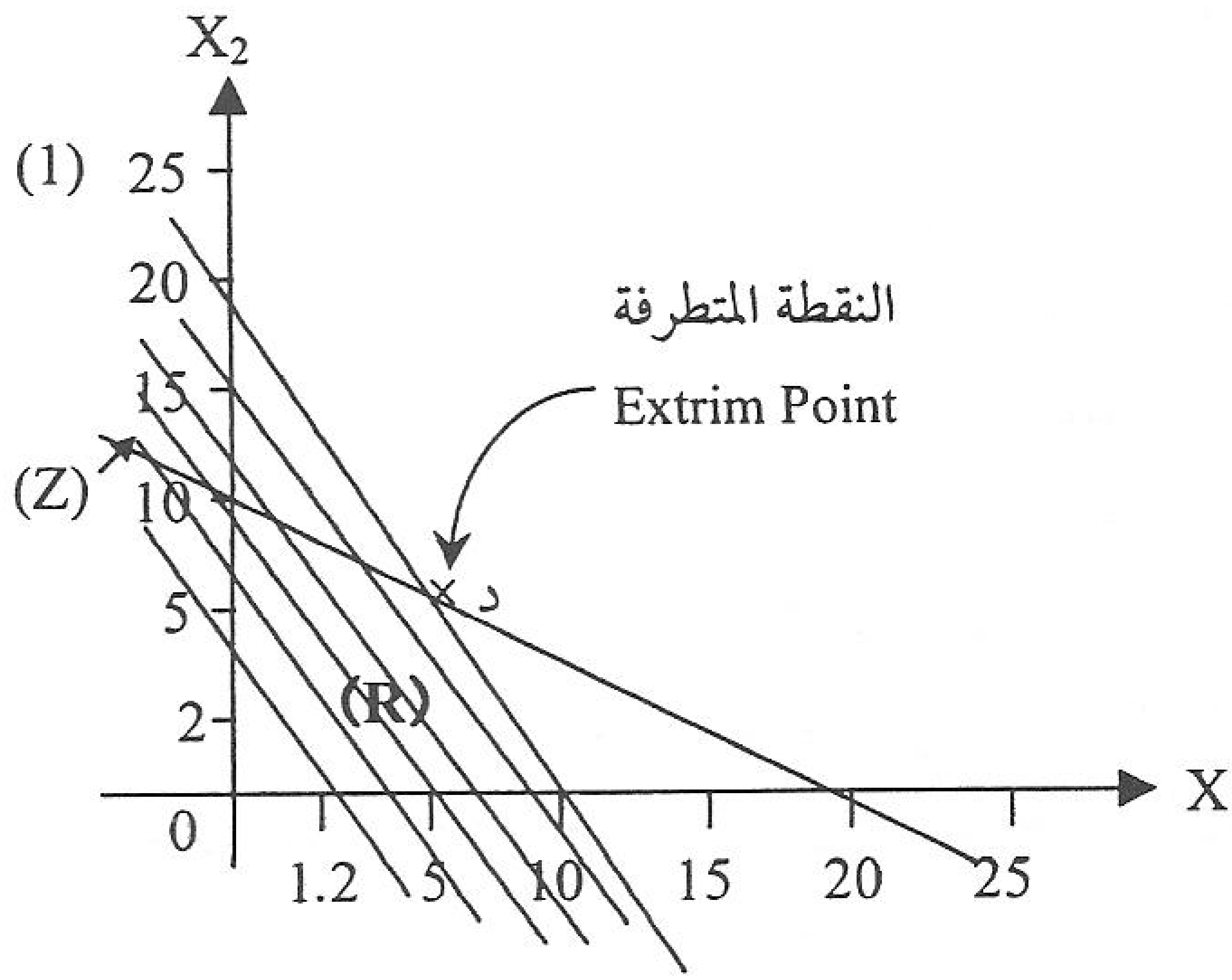
جـ. (0,10) $\quad Z = 8(0) + 5\ (10) \rightarrow 50$

د. (6.7, 6.7) $\quad Z = 8(6.7) + 5(6.7) \rightarrow 87.1$ الحل الأمثل

يتضح مما تقدم أن الحل الأمثل هو عند النقطة (د) لكون قيم احداثيات النقطة أدت إلى الحصول على أكبر قدر ممكن من الأرباح المتوقعة. وتفسر هذه النقاط الأربعة بأنها عبارة عن أربعة بدائل من خطط الإنتاج المقترحة، وأن خطة الإنتاج المثلى هي التي تقع عند النقطة (د) والتي بموجبها ينبغي طرح كل من المنتج الأول والثاني بنفس المقدار وهو (6.7) وحدة وهذا القرار يؤدي إلى الحصول على 87.1 وحدة نقدية من

المستقيم ... الهدف بنفس الشكل ومن ثم يتم رسم مستقيمات موازية بالاتجاه البعيد عن نقطة الأصـل ، وأن آخر مستقيم يمس المنطقة (R) بنقطة واحدة لابد وأن تكون هذه النقطة هي (د) التي هي عادة تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتعرف بالنقطة المتطرفة (Expreim point) كما هو واضح في الشكل رقم (5-5).

الشكل رقم (5-5) تأكيد أن نقطة د وتمثل نقطة الحل الأمثل.



ويتم رسم مستقيم معادلة دالة الهدف بعد أن تؤخذ قيم افتراضية للمقدار Z وذلك كما يلي :

$$Z = 8X_1 + 5X_2$$
$$10 = 8X_1 + 5X_2$$

نفرض أن : $Z = 10$

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 0 \\ 8X_1 &= 10 \\ X_1 &= \frac{10}{3} = 1.2 \end{aligned}\right\} (1.2\ ,\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 0 \\ 5X_2 = 10 \\ X_2 = \frac{10}{5} = 2 \end{array}\right\} \quad (0.2)$$

من الشكل رقم (5-5) يتضح أن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل، وبعبارة أخرى عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف فإن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل.

أن نقطة الحل الأمثل يمكن أن تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل، وذلك إذا كان المطلوب تصغير دالة الهدف، وهذه هي الحالة الأخرى من حالات الحل بطريقة الرسم، وذلك عندما تكون منطقة الحلول الممكنة واقعة بين المستقيمات المتقاطعة والزاوية البعيدة من الربع الأول، ولأجل توضيح هذه الحالة نعتمد المثال التالي :

تعاقدت إحدى دور الحضانة مع إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية المتخصصة بصناعة المواد الغذائية ذات المواصفات الخاصة، لتجهيزها بكميات من المواد الغذائية المذكورة. وتم الاتفاق على أن تحوي هذه المواد الغذائية على أنواع معينة من الفيتامينات، وهي الفيتامين (A) بمقدار (40) وحدة، الفيتامين (B) بمقدار (50) وحدة والفيتامين (C) بمقدار (49) وحدة. وإذا علمت أن منظمة الأعمال الإنتاجية التي تم التعاقد معها تنتج نوعين من المواد الغذائية، وهي المادة الغذائية رقم (1) والمادة الغذائية رقم (2). والجدول رقم (5-2) يوضح المواصفات الإنتاجية لهذه المواد الغذائية من حيث مقدار الفيتامينات المطلوبة لكل نوع من أنواع المواد الغذائية مع كلفة الإنتاج للوحدة الواحدة.

جدول رقم (5-2) بيانات المشكلة

المنتجات / المواد الأولية	المنتج رقم (1)	المنتج رقم(2)	مقدار المتوفر من المواد الأولية
vitamin A	2	4	40 وحدة
Vitamins B	10	5	50 وحدة
Vitamin C.	7	7	49 وحدة
الكلفة المتوقعة	8	5	

المطلوب:

ما هي الكمية المثلى التي ينبغي إنتاجها من المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) بحيث تكون مقدار الفيتامينات المكتسبة من الأنواع الثلاث هي أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج هي أقل ما يمكن.

الحل:

أن حل هذه المشكلة بطريقة الرسم يتم بنفس الخطوات التي تم اعتمادها في المثال السابق، وعادة في البداية الخطوة الأولى صياغة النموذج الرياضي، وذلك كما يلي:

الخطوة الأولى:

صياغة النموذج الرياضي بعد وضع الافتراضات التالية:

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Leftarrow X$

$\therefore$ كمية المادة الغذائية رقم (1) $\Leftarrow X_1$

كمية المادة الغذائية رقم (2) $\Leftarrow X_2$

التكاليف الكلية المتوقعة $\Leftarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية لنموذج المشكلة هي:

$4X1 + 10X2 \geq 40$ .... (1) قيد احتواء الفيتامين (A)

$10X_1 + 5X_2 \geq 50$ .... (2) قيد احتواء الفيتامين (B)

$7X1 + 7X2 \geq 49$ .... (3) قيد احتواء الفيتامين (C)

$$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}.$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية:

تحديد إحداثيات المستقيمات التي تعبر عن القيود أعلاه وذلك كما يلي:

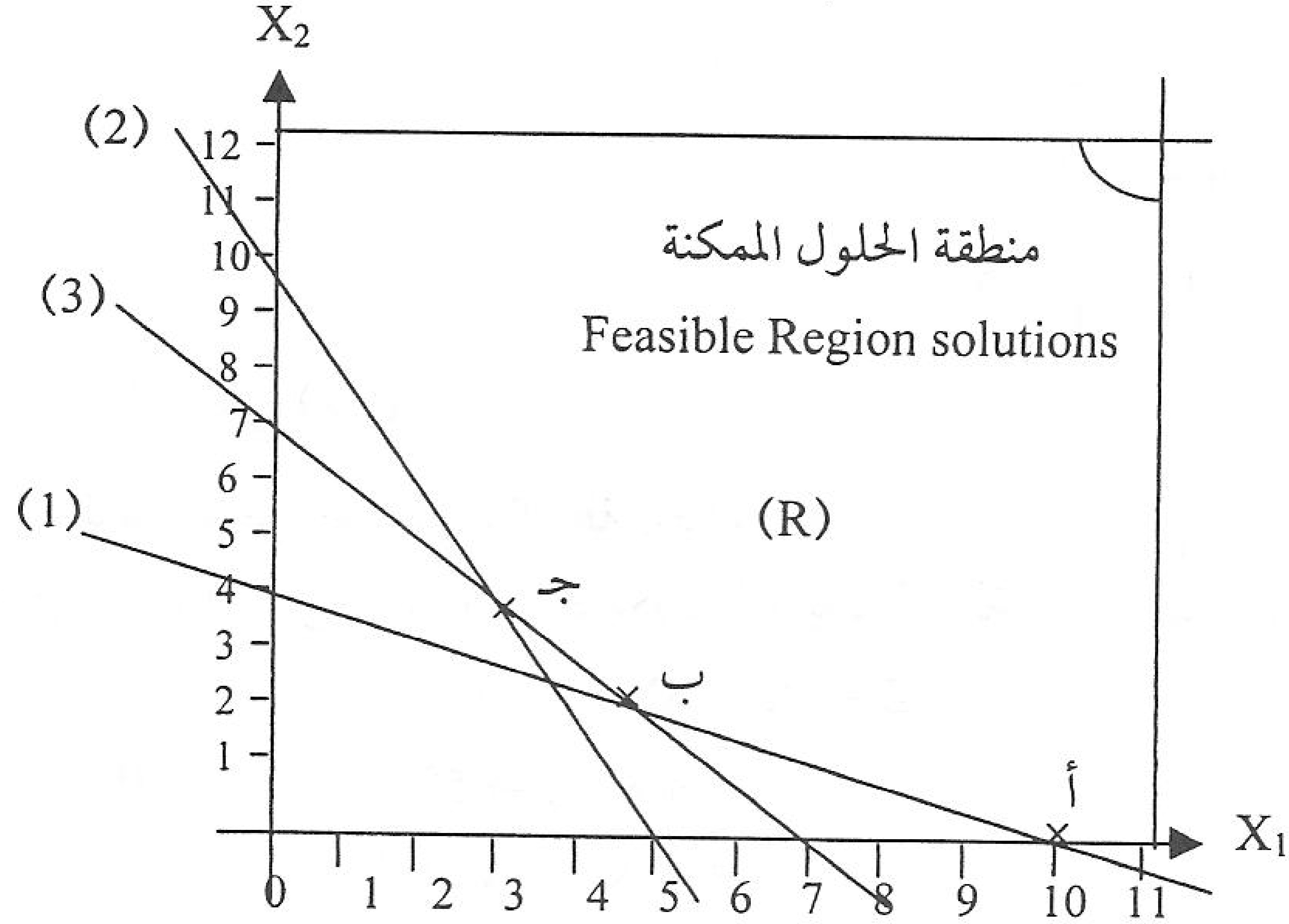
إحداثيات المستقيم الأول (0.4) و (10.0)

إحداثيات المستقيم الثاني (10.0) و (5.0)

إحداثيات المستقيم الثالث (0.7) و (7.0)

وعلى هذا الأساس يتم تصميم الشكل البياني الذي يعبر عن المشكلة ذلـك كمـا هو واضح في الشكل رقم (5-6).

الشكل رقم (5-6) منطقة الحلول الممكنة للمشكلة



من الشكل البياني رقم (5-6) يتضح أن النقاط التي تعبر عن الحل الأفضـل هـي أربعـة نقـاط (أ، ب، جـ، د). أن إحداثيات النقطـة (أ) والنقطـة (د) معروفـة بينمـا نجـد أن إحداثيات النقطة (ب) والنقطة (جـ) مجهولة. وأفضل طريقة لتحديدها هي طريقة الحل باستخدام الطريقة الجبرية أو ما يعرف بطريقة حل المعادلات الآنية وذلك كما يلي:

النقطة (ب): نحدد من تقاطع المستقيم الثالث والأول، أي أن:

$4X_1 = 10X_2 =40$ .... (1) بضرب طرفي المعادلة × 7-

$7X_1 + 7X_2 = 49$ .... (2) بضرب طرفي المعادلة × 4

بالحذف

$$\begin{array}{r} -28X_1-70X_2 = -280 \\ + 28X_1 + 28X_2 = +196 \\ \hline -42X_2 = -84 \end{array}$$

-1 X

$$42X_2 = 84$$

$$\therefore X_2 = \frac{84}{42} = 2$$

وبالتعويض في أحد المعادلتين أعلاه، نحصل على قيمة X_1 كما يلي :

$$4X_1 + 10(2) = 40$$

$$4X_1 + 20 = 40$$

$$4X_1 = 40 - 20$$

$$4X_1 = 20$$

$$\therefore X1 = \frac{20}{4} = 5$$

∴ إحداثيات النقطة ب هي (5.2) .

وبنفس الطريقة تحسب إحداثيات النقطة (جـ) من خلال تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (3) حيث نحصل على (3.4)، بذلك يكون التعريف في دالة الهدف كما يلي :

$$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$$

أ .	(10.0)	$Z = 5\ (10) + 8\ (0) \rightarrow 50$
ب.	(5.2)	$* \ Z = 5\ (5) + 8(2) \rightarrow 41$
جـ .	(3.4)	$Z = 5\ (3) + 8(4) \rightarrow 47$
د .	(0.10)	$Z = 5\ (0) + 8\ (10) \rightarrow 80$

ومن ذلك يتضح أن على دار الحضانة التعاقد للحصول على 5 وحدة من المنتج رقم (1) و (2) وحدة من المنتج رقم (2) حيث عند هذه الكميات من الإنتاج سوف تكون كمية الفيتامينات المكتسبة من قبل الأطفال أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج سوف تكون أقل ما يمكن وهي 41 وحدة نقدية، وهذه النتائج تعبر عن الحل الأمثل للمشكلة.

2.4.5 الطريقة الجبرية Algerbric Method :

أن هذه الطريقة هي من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري وفق احتمالات القيم المتوقعة للمتغيرات $(X_2,\ X_1)$ وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المتغيرات في النموذج الرياضي اثنين فقط، وهي لا تتطلب أي رسم عند تحديد الحلول الممكنة والحل الأفضل والحل الأمثل للمشكلة. الفكرة الأساسية

لهذه الطريقة تقوم على أساس تقسيم المتغيرات إلى نوعين :

1- المتغيرات الأساسية Basic Variables وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم المشكلة وذلك لكون قيم هذه المتغيرات عادة أكبر من الصفر، أي أن :

$Xj > Si > 0$

2- المتغيرات غير الأساسية Non - Basic Variables وهي تلك المتغيرات التي ليس لها دور مهم في المشكلة وتكون قيم هذا المتغيرات عادة مساوية إلى الصفر، أي أن: $Si = 0$ ، $Xj = 0$.

من المبادئ الأخرى التي تعتمد عليها هذه الطريقة هي إضافة المتغيرات الراكدة (+S) في تحويل الصيغ الرياضية للمتباينات إلى معادلات رياضية ثابتة.

لتوضيح فكرة هذه الطريقة نعتمد نفس المثال الذي ورد في حالة الطريقة البيانية وذلك كما يلي :

$$1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2X_1 + 4X_2 \leq 40$$

$$2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 6X_1 + 3X_2 \leq 60$$

$$Z = 8X_1 = 5X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يتم إضافة المتغيرات الراكدة Slack Variables (+s) ذلك

$$2X_1 + 4X_2 + S_1 = 40$$

$$6X_1 + 3X_2 + S_2 = 60$$

$$Z = 8X_1 + 5X_2 = 0.5_1 + 0.5_2 \rightarrow Max$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

بعد أن تم تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة المستقرة التي هي الصيغة القياسية (Standard Form) تتم بعدها عملية في إطار جدول خاص لذلك وكما يلي : د

رقم المحاولة	المتغيرات غير الأساسية Non -Basic Variable Xj >0 , Si> 0		المتغيرات الأساسية Basic Variables Xj=0 , Si = 0		قيمة دالة الهدف
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 40$	$S_2 = 50$	$Z = 0$
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 10$	$S_2 = 20$	$Z = 50$
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 20$	$S_1 = -40$	$Z = 100$ تهمل
4	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 10$	$S_1 = 20$	$Z = 80$
5	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 20$	$S_2 = -60$	$Z = 140$ تهمل
*6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 6.7$	$X_2 = 6.7$	$Z = 87.1$

يلاحظ من الجدول رقم (5-3) أن النتائج في المحاولة الثانية والمحاولة الخامسة قد أهملت بسبب كون قيمة المتغير (S) كانت سالبة وهذا يتعارض مع شرط اللاسلبية ($Si \geq 0$). وعلى هذا الأساس تم اختيار الحل الأمثل من بين المتبقية، حيث كانت في آخر محاولة وهي مشابهة لما تم التوصل إليه بطريقة الرسم البياني.

3.4.5 الطريقة المبسطة Simples Method :

أن مبتكر هذه الطريقة هو العالم الرياضي Dantzig وذلك في عام 1947 وتعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق التي يتم اعتمادها في حل مشاكل البرمجة الخطية، وذلك لكونها تعالج ذلك النوع من المشاكل التي يكون فيها عدد كبير من المتغيرات (اثنين فأكثر). إن فكرة هذه الطريقة هي إيجاد الحل للمشكلة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي) في مراحل متسلسلة. يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسينه وذلك لايجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه ❖ لأكثر من مرحلة واحدة. وفي المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل.أن هذه المراحل من عمليات لحل تتم في إطار جدول خاص لذلك يعرف باسم (جدول السمبلكس Simplex Table) كما هو واضح في الجدول

(*) تم الحل وفق طريقة الحل الآني أو ما يعرف بحل المعادلات الآنية.

رقم (5-4). في المرحلة الأولى من الجدل المذكورة يتم إدخال كافة البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي. ويفترض في النموذج المذكور أن يكون مكتوباً بالصيغة القياسية Standard Form ، وبعد أن يتم نقل البيانات بشكل كامل يتم بعدها إجراء عمليات حسابية معينة على مثال تطبيقي. ومن الجدير بالذكر هنا أن الحل الذي يتم الحصول عليه في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس

جدول رقم (5-4) الصيغة العامة لجدول السمبلكس Simplex Table

Xj المتغيرات Variables Si		X_1	X_2	X_3	....	X_n	S_1	S_2	.....	S_m	قيمة المتغير الأساس bi (الحل)
Cj معامل المتغيرات في دالة الهدف											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											
(cj - zj)											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
zj											
(cj-zj)											
المتغيرات الأساسية											
Basic Variables											
Zj											
(cj-zj)											

جدول الحل (الأولي) الابتدائي

قيمة دالة الهدف

الجدول الثاني

قيمة دالة الهدف

وهكذا حتى...

الجدول الأخير (الحل الأمثل)

قيمة دالة الهدف

يقع في نقطة الأصل، حيث تكون كل قيم المتغيرات ($x_1, x_2, ... x_n$) مساوية للصفر، في حين تكون قيم المتغيرات الراكدة ($s_1, s_2, ..., s_m$) تساوي القيم الواقعة إلى الجهة اليمنى من العلاقات الرياضية والتي هي موجودة في جدول السمبلكس تحت اسم (قيمة المتغير الأساس bi).

أن خطوات حل مشكلة تكون فيها دالة الهدف تصل إلى أعلى ما يمكن (Max)، وأن القيود مكتوبة في حالة (أقل أو يساوي ≤) تختلف بعض الشيء عن الحالة عندما تكون المشكلة فيها دالة الهدف تصل إلى اقل ما يمكن، وأن القيود مكتوبة في حالة. (أكبر أو يساوي ≥) أو خليط من العلاقات (≤ ، = ، ≥). لذلك سوف يتم التمييز بين ما يلي:

أولاً: الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة البسيطة) في حالة تعظيم دالة الهدف.

ثانياً: الحل بطريقة السمبلكس عندما تكون المطلوب تصغير دالة الهدف مع وجود قيود مكتوبة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي)

وفيما يلي مثال يوضح فكرة الحل للمشكلة بطريقة السمبلكس عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف مع وجود قيود تحمل علامة (≤ أقل أو يساوي).

مثال رقم (1):

إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية، ترغب في طرح ثلاث أنواع من المنتجات، وكان لديها نوعين من المواد الأولية البديلة، علماً بأنه يتوفر منها كميات محدودة، وكان الربح المتوقع من بيع كل واحد من هذه المنتجات الثلاث وبقية البيانات موضحة كما في الجدول رقم (5-5).

جدول رقم (5-5) البيانات الأساسية للمشكلة

مقدار المتوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية	المنتج No.3	المنتج No.2	المنتج No.3	المنتجات / مستلزمات الإنتاج الأساسية
6 طن	3	1	2	المادة الأولية .I
4 طن	2	4	1	المادة الأولية .II
	1	2	3	الربح المتوقع

المطلوب:

حل المشكلة بطريقة السمبلكس موضحاً كمية المنتج No.1 ، المنتج No.2 ، المنتج No.3 التي تجعل الأرباح المتوقعة أعلى ما يمكن وتحقق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج (المواد الأولية).

الحل:

من أجل حل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة ، وذلك كما يلي :

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Leftarrow X$

$\therefore$ كمية الإنتاج من المنتج No.1 $\Leftarrow X_1$

كمية الإنتاج من المنتج No.2 $\Leftarrow X_2$

كمية الإنتاج من المنتج ..No $\Leftarrow X_3$

مقدار الأرباح الكلية المتوقعة $\Leftarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية القانونية لهذه المشكلة هو كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 \rightarrow \text{Max.}$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

نفرض أن :

S $\Leftarrow$ مقدار مستلزمات الإنتاج(المواد الأولية) غير المستغلة.

$S_1 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية .I غير المستغلة.

$S_2 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية II غير المستغلة.

وعليه فإن الصيغة القياسية بعد إضافة المتغير الراكد (S) سوف تكون كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_2 = 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Max.$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

تنقل بعد ذلك البيانات إلى جدول السمبلكس وعلى النحو التالي :

جدول رقم (5-6) جدول السمبلكس

	المتغيرات Xj Variables Si			X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	
الجدول الأساسي	معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف			3	2	1	0	0		
	Basic Variables	S_1	0	2	1	3	1	0	6	$6 \div 2 = \boxed{3}$
		S_2	0	1	4	2	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
	Zj			0	0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدفZ ←
	(cj - zj)			3	2	1	0	0		
الجدول الثاني	Basic Variables	X_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3	$3 \div \frac{1}{2} = 6$
		S_2	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$1 \div \frac{7}{2} = \boxed{\frac{2}{7}}$
	zj			3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	9	حالة الهدف ←Z
	(cj-zj)			0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0		
الجدول الثالث والأخير	المتغيرات الأساسية	X_1	3	1	0	10/7	-1/7		20/7	
		X_2	2	0	1	1/7	2/7		2/7	
	Zj			3	2	32/7	10/7	1/7	64/7	قيمة دالة الهدف Z ←
	(cj-zj)			0	0	-25/7	-10/7	-1/7		

من الجدول رقم (5-6) تتضح النتائج التالية :

في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، وهي مرحلة الحل الابتدائي الأساسي الممكن، نقرأ النتائج التالية :

المتغيرات الأساسية $\begin{cases} S_1 = 6 \\ S_2 = 4 \end{cases}$

المتغيرات غير الأساسية $\{ X_1 = X_2 = X_3 = 0$

وهو يعني أن إدارة المنظمة لم تستغل أي من المواد الأولية المتوفرة والبديلة لذلك لم يتم طرح أي نوع من المنتجات الثلاث، وكانت قيمة دالة الهدف في جدول السمبلكس، التي فيها يتم البدء بتحسين الحل السابق، حيث النتائج التالية :

متغيرات أساسية $\begin{cases} X_1 = 3 \\ S_2 = 1 \end{cases}$

متغيرات غير أساسية $\begin{cases} X_2 = X_3 = 0 \\ S_1 = 0 \end{cases}$

$$Z \Rightarrow 9$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار 3 وحدات، وعدم طرح بقية المنتجات. وهذا القرار سوف يحق الاستغلال الكامل للمادة الأولية الأولى $(S_i=0)$ ويبقي على احتياطي من المادة الأولية الثانية بمقدار (1) طن . إن خطة الإنتاج هذه سوف تؤدي إلى تحقيق أرباح بمقدار (9) وحده نقدية.

للتعرف على طبيعة الحل أعلاه الذي تم الحصول عليه، من حيث كونه حل أفضل أو حد أمثل، يتطلب الأمر الرجوع إلى جدول السمبلكس وبالتحديد للحقل (Cj-Zj)، وذلك كما يلي :

إذا كانت كل القيم في الحقل المذكور كما يلي :

$$(Cj - Zj) \leq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الأمثل :

وإذا كانت كل أو بعض قيم الحقل المذكور

$$(Cj - Zj) \geq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأفضل، ويتطلب الأمر الاستمرار في عملية النتائج تحسين التي تم الحصول عليها. ولما كان في مثالنا هذا المرحلة الثانية تحقق

الشرط $[(cj-zj) \geq 0]$ أي وجود قيمة موجبة، لذلك تم حساب المرحلة الثالثة وكانت فيه كل قيم (cj-zj) هي سالبة وأصفار وهذا يعني أنه تم الحصول على الحل الأمثل، والذي كان كما يلي:

$$\text{متغيرات أساسية} \begin{cases} X_1 = \dfrac{20}{7} & \text{وحدة} \\ X_2 = \dfrac{2}{7} & \text{وحدة} \end{cases}$$

$$\text{متغيرات غير أساسية} \begin{cases} X_3 = 0 \\ S1 = S2 = 0 \end{cases}$$

$$Z \Rightarrow \frac{64}{7} \ \text{وحدة نقدية}$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار $\frac{20}{7}$ وحدة والمنتج رقم (2) بمقدار $\frac{2}{7}$ وحدة، وعدم طرح المنتج رقم (3). وفي ظل هذه الخطة يتم تحقيق حالة الاستغلال الكامل لكل من المادة الأولية الأولى والثانية مع تحقيق أكبر عائد ربح ممكن وهو $\frac{64}{7}$ وحدة نقدية.

وقد تم حساب المراحل الثلاث (مرحلة الحل الأساسي الممكن، مرحلة الحل الأفضل، ومرحلة الحل الأمثل) وفق قواعد العمليات الحسابية التالية:

أولاً: يتحدد المتغير الداخل في أي مرحلة بأنه ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحقل (Cj-Zj) ويسمى المتغير الداخل Entering variable.

ثانياً: العمود الذي يقع فيه المتغير الداخل يسمى العمود المحوري Pirotal clum

ثالثاً: يتحدد المتغير الخارج Learing variable من خلال قسمة القيم الواقعة في عمود قيمة المتغير الأساس (bi) على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري، ويخرج المتغير الذي له أقل قيمة ويصبح متغير خارج، وفي المثال السابق تم تحديد المتغير الخارج كما يلي:

$$S1 \Rightarrow \frac{6}{2}=3$$

$$S_2 \Rightarrow \frac{4}{1} = 4$$

لذلك يكون S_1 المتغير الخارج.

رابعاً: الحقل الذي يقع فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري Pirotal Row .

خامساً: العنصر الواقع في نقطة تقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يسمى بالعنصر المحوري Pirotal Element .

سادساً: تنقل كافة البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى من جدول السمبلكس. ويدخل في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس إلى مرحلة الأساس (المتغيرات الأساسية) المتغيرات الراكدة S_2,S_1. حيث توضع أمام كل متغير المعاملات للمتغيرات في القيود. أي أمام المتغير S_1 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الأولى. وأمام S_2 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الثانية. وفي العمود b_i توضع القيم الموجودة في الطرف الأيمن من كل علاقة رياضية. أما في العمود الأخير C_B فإنه توضع فيه معاملات المتغيرات الأساسية S_2,S_1 في دالة الهدف. وفي بقية الحقول تتم عمليات حسابية معينة وذلك على النحو التالي:

1. تحسب القيم (Z_j) ، (c_j-z_j) ، z كما يلي:

$$Z_j \Rightarrow C_B * P_j$$

حيث أن:

$C_B \Leftarrow$ معامل المتغيرات الأساس في دالة الهدف.

$P_j \Leftarrow$ عمود القيم الواقعة تحت المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

$(c_j = z_j) \Leftarrow$ تحسب هذه القيمة من حاصل طرح القيم التي تم إيجادها في أعلاه Z_j من معاملات المتغيرات في دالة الهدف والتي يرمز لها C_j.

وفي مثالنا السابق تم حساب القيم المذكورة في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس كما يلي:

Cj	-	Zj		
3	-	0	=	3
2	-	0	=	2
1	-	0	=	1
0	-	0	=	0
0	-	0	=	0

أما القيمةZ قيم حسابها كما يلي :

$$Z \Rightarrow C_B * b_i$$

حيث على سبيل المثال في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس في مثالنا السابق كانت قيمة Z كما يلي :

$$Z \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

2- تحسب القيم في المرحلة التي تلي المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفق عمليات حسابية معينة. حيث تعتمد العمليات الحسابية في المرحلة الثانية على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى. أي بعبارة أخرى لحساب القيم للمتغيرات في المرحلة الثانية ، فإن ذلك يعتمد على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى ، ولحساب قيم المتغيرات في المرحلة الثالثة ، فإن ذلك يعتمد على قيم المتغيرات في المرحلة الثانية وهكذا.

3- في المراحل التالية للمرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، تعطي الأولوية في عمليات الحساب لقيم المتغير الداخل Entering Variable ، حيث تحسب قيم هذا المتغير بقسمة ما يقابلها من قيم في المرحلة السابقة على العنصر المحوري ، وفي مثالنا السابق تم حساب قيم المتغير X_1 في المرحلة الثانية كما يلي :

$$X_1 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1 \ , \frac{1}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2} , \frac{0}{2} = 0 \ , \frac{6}{2} = 3$$

4- قيم المتغيرات الأخرى (غير المتغير الداخل) تحسب وفق العلاقة الرياضية التالية :

$$N_j = K - \frac{M * y}{a_{ij}}$$

حيث أن :

N_j ⇐ القيمة الجديدة المطلوب وضعها في الحقل (j).

K ⇐ القيمة الحالية .

M ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في الصف المحوري.

y ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في العمود المحوري.

a_{ij} ⇐ العنصر المحوري.

وبذلك فقد تم حساب القيم للمتغير S_2 في المرحلة الثانيـة في مثالنا السـابق على النحو التالي :

$$N_1 = 1 - \frac{2*1}{2} = 0$$

$$N_2 = 4 - \frac{1*1}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

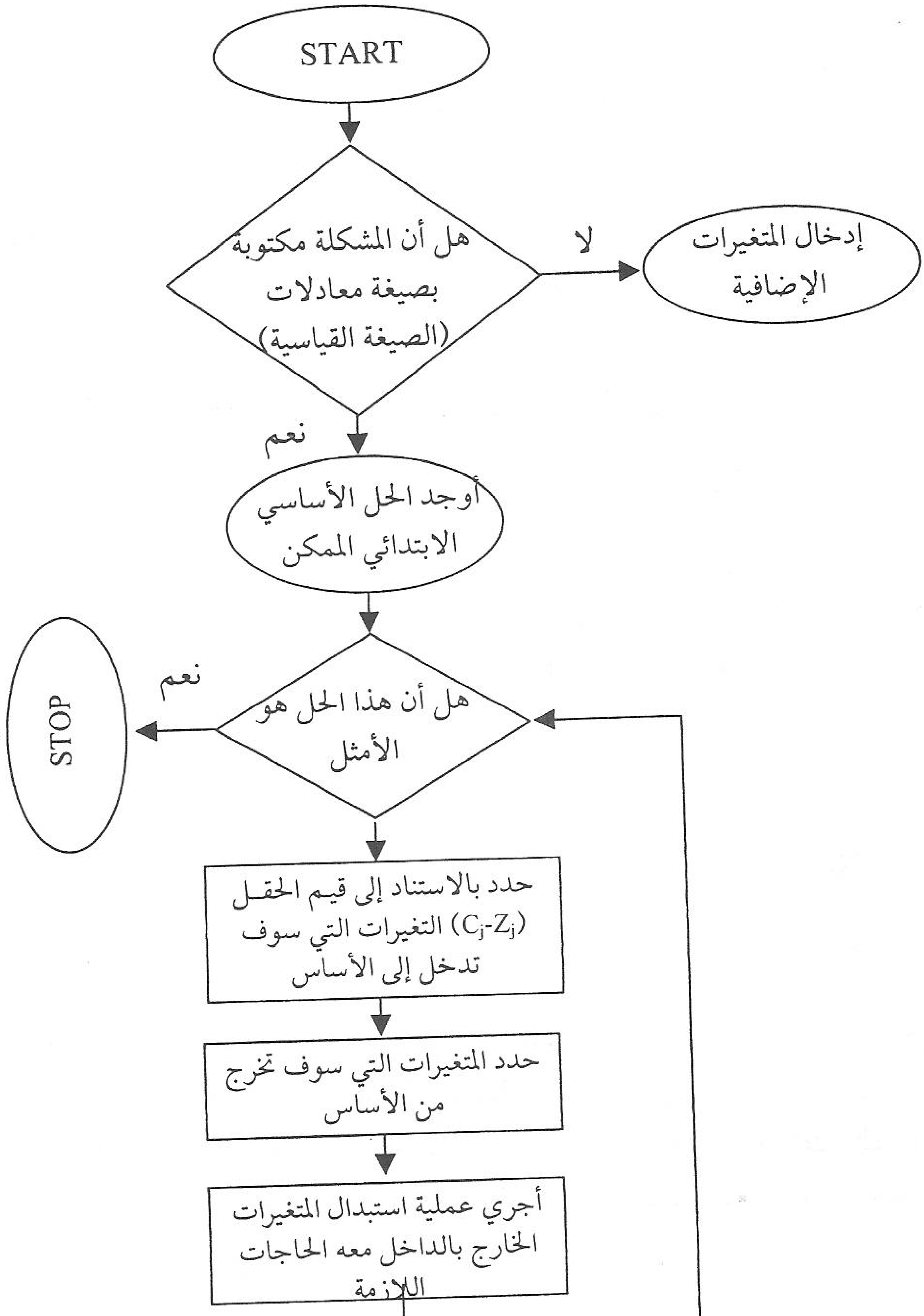
$$N_3 = 2 - \frac{3*1}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 = 0 - \frac{1*1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$N_5 = 1 - \frac{0*1}{2} = -1$$

$$N_6 = 4 - \frac{6*1}{2} = 1$$

أن العمليات الحسابية السابقة ، ينبغي في النهاية أن تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل وذلك ضمن خطوات متسلسلة منطقية كما أشرنا إلى ذلك أعلاه. أن هـذه العمليات ابتدأت من صياغة النموذج الرياضي وكتابته بصيغة معـادلات (الصيغة القياسية). لغاية الحصول على الحل الأمثل يمكن التعبير عنها مـن خـلال المخطط الانسيابي الموضح بالشكل رقم (5-7).



الشكل رقم (5-7) المخطط الانسيابي الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس

ثانياً:الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) في حالة تصغير دالة الهدف (Min Z) مع وجود خليط من العلاقات الرياضية (≤ ، = ، ≥) في القيود.

أن بعض المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، يتم التعبير عنها من خلال نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن وتكتب قيود النموذج الرياضي عادة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي) مع وجود بعض الحالات للأنواع الأخرى من القيود التي تحمل العلامات الرياضية (= يساوي ، ≤ أقل ويساوي). أن تحويل هذا النوع من النماذج الرياضية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، يتم بعد أن تضاف ونطرح متغيرات معينة/ وقد سبق أن تم توضيح ذلك في الفصل السابق. أن المتغيرات التي تضاف هي :

1- المتغير الفائض (S) surplus الذي يطرح من الطرف الأيمن للعلاقة الرياضية التي تعبر عن القيود وهذه قد تطرح أو تضاف في معادلة دالة الهدف.

2- المتغير الاصطناعي (R) Artificial variable الذي يضاف إلى القيود وتطرح أو يضاف في دالة الهدف، حيث تظهر هذه المتغيرات في الدالة المذكورة بمعامل كبير جداً يسمى (M - الكبيرة)([1]).

أن حل النموذج الرياضي الذي يحمل المواصفات أعلاه، وتحويله إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات (S+و R, S) يتم وفق اثنين من الطرق الأساسية، وهذه الطرق هي :

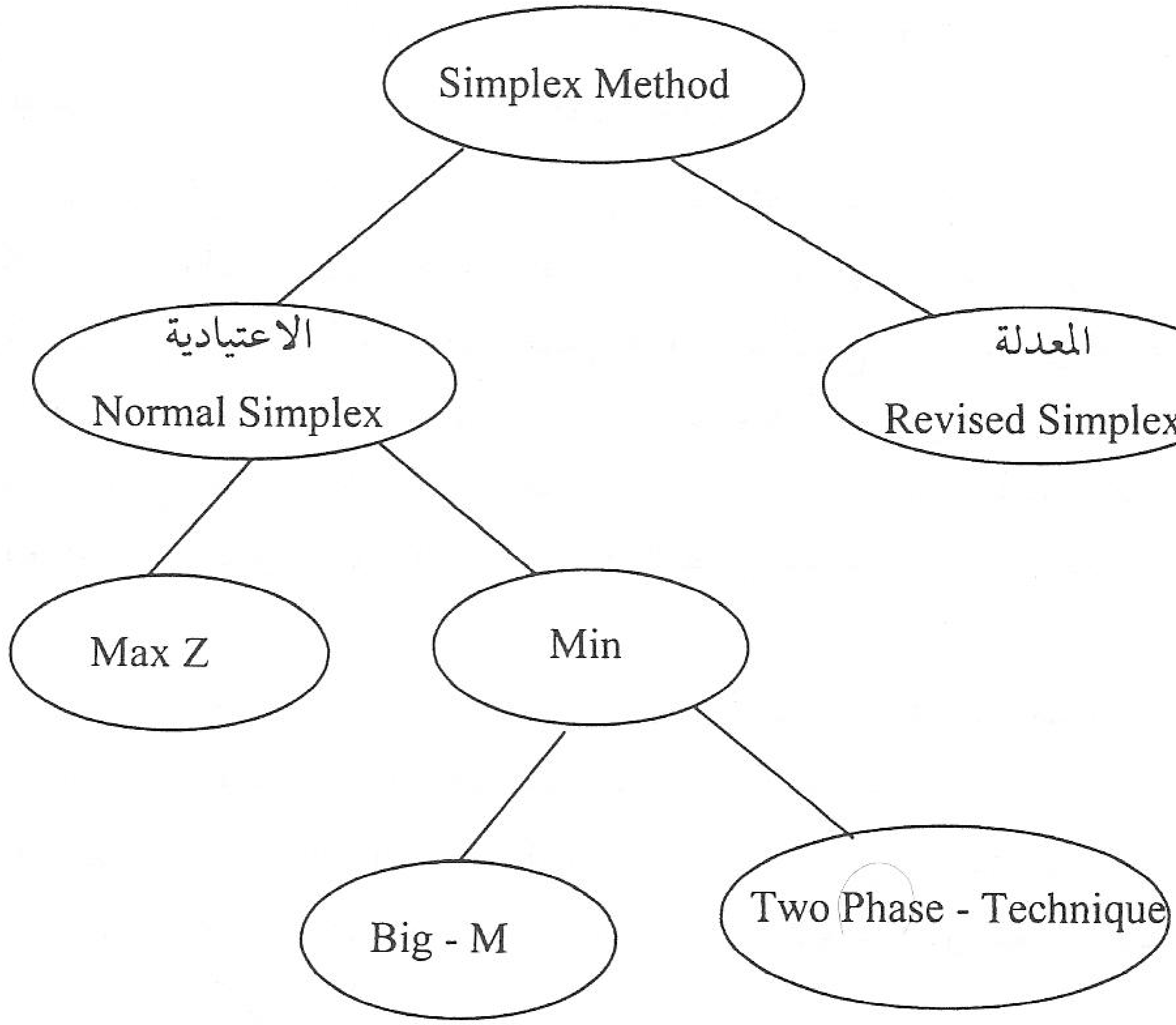
1- طريقة (M - الكبيرة) M- Technique Method.

2- طريقة المرحلتين Two - Phase Technique .

وأن موقع هاتين الطريقتين بالنسبة لطريقة السمبلكس يمكن توضيحهما من خلال الشكل رقم (5-8).

---

(1) لمزيد من التفاصيل راجع الجدول الخاص بإضافة المتغيرات (R_1-S ,S+) في الفصل السابق.



شكل رقم (5-8) موقع طريقة M - الكبيرة وطريقة المرحلتين ضمن طريقة السمبلكس

من أجل توضيح فكرة الطريق السابقة، يتطلب الأمر الاستعانة بأمثلة تطبيقية كما سيرد أدناه.

أولاً: تطبيق طريقة (Big - M) أم الكبيرة.

أن فكرة هذه الطريقة هي إضافة معامل كبير جداً لكل متغير إصطناعي Artificial Variables (R) في دالة الهدف ويحمل هذه المعامل في معادلة الهدف إشارة موجبة في حالة تصغير دالة الهدف وإشارة سالبة في حالة التعظيم، حيث أن هذه الإضافة لهذا التغير كفيلة بإخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل الأمثل. وفيما يلي مثال يوضح فكرة تطبيق هذه الطريقة.

مثال رقم (1):

النموذج الرياضي التالي يعبر عن أحد المشاكل المستمدة من الواقع العملي لأحد منظمات الأعمال الإنتاجية، والذي يتعلق بطرح نوعين من المنتجات :

(1) .... $X_1 + 3X_2 \geq 30$

(2) .... $4X_1 + 2X_2 \geq 40$

$$Z = 2X_1 + X_2 \rightarrow Min$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

حل النموذج الرياضي واستخراج النتائج النهائية لهذه المشكلة مستخدماً طريقة .(Big - M)

الحل:

لحل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية تحويل صيغة النموذج الرياضي من الحالة القانونية الغير مستقرة إلى الحالة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (Surplus - S) وإضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables R) وذلك كما يلي :

(1) .... $X1 + 3X2 \ \ S1 + R1 = 30$

(2) .... $4X1 + 2X2 - S2 + R2 = 40$

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.5\ _1 + 0.5_2 + MR_1 + MR_2 \rightarrow Min$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

$$R_1 , R_2 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

أن عملية الحل تتم من خلال تنظيم جدول السمبلكس، الذي من خلاله تتم العمليات الحسابية كما هو واضح في الجدول رقم (5-7). أن العمليات الحسابية في هذا

الجدول تتم وفق نفس القواعد السابقة عندما تكلمنا عن جدول السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف (Max - Z) ما عدا وجود بعض الاختلافات يمكن إجمالها كما في النقاط التالية أدناه:

1- المتغير الداخل، ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة وذلك في الحقل $(C_j - Z_j)$.

2- يتم الوصول إلى حالة الحل الأمثل إذا كانت كل قيم الحقل (C_j-Z_j) موجبة وأصفار، أي $(C_j - Z_j) \geq 0$.

3- إن قيمة دالة الهدف (Z) في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس تكون أعلى ما يمكن، وبعد ذلك تبدأ في التناقص، حيث تكون في آخر جدول السمبلكس (الذي فيه يكون الحل الأمثل) أقل ما يمكن. وفي مثالنا الحالي، ومن الجدول رقم (5-7) يتضح أن قيمة دالة الهدف المثلى هي 20 وحدة وأن قيم المتغيرات هي:

$X_1 = 6$ وحدة ، $X_2 = 8$ وحدة

جدول رقم (5-7) الحل وفق طريقة (Big M)

Xj المتغيرات Variables Si			X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi	
معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف			2	1	0	0	M	M		
Basic Variables	R_1	M	1	3	−1	0	1	0	30	
	R_2	M	4	2	0	−1	0	1	40	
Zj			5M	5M	−M	-M	M	M	قيمة دالة الهدفZ ←	
(cj - zj)			2-5M	(1-5M)	M	M	0	0	الهدف 70M	
Basic Variables	X_2	1	1/3	1	−1/3	0	1/3	0	10	
	R_2	0	(10/3)	0	2/3	−1	−1/3	1	20	
zj			(1/3+10M/3)	1/3-2M/3	-1/3+3M/3	-M	1/3-M/3	M	قيمة دالة الهدف 10+20M	
(cj-zj)			(5/3-10M/3)	0	1/3-2M/3	M	-1/3+5M/3	0		
Basic Variables	X_2	1	0	1	−3/5	1/10	3/5	−1/10	8	
	X_1	2	1	0	1/5	3/10	−1/5	3/10	6	
Zj			2	1	−1/5	−1/2	1/5	1/5	20	قيمة دالة الهدف Z ←
(cj-zj)			0	0	1/5	1/2	M−1/5	M−1/5		

وفي المرحلة الأخيرة من عملية الحل ، نجد أن قيم المتغيرات X_j هي كما يلي :

$X_3 = 40$	$X_1 = 0$
$X_5 = 20$	$X_2 = 0$
$X_4 = 30$	$X_6 = 0$

وبما أن X_j يمثل عدد البدلات التي يتم الحصول عليها باعتماد بديل القص رقم (j) فإن :

1- اعتماد بديل القص رقم (3) يؤدي إلى الحصول على 40 بدلة رجالية (.A) وذلك لأن المتغير X_3 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (1).

2- اعتماد بديل القص رقم (5) يؤدي إلى الحصول على 20 بدلة شبابية (.B) وذلك لأن المتغير X_5 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (2).

3- اعتماد بديل القص رقم (4) يؤدي إلى الحصول على 30 بدلة رجالية (.C) وذلك لأن المتغير X_4 فإن ضمن العلاقة الرياضية رقم (3).

ولو تم تعويض هذه القيم في المعادلات السابقة لتحقق الشرط المطلوب ألا وهو الحصول على (100) بدلة من كل نوع.

ثانياً: تطبيق طريقة المرحلتين (Two - Phase Technique) :

أن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة كما هو واضح من الاسم يتم على مرحلتين ، وذلك كما يلي :

1- **المرحلة الأولى**: والتي بموجبها يتم تكوين دالة هدف جديدة والتي تعبر عن مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود. وباستخدام طريقة السمبلكس يتم إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (بغض النظر عن الهدف الأصلي للمشكلة)، أما قيود المشكلة فهي نفس قيود النموذج الأصلي.

أن قيم المتغيرات الاصطناعية التي يتم الحصول عليها من هذا النموذج في هذه المرحلة تكون جميعها مساوية للصفر وبهذا نحصل على حلاً أساسياً ممكناً خالياً من المتغيرات الاصطناعية والذي يعتبر حلاً ابتدائياً للمرحلة الثانية.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة نأخذ مثال تطبيقي كما سيرد أدناه.

مثال رقم (1): من أجل التواصل في فكرة طريقة السمبلكس نورد هنا المثال الوارد في حالة تطبيق طريقة (Big - M) وذلك كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 \rightarrow Min$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: أن عملية الحل في المرحلة الأولى تتم من خلال خطوتين متتابعتين في الخطوة الأولى لعملية حل هذا النموذج الرياضي هي تحويلة من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (surplus) من الجهة اليسرى من القيود وذلك كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 - S_1 \Rightarrow \geq 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 - S_2 \Rightarrow \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Min$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$

يلاحظ في النموذج القياسي السابق عدم الحصول على مصفوفة الوحدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identity Matrix ، لذلك يتم إضافة متغيرات اصطناعية كما يلي :

$$(1) \quad ......\ X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$(2) \quad .....\ 4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$
$$R_1 , R_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية : يتم بموجبها صياغة دالة هدف جديدة وذلك على النحو التالي :

$$w = (R_1 + R_2) \rightarrow Min$$

وفقاً للقيود الواردة أعلاه والمرتبطة بالنموذج الرياضية القياسي يتم حل هذه المشكلة بالجدول رقم (10-5). ويلاحظه في هذا الجدول أن جميع قيم $(c_j - w_j)$ في المرحلة الأخيرة موجبة وأصفار $(c_j - w_j) \geq 0$.

وهذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل النهائي للمرحلة الأولى ويلاحظه في هذه المرحلة أنه تم استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1,R_2) من الحل الأساسي الممكن وعليه ينبغي الانتقال إلى المرحلة الثانية.

2- **المرحلة الثانية:** حيث يتم بدء الحل في هذه المرحلة بالحل النهائي الأساسي الممكن (الذي هو امتداد للمرحلة الأولى) باستخدام دالة الهدف الأصلية للنموذج الرياضي للمشكلة ، أي أن الجزء الأخير لجدول السمبلكس في المراحل الأولى سوف يعتبر بمثابة الجزء الأول لجدول السمبلكس في المرحلة الثانية مع تغيير في دالة الهدف ، وبعد ذلك يتم تحسين الحل لغاية بلوغ الحل الأمثل النهائي. وفيما توضيح لفكرة هذه المرحلة مع الاستعانة كما ذكرنا بدالة الهدف الأصلية.

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Min$$

والجدول رقم (5-10) يوضح ذلك.

المتغيرات Xj Variables Si		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف		0	0	0	0	1	1		
المتغيرات الأساسية	R_1	1	3	−1	0	1	0	30	1
	R_2	(4)	2	0	−1	1	1	40	1
W_j		5	5	−1	−1	1	1	70	قيمة دالة الهدف ←w
(C_j-W_j)		(−5)	−5	1	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	R_1	0	(5/2)	−1	1/4	1	−1/4	20	1
	X_1	1	1/2	0	−1/4	0	1/4	10	0
W_j		1	5/2	−1	1/4	1	1/4	20	قيمة دالة الهدف ← w
(C_j-W_j)		0	(−5/2)	1	−1/4	0	5/4		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	−2/5	1/10	2/5	−1/10	8	0
	X_1	1	0	1/5	−3/10	1/5	3/10	6	0
W_j		0	0	0	0	0	0	0	قيمة الهدف w
(C_j-W_j)		0	0	0	0	1	1		

جدول رقم (5-11) الحصول على الحل الأمثل

المتغيرات Xj		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj		2	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	-2/5	1/10	8	1
	X_1	1	0	5/1	-3/10	6	2
Z_j		2	1	0	-1/5	20	قيمة دالة الهدف Z
(C_j-Z_j)		0	0	0	1/5		

من الجدول أعلاه يتضح أن جميع قيم الحقل (C_j- Z_j) هي موجبة وهنا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل وبموجب هذا الحل ينبغي على منظمة الأعمال الإنتاجية أن تلتزم بخطة الإنتاج التالية :

X1 = 6 أي طرح المنتج No.1 بمقدار 6 وحدات.

X2 = 8 أي طرح المنتج No.2 بمقدار 8 وحدات.

وبذلك تكون التكاليف الكلية أو النفقات (قيمة Z) أقل ما يمكن وهي 20 وحدة نقدية (Z = 20). وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بموجب طريقة (Big - M) .

5.5 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

في الحالات المختلفة للبرمجة الخطية، يتم التركيز على الحلول المختلفة للمشكلة التي يمكن الحصول عليها عند إتمام عملية الحل. وبالتحديد يتم التدقيق والتمييز بين الأنواع الثلاث من الحلول التي يمكن الحصول عليها وهي ما يلي :

1- الحل الممكن Feasible solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal solution .

أن هذه الحلول الثلاث لا يمكن متابعتها والتمييز بينها إلا من خلال ما يعرف بمنطقة الحلول الممكنة Feasible Region (R). أن هذه المنطقة تظهر من خلال تقاطع المستقيمات التي تعبر عن قيود المشكلة بعضها مع البعض الآخر والذي يعني أيضاً تقاطع المساحة الخاصة بكل مستقيم، بعبارة أخرى أن منطقة الحلول الممكنة (R) ظهرت من تداخل مساحة المستقيم الأول مع مساحة المستقيم الثاني وظهور منطقة

تداخل مشتركة تحقق كل من القيد الأول والقيد الثاني اللذان ساهما في ظهور وتبلور شكل المنطقية (R). وتأسيساً على ما تقدم ومن أجل ضمان تحقق هذا التداخل والتقاطع لابد لنا من ملاحظة القواعد الأساسية التالية :

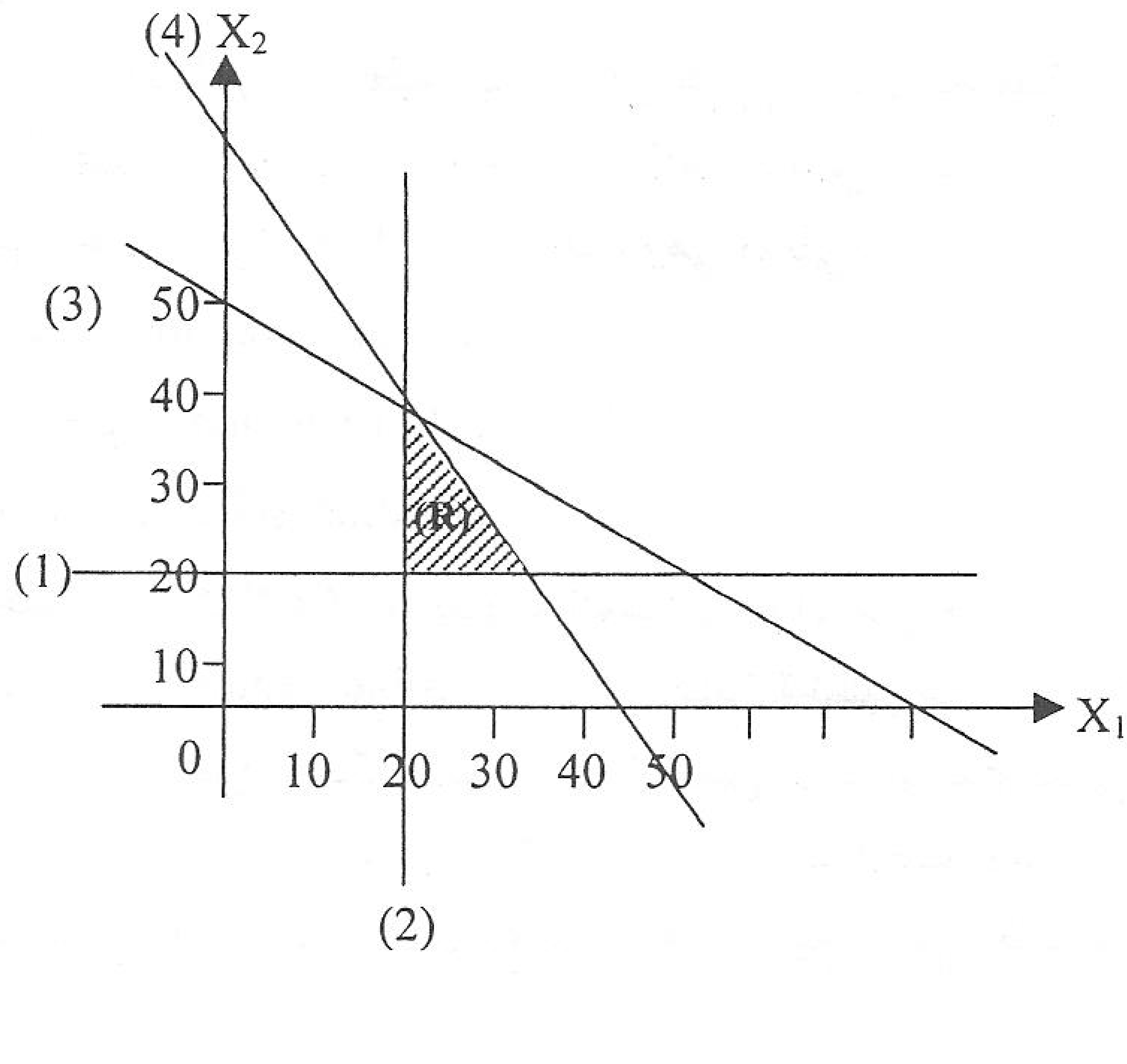
أولاً: إذا كانت علامة القيد أقل أو يساوي (≤) فإن المنطقة التي تحقق هذا المستقيم تكون متجهة إلى الداخل، وبذلك فإن كل النقاط الواقعة على المستقيم أو تحته يفترض أن تحقق القيد المذكور.

ثانياً: إذا كانت علاقة القيد ≥ أكبر أو يساوي فإن النقاط التي تحقق هذا القيد سوف تكون واقعة على أو خارج المستقيم الذي يعبر عن القيد المذكور.

ثالثاً: عند تحديد موقع منطقة الحلول الممكنة (R) يؤخذ بنظر الاعتبار ما يلي :

1- في حالة تعظيم دالة الهدف تكون منطقة الحلول محصورة بين المستقيمات المتقاطعة ونقطة الأصل. وقد يظهر استثناء لهذه الحالة بحيث ترتفع منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل من خلال مستقيمات تعبر عن شروط تتعلق بالكمية، حيث قد لا تبدأ الكمية من الصفر وإنما من مقدار أكبر من ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-9).

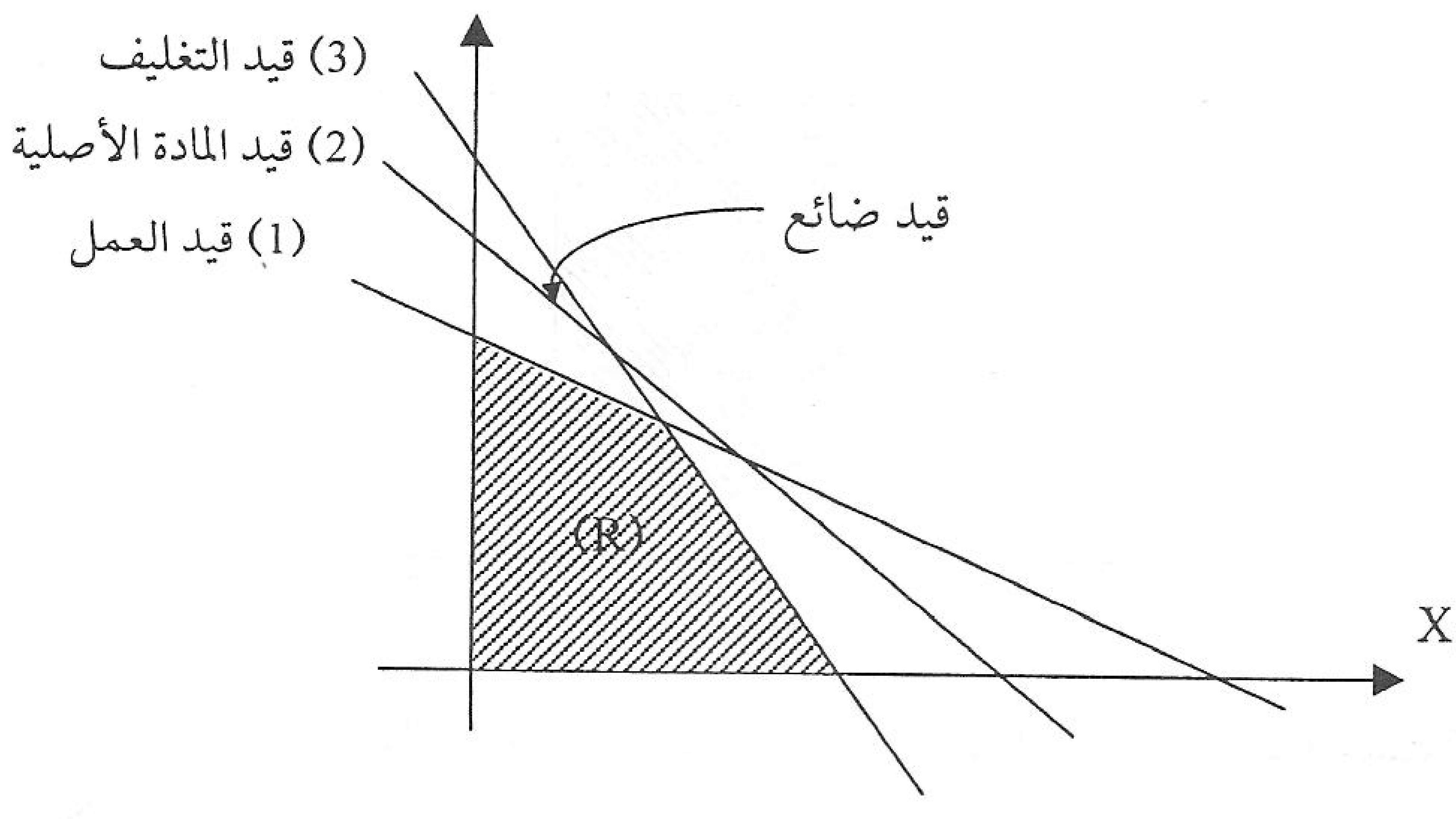
شكل (5-9) حالة خاصة لمنطقة الحلول الممكنة (R)



2- إذا كانت الحالة هي تصغير دالة الهدف ، فإن منطقة الحلول الممكنة سوف تكون محصورة بين نقطة تقاطع المستقيمات والزاوية المناظرة لنقطة الأصل في الربع الأول من المحاور الأفقية والعمودية (السينية والصادية) .

3- سواء كان الأمر يتعلق بتعظيم أو بتصغير دالة الهدف ، وكان هناك أكثر من اثنين من المستقيمات المتقاطعة بعضها مع البعض الآخر ، فإن في هذه الحالة يؤخذ بنظر الاعتبار (لأجل تحديد منطقة الحلول الممكنة) المستقيمات التي تعبر عن القيود الأساسية المشكلة (مثل قيود المواد الأولية ، قيود العمل ، ... الخ) كأساس لتحديد منطقة الحلول الممكنة ، في حين يعتبر القيد الآخر كقيد ضائع أو قيد محدد ثانوي ، كما هو واضح في الشكل رقم (5-10).

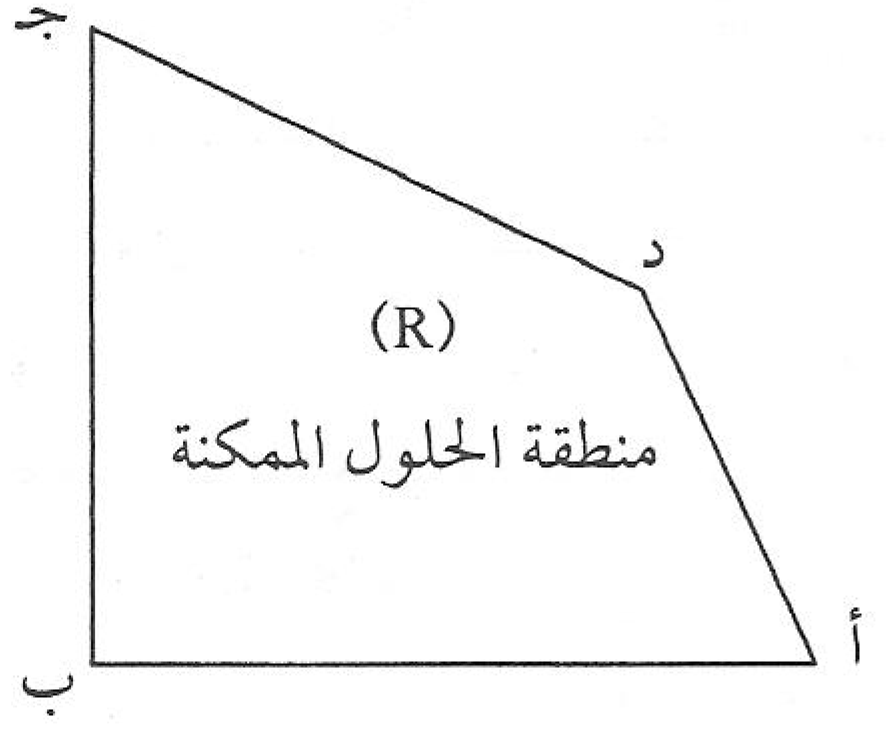
شكل رقم (5-10) تحديد منطقة الحلول من خلال القيود الأساسية



رابعاً : بعد أن تحدث عملية تقاطع المستقيمات والمساحات المعبرة عن قيود المشكلة ، يبرز إلى الواقع نوعين من الأشكال.

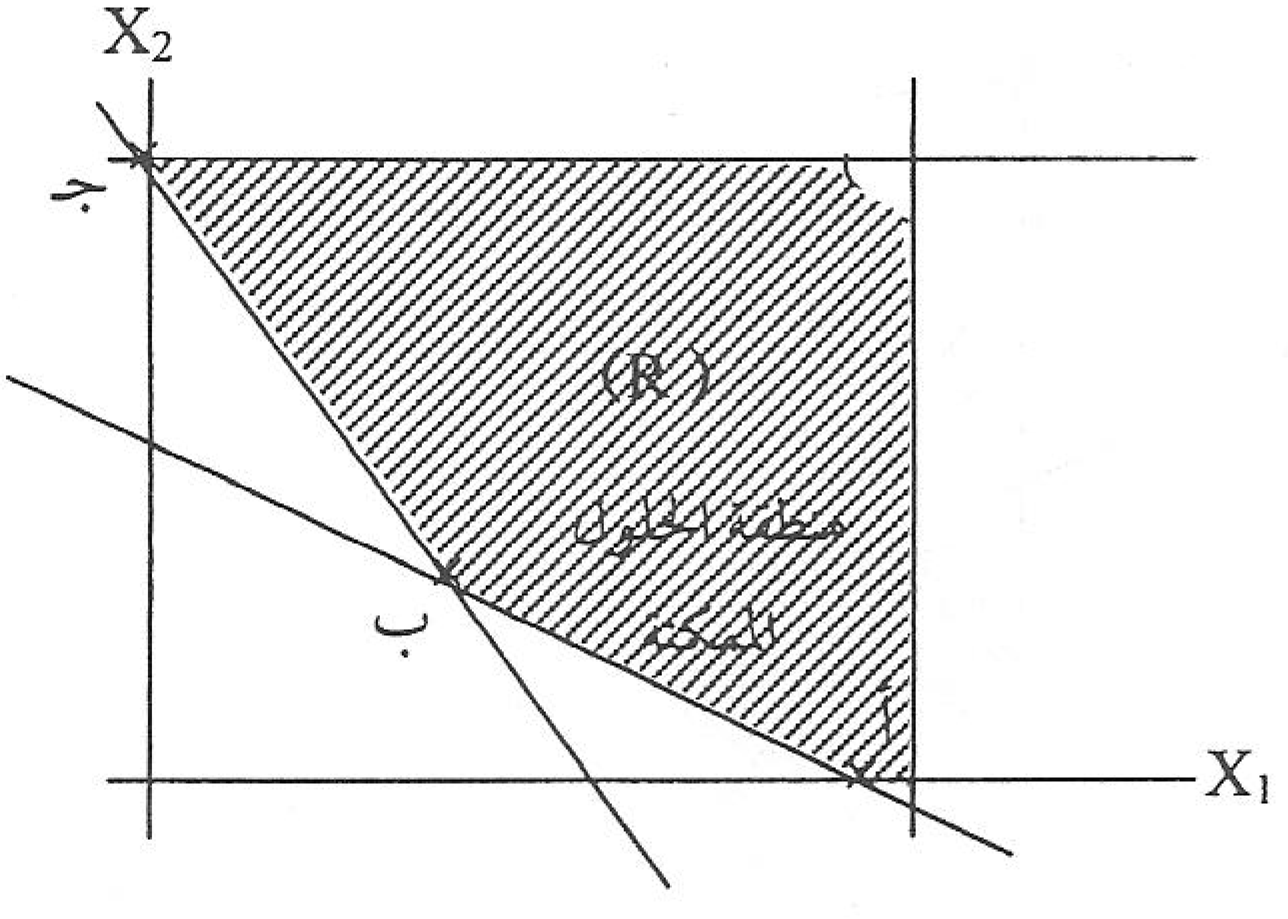
1. الشكل الذي يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف ، الذي يحقق القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل رقم (5-11).

شكل رقم (5-11) شكل افتراضي يعبر عن منطقة الحلول الممكنة (Max. Z)



2- الشكل الذي يعبر عن حالة تصغير دالة الهدف ، وفيها تتحقق كافة القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل الاقتراضي رقم (12-5).

شكل رقم (12-5) شكل افتراضي لمنطقة الحلول الممكنة (Min. Z)



من خلال تحليل الحالات أعلاه يتضح أن هناك نقاط أساسية مشتركة بين الاثنين ، وهي :

أ . وجود نقاط كثيرة تعبر من الحل الممكن [1].

---

(1) في حالة البرمجة بإعداد صحيحة يكون عدد هذه الحلول قليل جداً بالقياس إلى البرمجة الخطية ، وذلك لكون هذه الحلول تتحدد من خلال تقاطع المستقيمات النازلة من تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية.

ب. وجود نقاط تمثل زوايا الشكل (R) تعبر عن الحل الأفضل.

جـ- وجود نقطة واحدة تعبر عن الحل الأمثل، حيث تتصف هذه النقطة بما يلي:

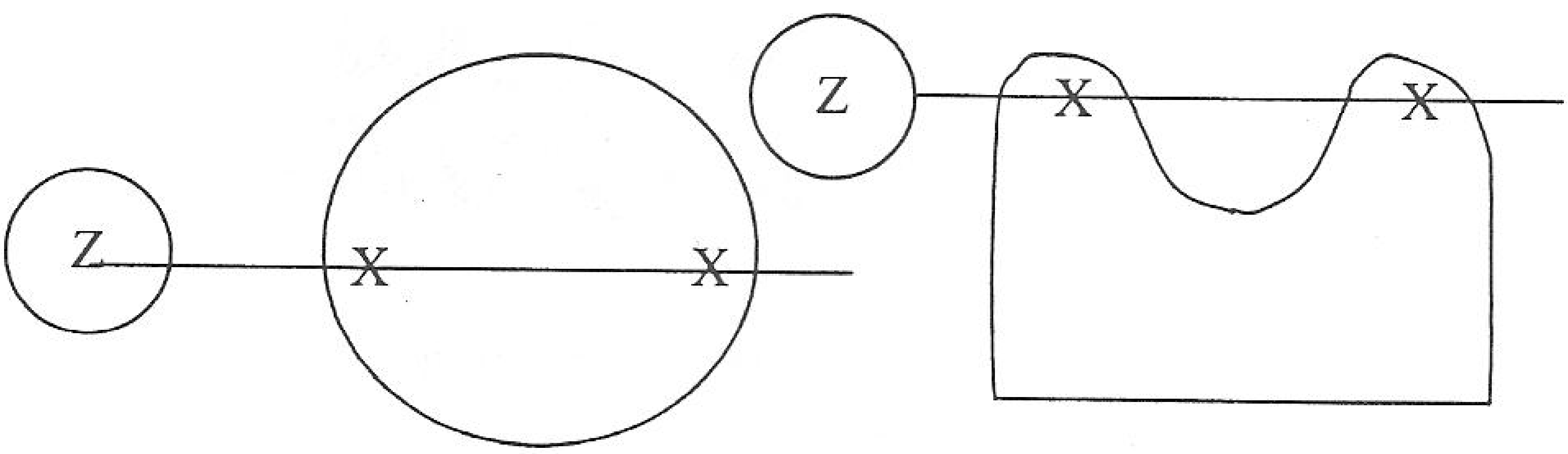
- تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل في حالة Max.Z.

- تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل في حالة Min.Z

د - أن نقطة الحل الأمثل تتكون من الإحداثيات (X_1 , X_2) والتي يجب أن تكون قيم موجبة أكبر من الصفر.

هـ-شكل منطقة الحلول (R) المشار إليه ضمن النقطة (1) والنقطة (2) أعلاه غالباً ما يكون شكلها الأقرب إلى متوازي الأضلاع أو الرباعي المنحرف وما شابه ذلك، ولا تعبر الأشكال التالية مقبولة في كونها منطقة حلول ممكنة.

شكل رقم (5-13) الأشكال غير المقبول كمناطق للحلول الممكنة



وفيما عدا الحالات المشار إليها أعلاه، فإن أي حالة تظهر تعتبر من الحالات الخاصة في البرمجة الخطية. وبشكل عام يمكن تبويب الحالات الخاصة للبرمجة الخطية في أربعة حالات أساسية وهي:

1- حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة No Feasible solution .

2- حالة منطقة الحلول غير المحدودة Un bounded solution .

3-حالة الانحلال (التفكك) Melti Optimal solution Degeneracy .

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من الحالات الواردة ذكرها أعلاه، مع الإشارة إلى إننا سوف نعتمد طريقة الرسم coraphical method كأساس من عملية الحل بدلاً من الطريقة الجبرية أو طريقة السمبلكس من أجل تقريب الفكرة أكثر إلى ذهن القارئ.

أولا : حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة No - Feasible solution :

في هذا النوع من الحالات لا يمكن الحصول على شكل هندسي متكامل يعبر عن منطقة الحلول الممكنة بسبب وجود تضارب بين القيود وبالتحديد بين العلامات الرياضية التي تفصل بين الجانب الأيمن والأيسر للعلاقة الرياضية كما هو واضح من خلال النموذج الرياضية الذي يعبر عن أحد الأشكال الإنتاجية في الواقع العملي :

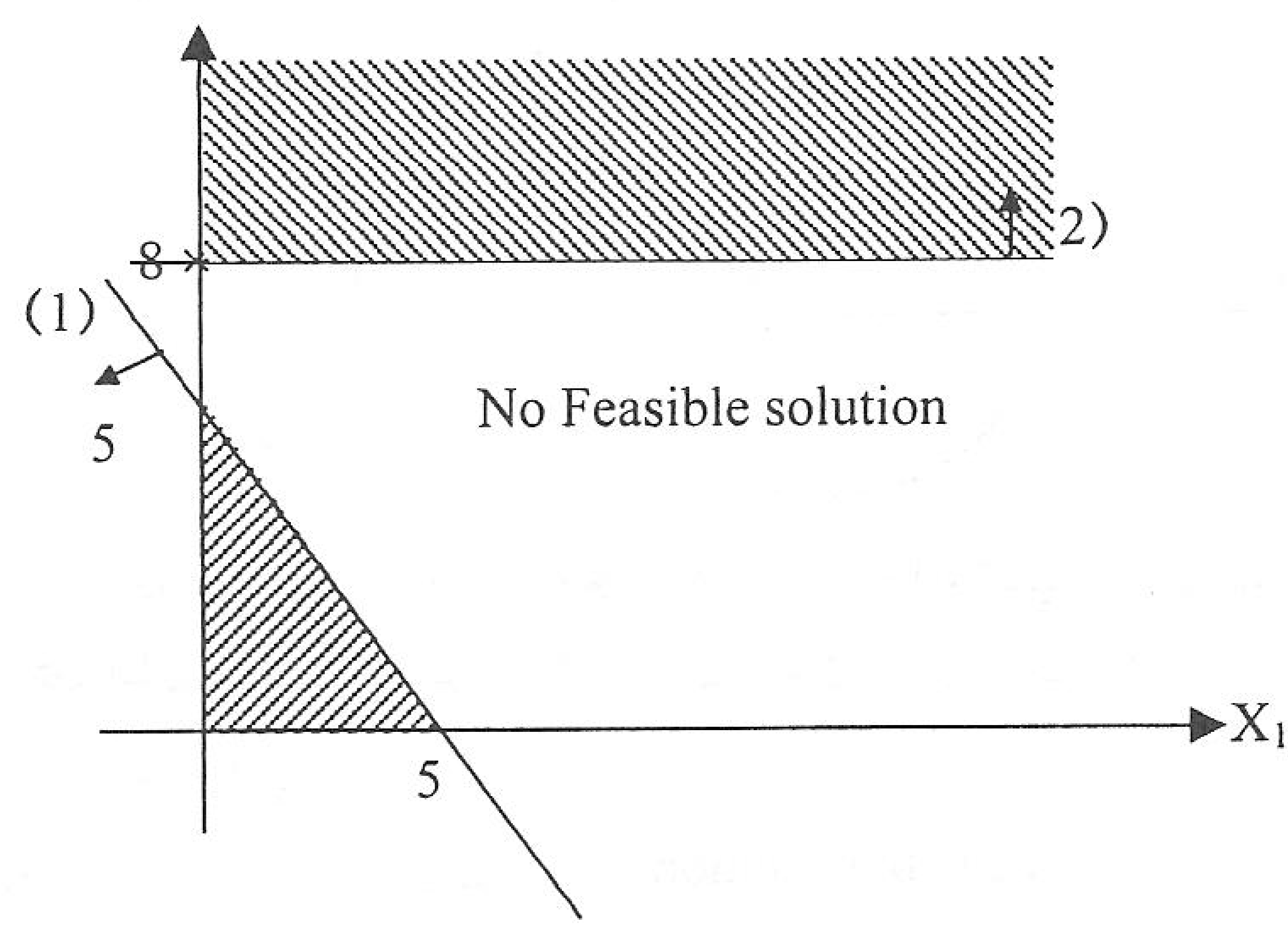
(1) .... $X_1 + X_2 \leq 5$

(2) ...... $X_2 \geq 8$

$$Z = 6X_1 = 4X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً يكون كما يلي :



يلاحظ من الشكل السابق أنه لم يتحقق فيه القواعد الشروط السابقة وأهمها التداخل أو التقاطع بن مساحة المستقيم الأول ومساحة المستقيم الثاني ، وتفسير ذلك في الواقع العملي هو أن حاصل جمع كل من المنتج رقم (X_1) والمنتج رقم 2 (X_2) ينبغي أن يساوي أو يقل عن (5) وحدات وبنفس الوقت وجود شرط آخر بأن يكون عدد الوحدات من المنتج رقم (2) هو أكثر أو يساوي 8 ، وهذا بحد ذاته تناقض يكون عائقاً أمام ظهور منطقة الحلول الممكنة (R).

ثانياً: حالة منطقة الحلول غير المحدودة Unbounded solution :

في هذا النوع من الحالات الخاصة يتم الحصول على منطقة حلول ممكنة (R) مفتوحة وغير مكتملة الجوانب كما هو واضح في المثال التالي:

النموذج الرياضي الثاني يعبر عن مشكلة إنتاجية تتعلق بطرح نوعين من المنتجات، وهو المنتج الأول (X_1) والمنتج الثاني (X_2):

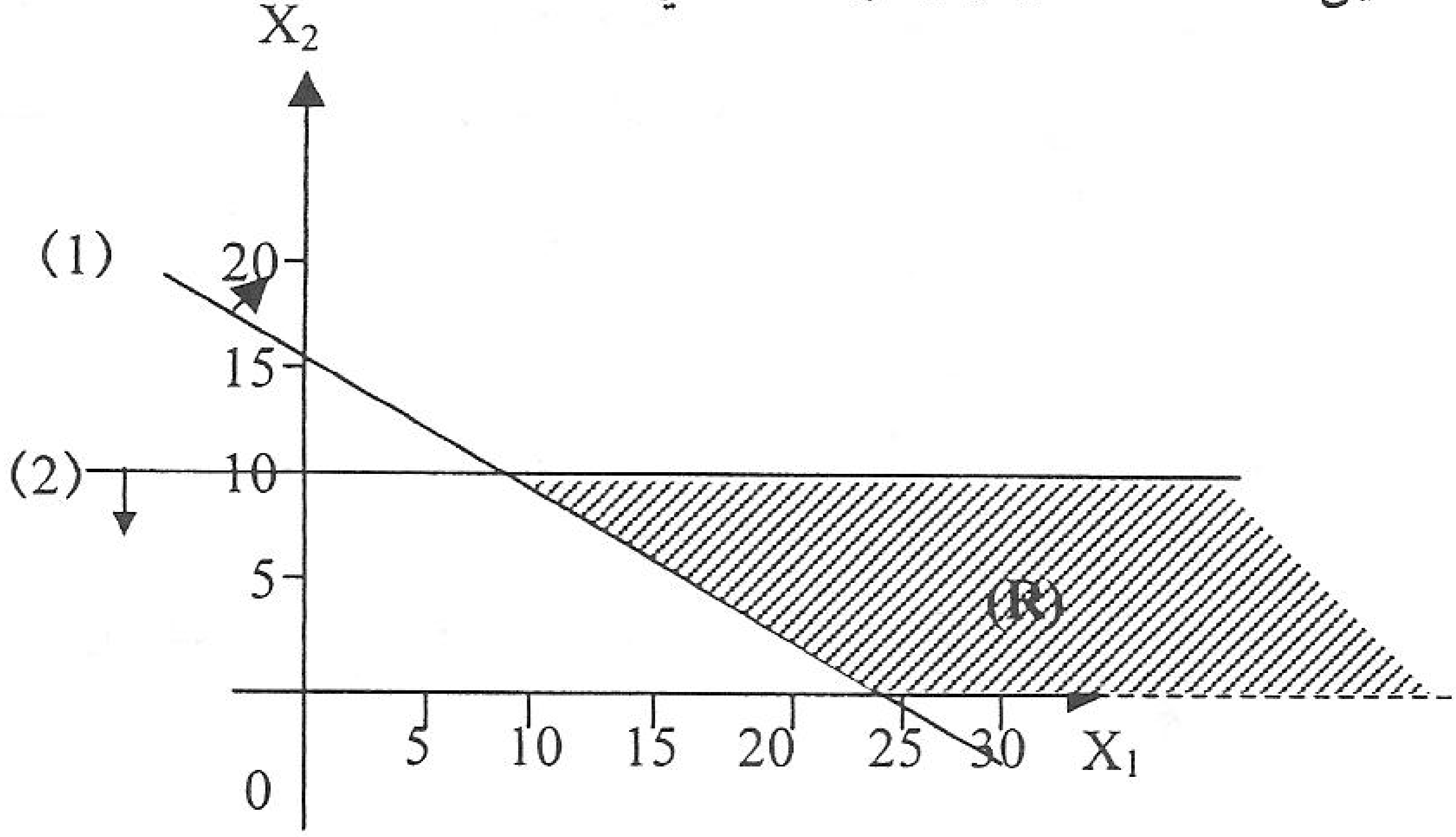
$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6X_1 + 10X_2 \geq 150$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_2 \leq 10$$

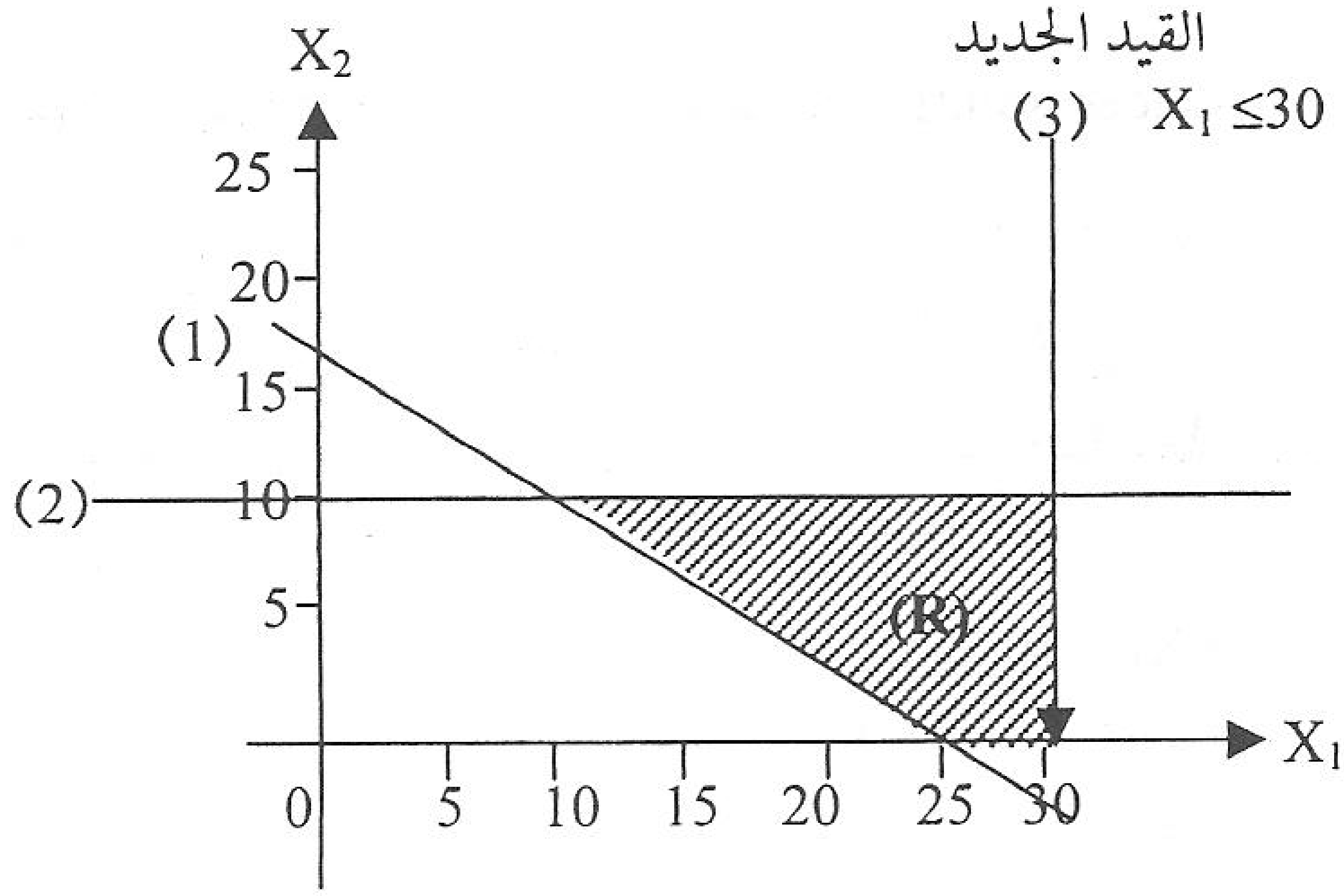
$$Z = 5X_1 + 20X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن تمثيل هذه المشكلة بيانياً يكون كما يلي:



ومن الشكل أعلاه يتضح أنه كلما زادت الكمية X_1 من خلال المحور الأفقي X، كلما كان ذلك عاملاً مساعداً في بقاء منطقة الحلول (R) مفتوحة وغير محدودة. ويمكن معالجة هذه الحالة بأخذ قيد إضافي يقطع المحور X_1 ليحدد مقدار كمية الإنتاج المطلوبة، على سبيل المثال لو كان هناك قيد إضافي، هو ($X_1 \leq 30$) فإن شكل منطقة الحلول سوف يتحدد ولا تصبح هذه الحالة من الحالات الخاصة، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:



ثالثاً: حالة تعدد الحلول المثلى Melti Optimal solution :

أن هذه الحالة تكتسب صفة الخصوصية بسبب أن الحل النهائي للمشكلة الذي يتم الحصول عليه على أكثر من حل أمثل واحد ومن أجل توضيح فكرة هذه الحالة نأخذ النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية.

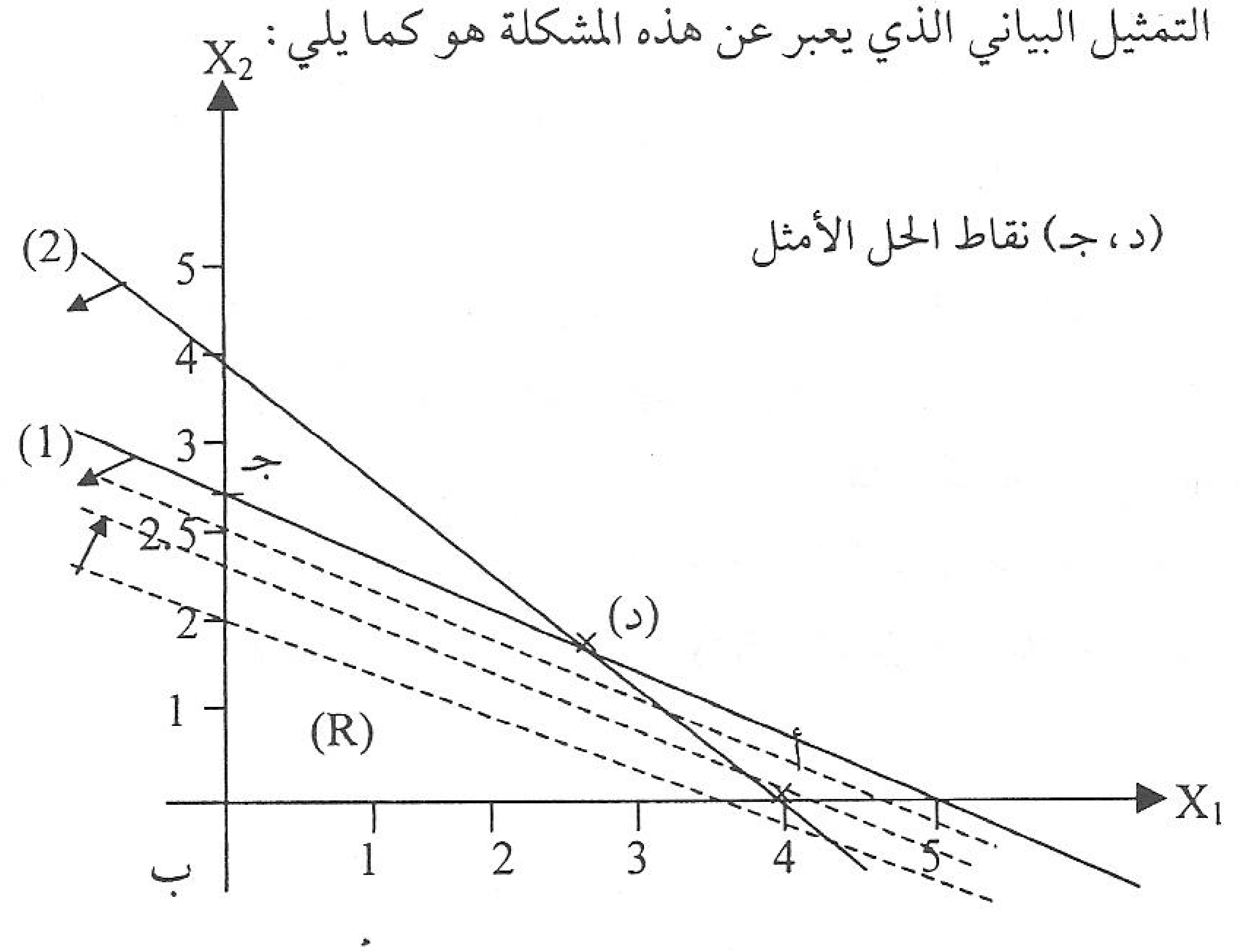
(1) .... $X_1 + 2X_2 \le 5$

(2) .... $X_1 + X_2 \le 4$

$Z = 2X_1 + 4X_2 \rightarrow Max$

$X_1, X_2 \ge 0$

التمثيل البياني الذي يعبر عن هذه المشكلة هو كما يلي :



من الشكل السابق يتضح أن مستقيم دالة الهدف يبتعد شيئاً فشيئاً من نقطة الأصل بالتدريج وبالتوازي مع المستقيمات المذكور بعضها مع البعض الآخر حتى نجد في النهاية أن أحد هذه المستقيمات التي تمثل دالة الهدف سوف تمس كل من النقطة د والنقطة جـ في وقت واحد. واستناداً إلى النظريات الهندسية التي تنص على أن (إذا اشترك مستقيم مع مستوي بأكثر من نقطة واحدة فإن ذلك المستقيم يعتبر منطبقاً على المستوي) [1] . وعليه وبناءاً على ما تقدم فإن كل نقاط المستقيم د جـ سوف تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل نفسه.

رابعاً: حالة الانحلال (التفكك) Degeneracy :

أن هذه الحالة تختلف عن الحالات الاعتيادية لسببين أساسيين وهما :

1- أن شكل منطقة الحلول الممكنة ليس رباعياً أو متوازي أضلاع بل هو مثلث.

2- أن نقطة الحل الأمثل التي يتم تحديدهـا في منطقة الحلول الممكنة يكون أحد متغيراتها (X_2, X_1) يساوي صفراً.

ولتوضيح فكرة هذه الحالة ، نأخذ أحد النماذج الرياضية الذي يعبر عن أحد المشاكل التطبيقية في الواقع العملي ، وذلك كما يلي :

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

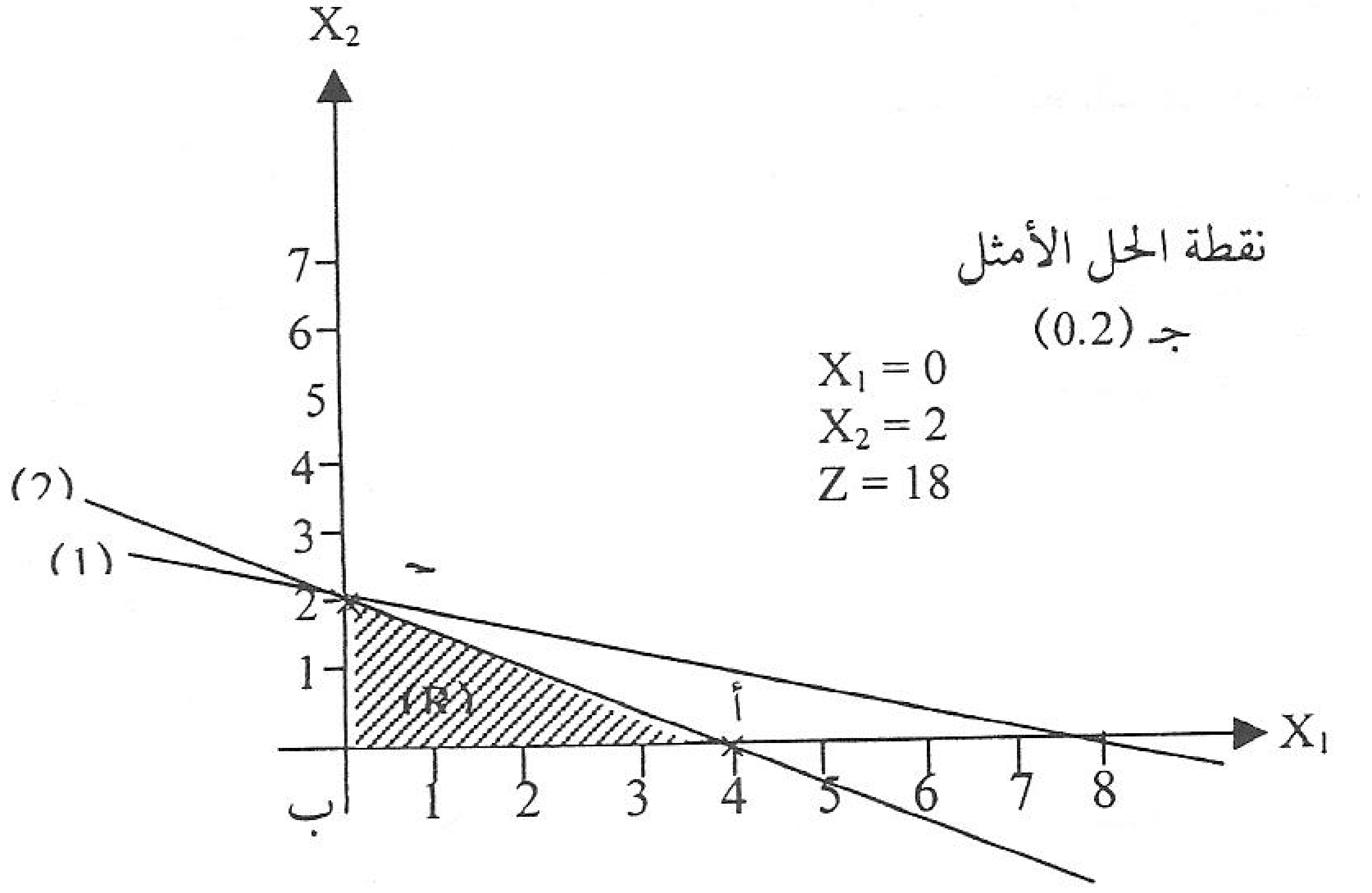
$$Z = 3X_1 + 9X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً ، يؤدي إلى الحصول على الشكل التالي :

---

(1) منطقة الحلول الممكنة (R) تعد بمثابة مستوي.



من الشكل السابق يتضح أن على إدارة المنشأة مع المنتج رقم 2(2) وحدة وعـدم طرح المنتج رقم (1) وبذلك فإن قيمة دالة الهدف تصبح (18) وحدة وهو الحل الأمثل.

النموذج المقابل Dual في البرمجة الخطية

إن نموذج البرمجة الخطية الذي تم توضيحه في الفصول السابقة يعتبر هو الأساس لصياغة النموذج المقابل، Dual ويعرف النموذج الرياضي للبرمجة الخطية عادة باسم النموذج الأولي Primal ومن مستلزمات تطبيقه العادية هو تحقق الشروط التالية :

1. الأمثلية Optimality.
2. أن يكون الحل ممكنا Feasibility

الشرط الأول يتمثل في العلاقة الرياضية $0 \leq$ (Cj - Zj) في حالة تعظيم دالة الهدف وبالعكس في حالة التصغير وذلك في المرحلة الأخيرة من الحل. أما الشرط الآخر فهو أن قيم $X_j \geq 0$ لا يجوز أن تكون سالبة، ولكن توفر الشرط الأول، وعدم تحقق الشرط الثاني، (أي كانت أحد قيم المتغيرات الأساسية في المرحلة الأخيرة في الحل سالبة) فإن هذا الحل غير ممن لذلك فإن أفضل أسلوب لمواجهة المشكلة هو اللجوء إلى النموذج المقابل Duality.

إن للنموذج المقابل استخدامات كثيرة في مختلف المجالات الإدارية والاقتصادية وذلك على مستوى المنشأة بشكل خاص والاقتصاد بشكل عام. ويهدف هذا النموذج إلى تقديم تحليلات ومؤشرات مختلفة لم يكن بالإمكان الحصول عليها باستخدام النموذج الأصلي. علماً بأن خطوات وإجراءات حل النموذج المقابل هي أقل بما هو عليه في النموذج الأصلي.

لتوضيح فكرة صياغة النموذج المقابل، نذكر أدناه صيغة معينة من النموذج العام للبرمجة الخطية :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$

التي تحقق الشروط التالية :

$$a_{11} X_1 + a_{12}X_2 + ... a_1n\, X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + ... + a_{2n} X_n \leq b_2$$
$$\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + ... + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$X_j \geq 0$ (حيث أن : $j = 1, 2, \dots n$)

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقصى ما يمكن، أي :

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

بعد إدخال المتغيرات الثابتة y_i (حيث أن $i = 1, 2, \dots m$) نحصل على ما يلي :

$$y_1 = b_1 - (a_{11}X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n)$$
$$y_2 = b_2 - (a_{21}X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = b_m - (a_m X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n)$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي[1] :

(جدول 1.6)

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{22}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
:	:	:	:	:	:
$y_m =$	a_{m2}	a_{m2}	...	a_{Mn}	b_m
$Z_1 =$	$-C_2$		...	$-C_n$	0

أما بالنسبة للنموذج المقابل، فإن الصيغة الرياضية له هي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية $u_1, u_2, \dots u_m$ التي تحقق الشروط التالية :

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m \geq C_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m \geq C_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m \geq C_n$$

$u_i \geq 0$ (حيث أن : $i = 1,2, \dots m$:)

(1) H-KRYNSKI. A.BADACH, pp. cit. pp. 101.

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن ، أي :

$$F = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m$$

وبعد إدخال المتغيرات الثابتة C_j (حيث أن : $j = 1,2,\dots n$) نحصل على ما يلي :

$$g_1 = (a_{11} u_1 + a_{21} u_1 + \dots + a_{m1} u_m) - C_1 \geq 0$$

$$g_2 = (a_{12} u_1 + a_{22} u_1 + \dots + a_{m2} u_m) - C_2 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$g_n = (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m) - C_n \geq 0$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي :

(جدول 2.6)

	u_1	u_2	$\dots$	u_m	1
$g_1 =$	a_{11}	a_{21}	$\dots$	a_{m1}	$-C_1$
$g_2 =$	a_{12}	a_{22}	$\dots$	a_{m2}	$-C_2$
:	:	:	:	:	:
$g_n =$	a_{1n}	a_{2n}	$\dots$	a_{mn}	$-C_m$
$F =$	b_1	b_n	$\dots$	b_m	0

ويمكن دمج الجدل (1.6) الذي عبر عن النموذج الأصلي مع الجدول (2.6) الذي يعبر عن النموذج الثنائي في جدول واحد وهو الآتي :

(جدول 3.6)

	u_1	u_2	$\dots$	u_m	1
	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$Z=$
$-Xg_1 =$	a_{11}	a_{21}	$\dots$	a_{m1}	$-C_1$
$-Xg_2 =$	a_{12}	a_{22}	$\dots$	a_{m2}	$-C_2$
: :	:	:	:	:	:
$-X_{ngn} =$	a_{1n}	a_{2n}	$\dots$	a_{mn}	$-C_m$
$F =$	b_1	b_2	$\dots$	b_m	0

في ضوء ما تقدم يمكن أن نستنتج ما يلي :

1- إذا كانت المعاملات الداخلة في تركيب النموذج الأصلي تشكل المصفوفة A وذلك كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن المعاملات الداخلة في تركيب النموذج المقابل سوف تأخذ الرمز A^t والذي يعبر عن المصفوفة التالية :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2- إن القيم الداخلة في تركيب عمود القيم الحرة (الجهد اليمني من العلاقات الرياضية) تشكل بمثابة معاملات للمتغيرات الأساسية X_j (حيث أن : $j = 1, 2, \ldots, n$) في دالة الهدف للنموذج الأصلي.

3- العلاقة الرياضية التي تفصل طرفي العلاقة الرياضية إذا كانت $\leq$ أقل أو يساوي في النموذج الأصلي تصبح $\geq$ أكبر أو يساوي في النموذج المقابل وبالعكس.

4- دالة الهدف إذا كانت تصل إلى أكبر قيمة لها في النموذج الأصلي ، فإنها سوف تصل إلى أقل قيمة لها في حالة النموذج المقابل.

في سبيل الحصول على حل للنموذج الأولى الموضح من خلال الجدول (3.6) ، فإن المطلوب هنا هو أن تصبح القيم الموجودة في يسار الجدول مساوية إلى الصفر. أما المتغيرات الموجودة فوق الجدول فإنها تصبح مساوية إلى ما يعادلها من قيم في صف دالة الهدف F. وإن أكبر قيمة أو أقل قيمة لدالة الهدف تكون موجودة في حقل دالة الهدف F وعمود القيم الحرة.

ولتقديم صورة أوضح عن طبيعة النموذج المقابل وعلاقته بالنموذج الأصلي نذكر أدناه النظريات التالية[1] :

النظرية رقم (1) إذا كان للنموذج المقابل حل أمثل معين، فإن لهذا الحل الأمثل صيغة حل آخر، أي بشكل عام لأي حل أمثل يكون ما يلي :

$$Z_m, X = F_{min}$$

النظرية رقم (2): إن القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية المتمثلة بالمرمز X^*_i الداخلة في صيغة النموذج المقابل تحدد مدى الزيادة القصوى لقيمة دالة الهدف في ظل النموذج الأصلي Z_{max} عندما يزداد المقدار b_i (الذي يمثل المحددات) بمقدار وحدة واحدة، أي أن :

$$u_i^* = \frac{\Delta Z_{max}}{\Delta b_i} \; (i = 1, 2, ..., m)$$

ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة أخرى كما يلي :

$$\Delta Z_{max} = u^*_i \, \Delta \, b_i$$

النظرية رقم (3): إذا كانت أحد قيود الحل الأمثل للنموذج الأصلي له علامة رياضية محددة بدون اختيار أي: أما < أكبر > أصغر، فإن المتغير الأساسي الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون مساوياً للصفر. أما إذا كان أحد المتغيرات في الحل الأمثل له قيمة موجبة أكبر من الصفر، فإن القيد المقابل له يكون له قيمة مساوية للصفر.

على سبيل المثال (وبالاعتماد على الجدول (3.6) إذا كان لدينا حل أمثل لنموذج بصيغته الأصلية، زمنية كان القيد التالي :

$$y_k^* = b_k - \left(a_{k1} X_1^* + a_{k2} X_2^* + ... + a_{kn} X_n^*\right) > 0$$

فإن قيمة المتغير الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون :

---

(1)D. Rogalskieg. Programowonic Liniowe-ALgorytmy izadania. UN, TODZ 1983 p. 64.

$$X_k^* = 0$$

أما إذا كان لدينا : $U^*_k\ 0$ فإن القيد المقابل له هو :

$$y_2^* = b_2 - \left(a_{11}\, X_1^* + a_{12}\, X_2^* + ... + a_{2n}\, X_n^*\right) = 0$$

إذا ظهر لدينا في نموذج معين بصيغته الأصلية اثنين من القيود علامة أحدهم أما ≤ أو ≥ وكانت علامة القيد الآخر هي التساوي (أي =) كما هو واضح في النموذج التالي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية التي $X_1, X_2, ...\ X_n$ تحقق الشروط التالية :

$$a_{i1}\, X_1 + a_{i2}\, X_2 + ... + a_{in}\, X_n \le b_i\ (i = 1, 2, ..., k)$$

$$a_{i1}\, X_1 + a_{i2}\, X_2 + ... + a_{in}\, X_n = b_i\ (i = k + 1, k + 2, ...m)$$

$$X_i \ge 0 \quad (i = 1,2, ..., n)$$

وتجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن ، أي :

$$Z = C_1\, X_1 + C_2 + ...\ C_n\, X_n \to Max$$

فإن صيغة النموذج المقابل هي كما يلي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية $u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m$ التي تحقق الشروط التالية :

$$a_{1j}\, u_1 + a_{2j}\, u_2 + ... + a_{mj}\, u_m \ge C_j\ (j = 1,2, ..., m)$$

$$u_i \ge 0\ (i = 1, 2, ...\ k)$$

وينبغي الإشارة هنا ، إنه إذا كانت علامة القيود في النموذج الأصلي متنوعة ، فيها علاقة التساوي (=) وعلاقة عدم التساوي (≤) أو (≥) فإن المتغيرات الأساسية في النموذج المقابل يمكن أن تكون قيمها مساوية إلى الصفر.

في الواقع العملي عندما يكون لدينا نموذج رياضي فيه قيود لها علاقة عدم المساواة (أي ≥) فإن حل هذا النموذج من خلال تحويله إلى النموذج المقابل يكون أكثر بساطة كما هو واضح في المثال أدناه.

مثال رقم (1):

في إحدى المنشآت الصناعية تتطلب العملية الإنتاجية فيها تشغيل العمال ثلاث وجبات عمل (أي 24 ساعة). إن الحاجة إلى عدد العمال خلال ساعات العمل اليومي تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول (4.6) بيانات المشكلة

عدد العمال المطلوب تشغيلهم	حدود ساعات العمل
15	1-5
30	5-9
26	9-13
32	13-17
30	17-21
19	21-1

إن عدد الساعات لوجبة العمل الواحدة تبلغ 8 ساعات. علماً بأن تبديل العمال يتم في الساعات: 21، 17، 13، 9، 5، 1

المطلوب هو:

أ- ما هو أقل عدد ممكن من العمال ينبغي تشغيلهم بما يضمن استمرارية العملية الإنتاجية.

ب- ما هي الخطة بموجبها تستطيع إدارة الأفراد تشغيل أقل عدد ممكن من العمال.

الحل:

نفرض أن X هو عدد العمال الذين يبدأون العمل في الخطوط الإنتاجية في كل ساعة تبديل كما يلي:

في ساعة التبديل 1 ← X_1

في ساعة التبديل 5 ← X_2

في ساعة التبديل 9 ← X_3

في ساعة التبديل 13 ← X_4

في ساعة التبديل 17 ← X_5

في ساعة التبديل 21 ← X_6

والمطلوب إن يتم ذلك باستخدام أقل عدد من العمال أي :

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \rightarrow Min$$

في ظل تحقق الشروط المستمدة من الجدول 2.28 هي :

$$\begin{array}{lr}
X_1 + X_2 & \geq 30 \\
X_2 + X_3 & \geq 26 \\
X_3 + X_4 & \geq 32 \\
X_4 + X_5 & \geq 30 \\
X_5 + X_6 & \geq 19 \\
X_1 \quad + X_6 & \geq 15
\end{array}$$

وكذلك الشروط التالية :

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0$$

يتم إدخال المتغيرات y_i حيث أن :

$$\begin{bmatrix} y_i \geq 0 \\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{bmatrix}$$

إلى القيود السابقة كما يلي :

$$\begin{array}{lr}
y_1 = X_1 + X_2 & -30 \geq 0 \\
y_2 = \quad X_2 + X_3 & -26 \geq 0 \\
y_3 = \quad X_3 + X_4 & -32 \geq 0 \\
y_4 = \quad X_4 + X_5 & -30 \geq 0 \\
y_5 = \quad X_5 + X_6 & -19 \geq 0 \\
y_5 = X1 \quad + & -15 \geq 0 \\
X_6 &
\end{array}$$

إن خطوات حل هذه المشكلة تكون أسهل فيما لو تم تحويـل النمـوذج أعـلاه إلى

الصيغة المقابلة وذلك كما يلي :

أوجد أعلى قيمة لدالة الهدف.

$$F = 30U_1 + 26U_2 + 32U_3 + 30U_4 + 19U_5 + 15U_6$$

مع تحقق الشروط التالية :

$$\begin{aligned}
&U_1 &&+U_6 \geq 1\\
&U_1 + U_2 &&\geq 1\\
&U_2 + U_3 &&\geq 1\\
&U_3 + U_4 &&\geq 1\\
&U_4 + U_5 &&\geq 1\\
&U_5 + U_6 &&\geq 1
\end{aligned}$$

وكذلك الشروط التالية :

يتم إدخال متغيرات جديدة هي g_i حيث أن : $\begin{bmatrix} g_i \geq 0 \\ i=1,2,3,4,5,6 \end{bmatrix}$ وذلك كالأتي :

$$\begin{aligned}
g_1 &= (-u_1) && +1(-u_6) + 1 \geq 0\\
g_2 &= 1(-u_1) + 1(-u_2) && +1 \geq 0\\
g_3 &= 1(-u_2) + 1(-u_3) && +1 \geq 0\\
g_4 &= 1(-u_3) + 1(-u_4) && +1 \geq 0\\
g_5 &= 1(-u_4) + 1(-u_5) && +1 \geq 0\\
g_6 &= 1(-u_5) + 1(-u_6) && +1 \geq 0
\end{aligned}$$

إن النموذج الرياضي بصيغته الأصلية والمقابلة يمهد لعملية الحل باستخدام الطريقة البسيطة Simplex method ، حيث أن حل أحد هذين النموذجين سوف يؤدي إلى الحصول على النتائج المطلوبة. ولو ثم حل فإن النتائج التي سوف يتم الحصول عليها هي كالآتي :

$$X_1 = 0, y_1 = 0, X_3 = 0, y_3 = 0, X_5 = 0, y_6 = 0$$

$$X_2 = 30, y_2 = 4, X_4 = 32, y_4 = 2, X_6 = 19, y_6 = 4$$

إن أقل قيمة لدالة الهدف Z تبلغ 81 استناداً إلى النظرية رقم (1):

$$Z_{max} = F_{min}$$

و

$$Z_{min} = F_{max}$$

فهو يعني أن أقل عدد ممكن في العمال ينبغي تشغيلهم هو 81 عامل. أما بالنسبة لخطة تشغيل العمال فإنها تكون كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال X_1 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال X_2 المطلوب تبديلهم = 30 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال X_3 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال X_4 المطلوب تبديلهم = 32 عامل.

5- في الساعة 17 يكون عدد العمال X_5 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال X_6 المطلوب تبديلهم = 19 عامل.

ويكون لدى إدارة الأفراد عدد من العمال كاحتياط وذلك كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال y_1 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال y_2 الاحتياط تبديلهم = 4 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال y_3 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال y_4 الاحتياط تبديلهم = 2 عامل.

5- 1- في الساعة 17 يكون عدد العمال y_5 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال y_6 الاحتياط تبديلهم = 4 عامل.

مثال رقم (2):

منشأة صناعية تملك ثلاثة خطوط إنتاجية، على أساسها يتم إنتاج أربعة أنوا من المنتجات، هي: A, B, C, D ساعات التشغيل القصوى المتاحة لكل خط من الخطوط الإنتاجية، مقدار ساعات العمل المطلوبة بكل 1000 وحدة من كل نوع من المنتجات

على أي خط من الخطوط الإنتاجية وربح الوحدة الواحدة المتوقع موضح في الجدول التالي :

جدول (5.6) بيانات المشكلة

ساعات التشغيل القصوى المتاحة ساعة / ماكنة	ساعات العمل المطلوب لكل 1000 وحدة من المنتجات ساعة/ماكنة				الخطوط الإنتاجية
	D	C	B	A	
87000	1	4	3	2	الخط الإنتاجي الأول
55000	2	5	1	1	الخط الإنتاجي الثاني
61000	1	2	1	3	الخط الإنتاجي الثالث
الربح المتوقع	8	20	9	17	

المطلوب:

أ- وضع خطة الإنتاج التي تؤدي إلى تحقيق أقصى عائد ربح ممكن.

ب- صياغة النموذج المقابل للنموذج الأصلي للمشكلة وحله.

الحل:

نفرض أن X هو رمز لكمية الإنتاج ، لذلك يكون لدينا :

$X_1 \rightarrow$ كمية الإنتاج من A

$X_2 \rightarrow$ كمية الإنتاج من B

$X_3 \rightarrow$ كمية الإنتاج من C

$X_4 \rightarrow$ كمية الإنتاج من D

إن المطلوب هو تحديد قيمة المتغيرات الأساسية X1, X2, X3, X4 التي تجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن أي :

$$Z = 17X_1 + 8X_2 + 20X_3 + 8X_4 \rightarrow Max$$

وذلك في ظل الشروط التالية :

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 1X_4 \leq 87000$$

$$1X_1 + 1X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 55000$$

$$3X_1 + 1X_2 + 2X_3 + 1X_4 \leq 61000$$

وكذلك الشروط المنطقية :

$$X1 \geq 0, X2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

إن حل هذا النموذج باستخدام الطريقة البسيطة (Simplex) للإنتاج والتي هي :

- كمية الإنتاج من A : $X_1 \rightarrow 12000$ وحدة
- كمية الإنتاج من B : $X_2 \rightarrow 13000$ وحدة
- كمية الإنتاج من C : $X_3 \rightarrow 6000$ وحدة
- كمية الإنتاج من D : $X_4 \rightarrow 0$

إذا تم اتخاذ القرار باعتماد هذه الخطة ، فإن في ظل الخطة سوف تكون الأرباح القصوى 441000 دينار.

إن النموذج المقابل يمكن صياغته كما يلي :

المطلوب تحديد رقم للمؤشرات u3, u2, u1 التي تمثل كفاءة الخطوط الإنتاجية في تحقيق الإيرادات للمنشآت وذلك في ظل تحقق الشروط التالية :

$$2u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 17$$

$$3u_1 + u_2 + u_3 \geq 19$$

$$4u_1 + 5u_2 + 2u_3 \geq 20$$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 8$$

وكذلك الشروط المنطقية

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن ، أي :

$$F = 87u_1 + 55u_2 + 61u_3 \rightarrow Min$$

إن حل هذه المشكلة باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex) يؤدي إلى الحصول على النتائج التالية :

$$u_1 = \frac{26}{25}, \; u_2 = \frac{34}{25}, \; u_3 = \frac{113}{25}$$

بموجب هذه النتائج يعني ، أن إدارة الإنتاج في المنشآت المذكورة ، إذا قررت اعتماد خطة الإنتاج الواردة ، فإن مقابل كل 1000 ساعة عمل تشتغل فيها الخطوط الإنتاجية الثلاث يتم بلوغ مستويات كفاءة في تحقيق الإيرادات كما يلي :

- بالنسبة للخط الإنتاجي الأول $\frac{26}{25}$ دينار
- بالنسبة للخط الإنتاجي الثاني $\frac{34}{25}$ دينار
- بالنسبة للخط الإنتاج الثالث $\frac{113}{25}$ دينار

من مصلحة متخذ القرار في المنشآت زيادة وقت تشغيل الخط الإنتاجي الثالث لكونه يحقق أكبر نسبة من الإيرادات ، وفي ظل هذه المؤشرات تكون تكاليف تشغيل الخطوط الإنتاجية الثلاث كما يلي :

$$F_{min} = 87000. \frac{26}{25} + 55000. \frac{34}{25} + 61000. \frac{113}{25}$$

$F_{min} = 44100$ دينار

2.6 النموذج الرياضي الذي تكون فيه دالة الهدف (Z) هي دالة المتغير آخر في النموذج:

في الواقع العملي يمكن أن يواجه متخذ القرار في المنشآة (وبالذات الإنتاجية) مشاكل تتسم بطابع التغير في وحدة الزمن - حيث قد تظهر هذه المشاكل على مستوى المنشآة بشكل عام ، أو في كل وظيفة من وظائفها الخمس المعروفة (الإنتاج ، التسويق ، المالية ، الأفراد ، المخازن). وعلى أساس ذلك فإن اتخاذ القرار الأمثل يتطلب صياغة النموذج الرياضي بما يتلائم وصفة التغير المذكورة. وبعبارة أخرى يجري تحوير أحد مكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية (دالة الهدف ، القيود الأساسية ، قيود اللاسلبية ، المتغيرات والعوامل) بالشكل الذي يستوعب صفة التغيير المشار إليها.

لتوضيح هذه الفكرة نذكر أدناه الصيغة العامة لمعادلة دالة الهدف ، التي هي :