جامعة حماه - كلية الهندسة المدنية - السنة الثالثة – الفصل الثاني 2019-2020

مقرر ميكانيك الإنشاءات (2) - المحاضرة (3) :

طريقة مصفوفة القساوة لتحليل الجمل الإنشائية

د. لجين المحمد

طريقة مصفوفة القساوة لتحليل الجمل الإنشائي

تعد طريقة مصفوفة القساوة هي الطريقة الأكثر استخداماً للتحليل الإنشائي، نظراً لملاءمتها للبرمجة على الحاسب.

حيث أن المجاهيل المستخدمة في الحل لهذه الطريقة هي الانتقالات العقدية لمختلف عناصر المنشأ، والتي تكون محددة بشكل واضح وصريح لكل نوع من المنشآت.

إن عدد الانتقالات المجهولة في المنشأ تساوي إلى درجة عدم التقرير الحركي والتي تتعلق بالشكل الهندسي للمشأ، وشكل الاستناد، وطبيعة التشوهات المعتبرة في الحل (تشوهات محورية، تشوهات انعطاف ، ..).

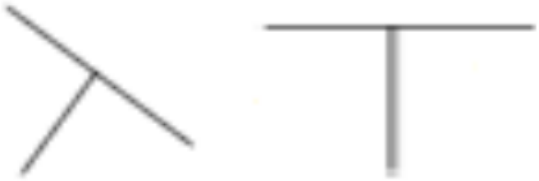
مفهوم القساوة

بفرض لدينا نابضين، الأول طبقنا عليه حمولة $P=100kN$ أدت إلى انتقال $\delta=1$ ، والثاني طبقنا حمولة مقدارها $P=150kN$ أدت إلى انتقال $\delta=1$ ، فنقول إن النابض الثاني أكثر قساوة من النابض الأول لأنه احتاج إلى قوة أكبر لانزياحه بالمقدار نفسه، ونقول بأن النابض الأول أكثر مرونة.

عندما نطبق قوة نحصل على انزياح وعندما نطبق عزم نحصل على دوران

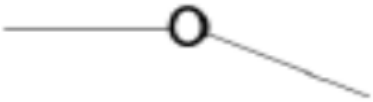
بالتالي نعرف القساوة الانتقالية بأنها القوة اللازمة لإحداث انتقال واحدي، ونعرف القساوة الدورانية بأنها العزم اللازم تطبيقه لإحداث دوران واحدي أي (1Rad)

أنواع العقد



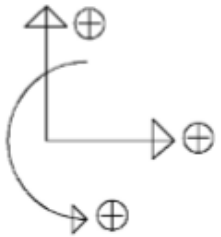
العقدة الصلبة وهي العقدة التي تبقى الزاوية بين عناصرها ثابتة بعد التشوه، أي الدوران يمين العقدة يساوي الدوران يسار العقدة.

العقدة المفصلية: هي العقدة التي تتغير الزوايا بين عناصرها بعد التشوه، وفيها عدد الدورانات يساوي عدد العناصر الملتقية بالعقدة.



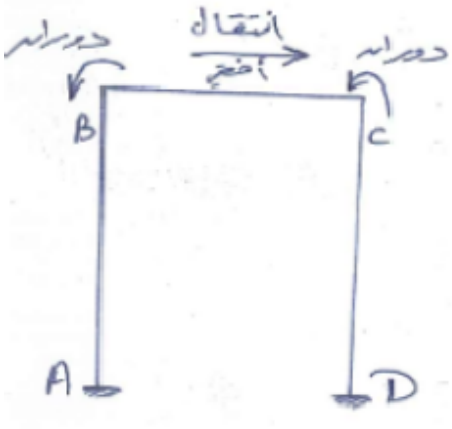
لكل عقدة في المستوي ثلاث درجات حرية : انتقالين في المستوي ودوران حول المحور المعامد لهذا المستوي.

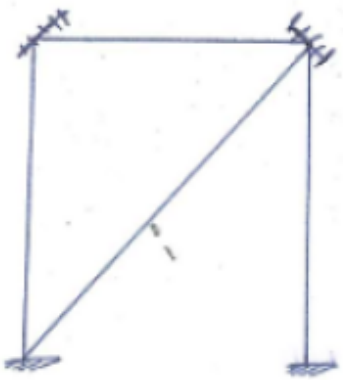
اصطلاح الإشارة بالشكل:



المنشآت المقيدة

هي المنشآت المقررة حركياً التي لا تملك أية إمكانية للحركة (كل عقد المنشأ غير قابلة للحركة).





لمنع الانتقال الأفقي نضع قيد أحادي بالاتجاه الأفقي، ولمنع الانتقال الشاقولي نضع قيد أحادي شاقولي، ولمنع الدوران نضع وثاقة في العقدة. كما في الجملة المبينة بالشكل:

ونقول عن عقدة أنها ثابتة إذا ارتبطت بعقدتين ثابتتين عن طريق عنصرين ليسا على استقامة واحدة

المجاهيل المستقلة خطياُ

هي الانتقالات التي تكون في عقد لا تمنع حدوثها، أي نهمل المجهول المستقل خطياً لأنه انتقال أو دوران لايسبب تشوه الجملة وبالتالي لا يؤدي إلى حدوث عزم. والمجاهيل المستقلة خطياً هي:

1- الدوران في المساند الطرفية.

2- الدوران والانتقال المتعامد للطرف الحر.

3- دوران المفاصل الداخلية.

درجة عدم التقرير الحركي

وتحسب بعد إهمال التشوهات المحورية والمجاهيل المستقلة خطياً مع الانتباه إلى أن الجوائز الشبكية لاتهمل فيها التشوهات المحورية لأن عناصرها تعمل على الضغط والشد، أما في المنشآت الإطارية فيمكن إهمال التشوهات المحورية، وتكون درجة عدم التقرير الحركي مساوية إلى عدد الانزياحات والدورانات لعقد المنشأ.

$$n = n1 + n2$$

طريقة مصفوفة القساوة

في طريقة المرونة : معادلة توافق الانتقالات تكتب بالشكل:

$$\{\delta_{io}\}+[F].\{x\}=\{\delta_i\} \Rightarrow \{\delta_{io}-\delta_i\}=[F].\{x\} \Rightarrow \{\delta\}=[F].\{x\}$$

$$\Rightarrow \{x\}=\frac{1}{[F]}.\{\delta\} \Rightarrow \{P\}=[K].\{\delta\}$$

$$\{P\}=\{P_i-P_r\} \Rightarrow \{P_i\}=\{P_r\}+[K].\{\delta\} \Rightarrow \{P_i\}=\{P_r\}+[K].\{x\}$$

$\{P_i\}$: شعاع القوى المطبقة في العقد باتجاه المجاهيل الحركية في الجملة المقيدة.

$\{P_r\}$: القوى العقدية باتجاه المجاهيل الحركية والناتجة عن الحمولات بين العقد في الجملة المقيدة.

$[K]$: مصفوفة قساوة المنشأ وتتضمن عوامل القساوة وهي الانتقالات الناتجة عن تطبيق حمولات واحدية باتجاه المجاهيل الحركية.

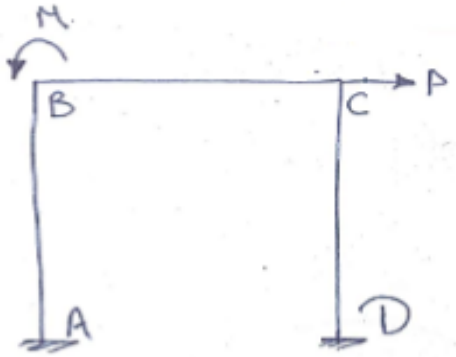
$\{x\}$: شعاع المجاهيل الحركية ويساوي عددها إلى درجة عدم التقرير الحركي للجملة.

خطوات تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة

1- تحديد درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ n .

2- تقييد الجملة وتحديد شعاع المجاهيل الحركية : $\{x\}$.

3- تحديد شعاع الأحمال الخارجية المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية المدروسة $\{P_i\}$. وللتوضيح مثلاً لدينا الإطار المبين جانباً:



$$\{x\}=\begin{Bmatrix}\theta_B\\ \theta_C\\ \Delta_{BC}\end{Bmatrix} \quad \{P_i\}=\begin{Bmatrix}M_B\\ 0\\ P\end{Bmatrix}$$

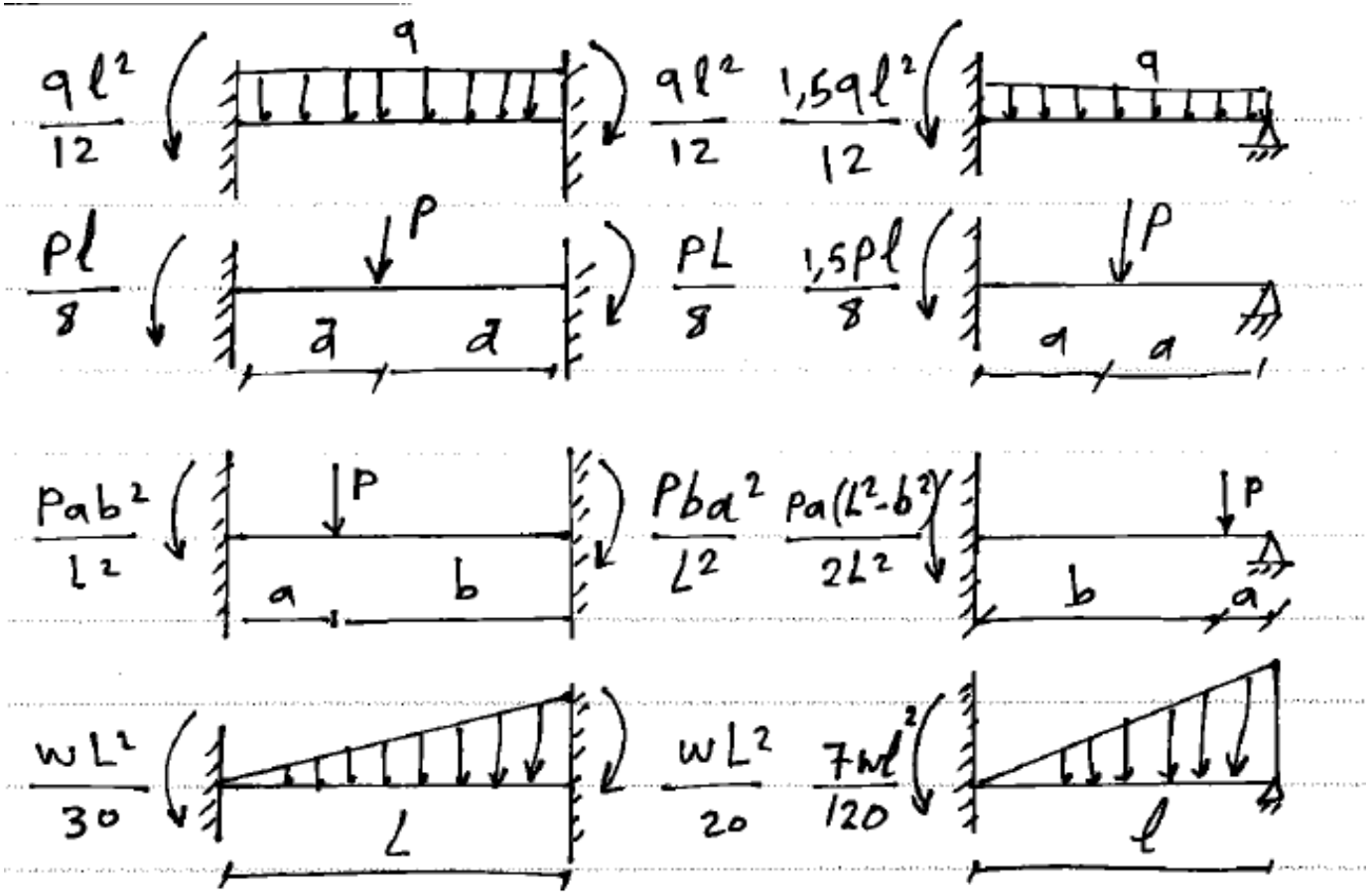
أي أن:

القوة الخارجية المطبقة باتجاه المجهول الحركي الأول θ_B هو عزم مطبق في العقدة وجهته بعكس عقارب الساعة فهو موجب. ولا يوجد عزم باتجاه المجهول الثاني ، وباتجاه الانزياح (المجهول الثالث) توجد القوة P وجهتها لليمين فهي موجبة.

4- حساب شعاع ردود الأفعال باتجاه المجاهيل الحركية الناجم عن الحمولات بين العقد $\{P_r\}$

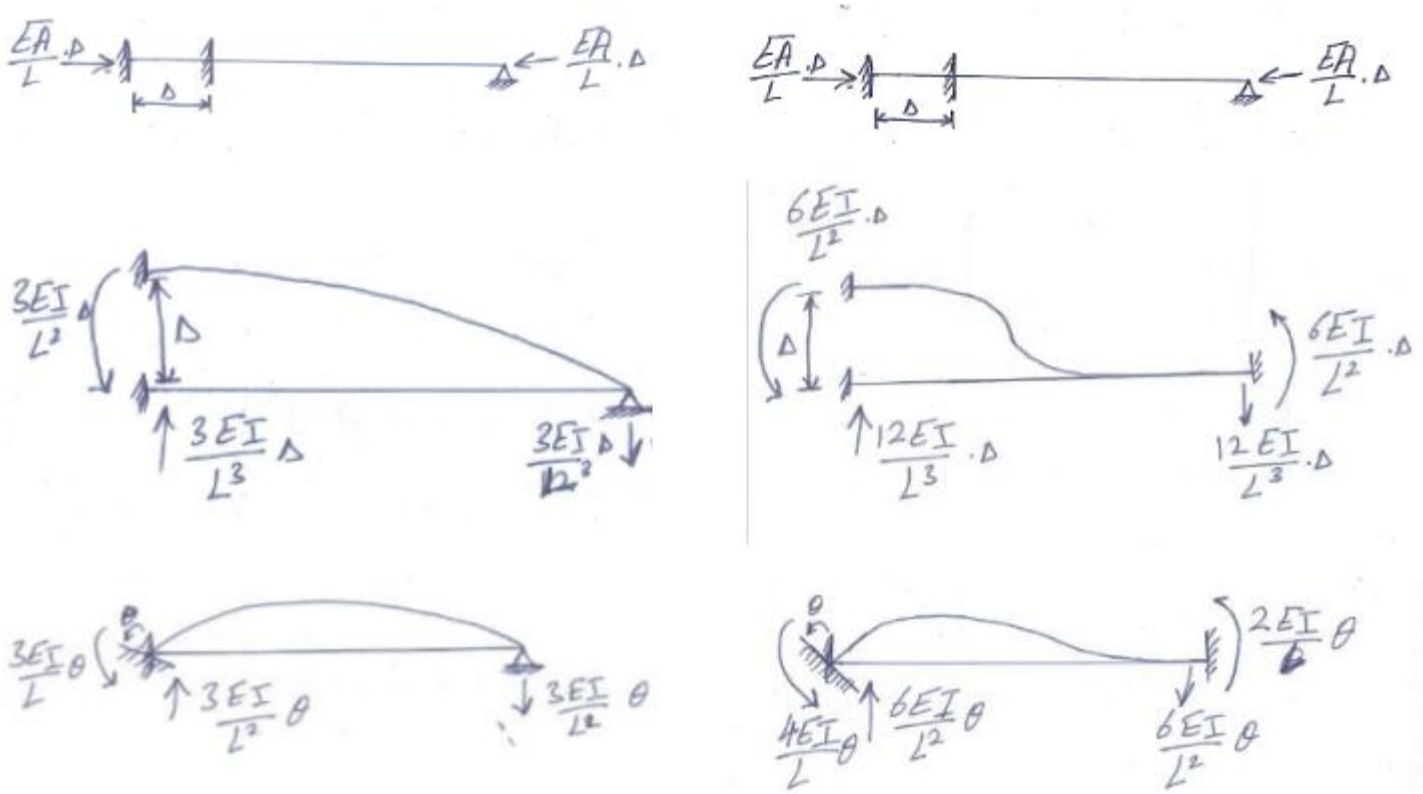
وفيما يلي نورد ردود الأفعال في العقد نتيجة الحمولات بين العقد لأشهر الحالات:

خطوات تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة



خطوات تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة

5-حساب عوامل القساوة K_{ij} للمنشأ والتي تساوي إلى رد الفعل المتولد باتجاه المجهول الحركي x_i نتيجة واحدة الانتقالات باتجاه المجهول x_j وبتكرار هذه العملية على كامل المجاهيل الحركية المعتبرة نحصل على مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ. ونورد فيما يلي الحالات التي سنواجهها:



خطوات تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة

6- باستخدام مبدأ جمع الآثار يمكن التعبير عن معادلات التوازن في عقد المنشأ بالعلاقة:

$$\{P_i\} = \{P_r\} + [K].\{x\}$$

7- تعيين ردود الأفعال $\{R\}$ في المنشأ المدروس وفق العلاقة: $\{R\} = \{R_r\} + [r].\{x\}$

$\{R_r\}$: شعاع ردود الأفعال المطلوبة في الجملة المقيدة نتيجة تطبيق الأحمال بين العقد.

$[r]$: مصفوفة ردود الأفعال غي الجملة المقيدة نتيجة واحدة الانتقالات باتجاه المجاهيل الحركية.

8- تعيين القوى الداخلية $\{Q\}$ في أي نقطة من نقاط المنشأ وفق العلاقة: $\{Q\} = \{Q_r\} + [q].\{x\}$

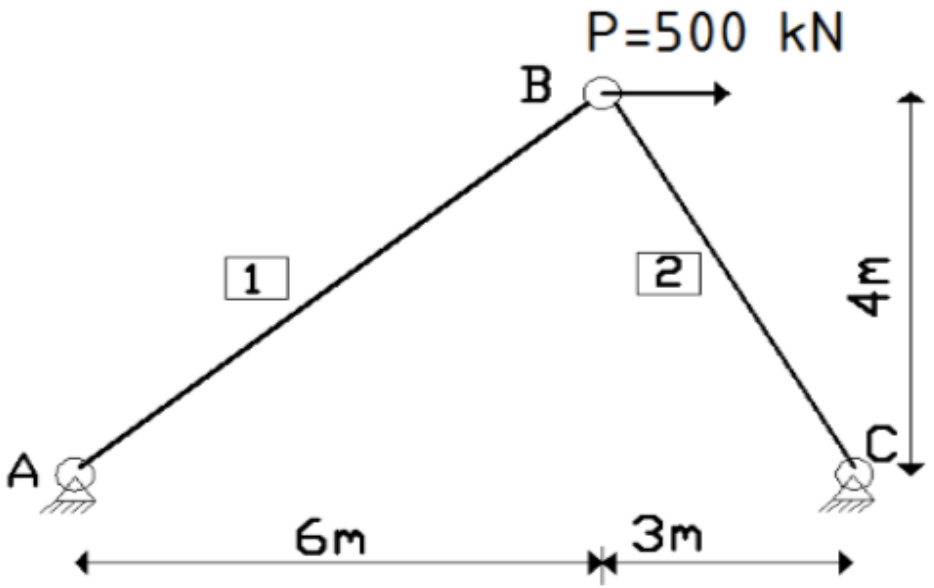
$\{Q_r\}$: شعاع القوى الداخلية المطلوبة المتولدة في الجملة المقيدة نتيجة تطبيق الأحمال بين العقد.

$[q]$: مصفوفة القوى الداخلية المتولدة في الجملة المقيدة والناتجة عن واحدة الانتقالات باتجاه المجاهيل الحركية.

مقارنة خطوات التحليل بين طريقتي مصفوفة الليونة والقساوة

خطوات الحل	طريقة مصفوفة الليونة	طريقة مصفوفة الصلابة
1	تحديد درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ	تحديد درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ
2	تقرير المنشأ سكونياً بإزالة القيود الفائضة عن معادلات التوازن	تقرير المنشأ حركياً باستخدام قيود إضافية لمنع الانتقالات المجهولة
3	ترقيم القوى الفائضة $\{x\}$	ترقيم الانتقالات المجهولة $\{x\}$
4	تعيين الانتقالات المقررة الموافقة للقوى الفائضة المجهولة $\{\delta_{io}\}$	تعيين ردود أفعال القيود المضافة نتيجة الأحمال المطبقة بين العقد $\{P_r\}$
5	استخراج مصفوفة الليونة $[F]$ للمنشأ وشعاع الانتقالات المفروضة $\{\delta_s\}$	استخراج مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ وشعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$
6	تعيين القوى الفائضة من خلال تطبيق معادلات التوافق للمنشأ: $\{\delta_s\}=\{\delta_{io}\}+[F].\{x\}$	تعيين الانتقالات المجهولة من خلال تطبيق معادلات التوازن للمنشأ: $\{P\}=\{P_r\}+[K].\{x\}$
7	تعيين ردود الأفعال المجهولة: $\{R\}=\{R_0\}+[r].\{x\}$	تعيين ردود الأفعال المجهولة: $\{R\}=\{R_r\}+[r]\{x\}$
8	تعيين القوى الداخلية المجهولة: $\{Q\}=\{Q_0\}+[q].\{x\}$	تعيين القوى الداخلية المجهولة: $\{Q\}=\{Q_r\}+[q].\{x\}$

مثال (1): تطبيق على طريقة مصفوفة القساوة في التحليل الإنشائي:



للمنشأ الشبكي المبين بالشكل وبطريقة مصفوفة القساوة يطلب إيجاد الانتقال الكلي في العقدة B ، كما يطلب إيجاد القوى الداخلية في عناصر الجائز علماً أن:

$$E = 2\times10^5\ N/mm^2$$
$$A_1 = 6000\ mm^2$$
$$A_2 = 8000\ mm^2$$

الحل: نوجد أطوال وزوايا ميل العناصر:

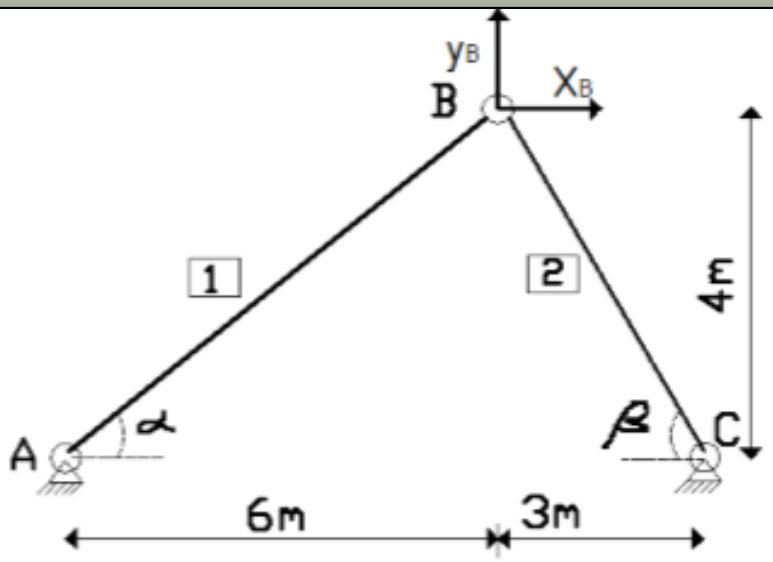
العنصر 1:

$$E = 2\times10^5\ N/mm^2$$
$$A_1 = 6000\ mm^2$$
$$L = 7.2111\,m\ ,\ \alpha = 33.69^o$$
$$\cos\alpha = 0.832\ \ ,\sin\alpha = 0.555$$

العنصر 2:

$$E = 2\times10^5\ N/mm^2$$
$$A_1 = 8000\ mm^2$$
$$L = 5\,m\ ,\ \beta = 53.13^o$$
$$\cos\beta = 0.0.6\ \ ,\sin\beta = 0.8$$

مثال (2): تطبيق على طريقة مصفوفة القساوة في التحليل الإنشائي:



التحليل بطريقة مصفوفة القساوة يتم وفق الخطوات التالية:

1- تحديد المجاهيل الحركية (درجة عدم التقرير الحركي):

المجاهيل الحركية هي الانتقالات في العقدة B.

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_B\\Y_B\end{Bmatrix}$$

2-شعاع الاحمال الخارجية المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية المدروسة: $\{P\}=\begin{Bmatrix}500\\0\end{Bmatrix}$

3- شعاع ردود الأفعال الناتجة عن الأحمال الخارجية في الجملة المقيدة : $\{P_r\}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$.

4- نكتب معادلة التوازن: $\{P\}=\{P_r\}+[K].\{x\}$

5- نوجد عناصر مصفوفة القساوة: $[K]_{2\times2}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}$:

المجهول الحركي الأول: $X_B = 1$

1- العنصر (1):

القوة المحورية : $\frac{EA}{l}.c = \frac{200\times 6000}{7211.1}\times 0.832 = 138.45kN$

المسقط باتجاه المجهول الأول (وفق المحور X):

$$\frac{EA}{l}.c^2 = \frac{200\times 6000}{7211.1}\times 0.832^2 = 115.193kN$$

المسقط باتجاه المجهول الثاني (وفق المحور Y):

$$\frac{EA}{l}.c.s = \frac{200\times 6000}{7211.1}\times 0.832\times 0.555 = 76.84kN$$

2- العنصر (2):

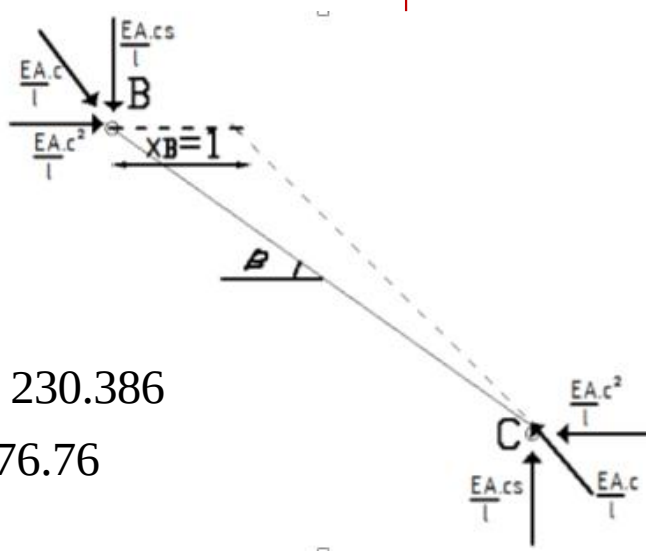
القوة المحورية : $\frac{EA}{l}.c = \frac{200\times 8000}{5000}\times 0.6 = 192kN$

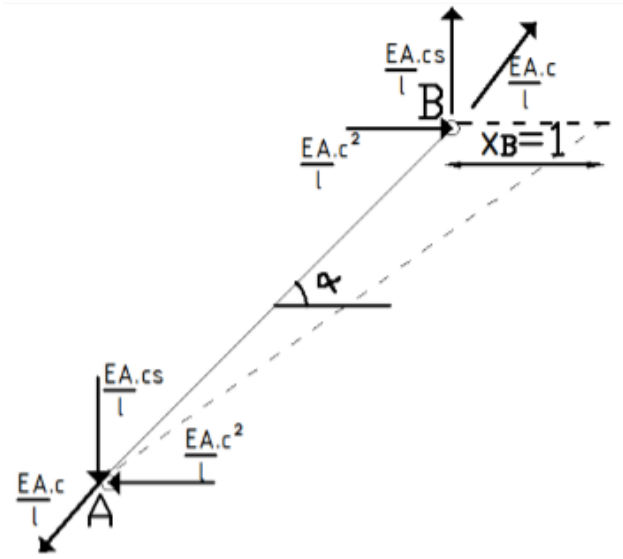
المسقط باتجاه المجهول الأول (وفق المحور X):

$$\frac{EA}{l}.c^2 = \frac{200\times 8000}{5000}\times 0.6^2 = 115.2kN$$

المسقط باتجاه المجهول الثاني (وفق المحور Y):

$$\frac{EA}{l}.c.s = \frac{200\times 8000}{5000}\times 0.6\times 0.8 = 153.6kN$$





$$\Rightarrow k_{11} = 115.193 + 115.2 = 230.386$$

$$k_{21} = 76.84 - 153.6 = -76.76$$

المجهول الحركي الثاني : $Y_B = 1$

العنصر (1):

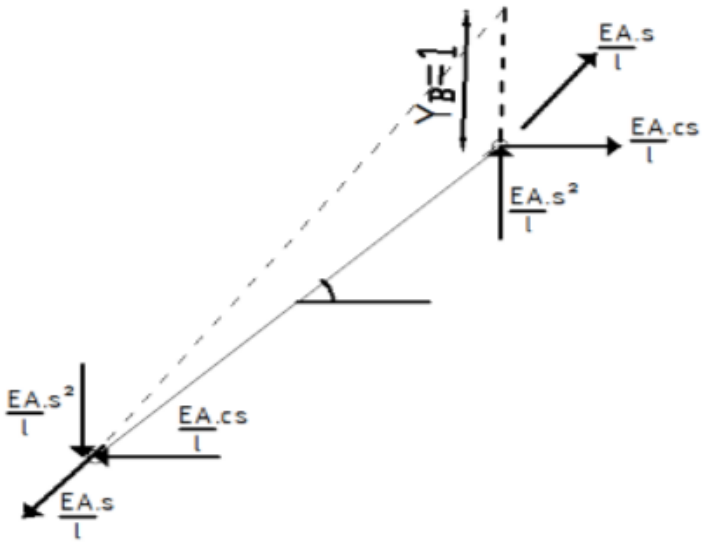
القوة المحورية : $\frac{EA}{l}.s = 92.357kN$

المسقط باتجاه المجهول الأول (وفق المحور X):

$\frac{EA}{l}.c.s = 76..841kN$

المسقط باتجاه المجهول الثاني (وفق المحور Y):

$\frac{EA}{l}.s^2 = 51.258kN$



العنصر (2):

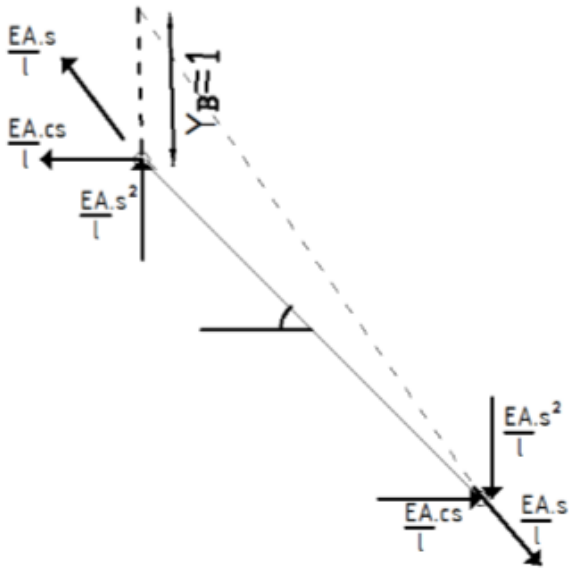
القوة المحورية : $256\ kN$

المسقط باتجاه المجهول الأول : $153.6\,kN$

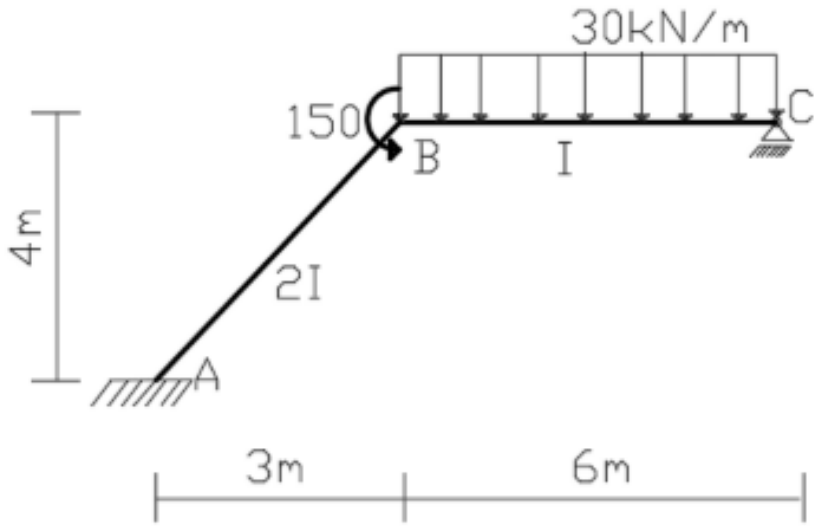
المسقط باتجاه المجهول الثاني: $204.8\,kN$

$$\Rightarrow k_{12} = -153.6 + 76.841 = -76.76 = k_{21}$$

$$k_{22} = 51.258 + 204.8 = 256.058$$



مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:



للمنشأ الإطاري المبين بالشكل، يطلب إيجاد قيم المجاهيل الحركية في العقدة B، بإهمال التشوهات المحورية في العناصر الإطارية، ثم إيجاد قيم ردود الأفعال في الوثاقة A والمسند C وذلك باستخدام طريقة مصفوفة القساوة.

الحل:

1- تحديد درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ n.

N=n1+n2=2 وهي الدوران في العقدة B والانزياح في المنسوب BC.

يمكن حساب درجة عدم التقرير الحركي للإطار باستخدام العلاقة: $n=3k-(r+R+m)=3*3-(4+2+1)=2$

K : عدد العقد الكلية ، r: عدد القيود الخارجية ، R : عدد العناصر التي أهملت تشوهاتها المحورية

M: عدد المجاهيل المستقلة خطيا وهنا لدينا مسند طرفي

2- تقييد الجملة وتحديد شعاع المجاهيل الحركية: $\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_B\\\delta_{BC}\end{Bmatrix}$.

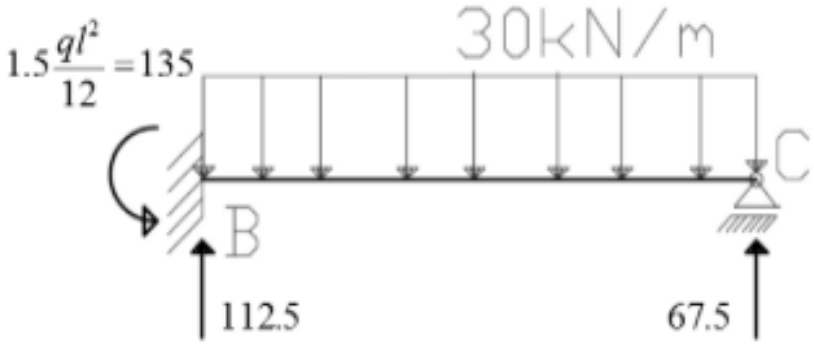
مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:

3- تحديد شعاع الأحمال الخارجية $\{P_i\}$ المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية مع مراعاة اصطلاح الإشارة :

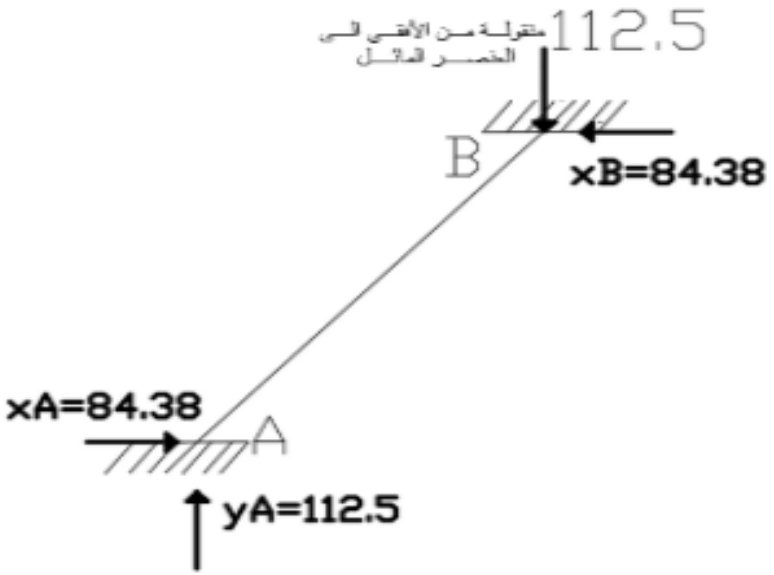
$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix}+150\\0\end{Bmatrix}$$

4- حساب شعاع ردود الأفعال باتجاه المجاهيل الحركية الناجم عن الحمولات بين العقد $\{P_r\}$

العنصر BC :



العنصر AB:



$$\Rightarrow \{P_r\}=\begin{Bmatrix}+135\\-84.38\end{Bmatrix}$$

مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:

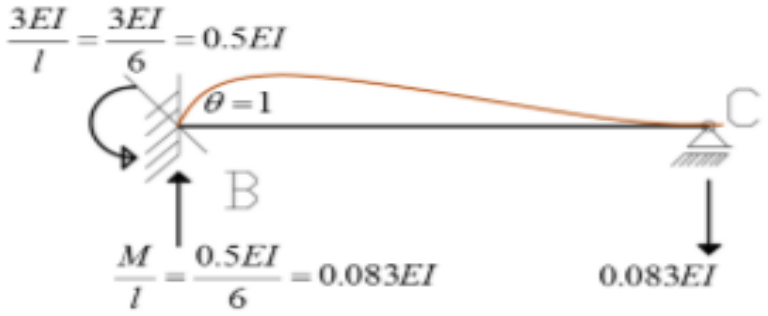
5-حساب عوامل القساوة K_{ii} للمنشأ:

عدد مراحل هذه الخطوة بعدد المجاهيل وفي كل مرحلة نعطي المجهول الحركي قيمة واحدية وندرس تشوه المنشأ ونوجد عوامل القساوة أي القوى الناتجة باتجاه المجاهيل الحركية:

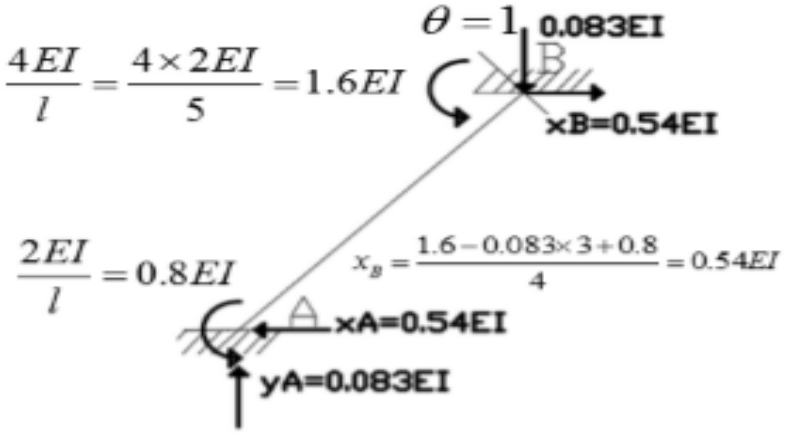
المجهول الحركي الأول: θ_B

نعطي دوران للعقدة B دوران واحدي وندرس العناصر التي تتشوه نتيجة الدوران

العنصر BC :



العنصر AB:

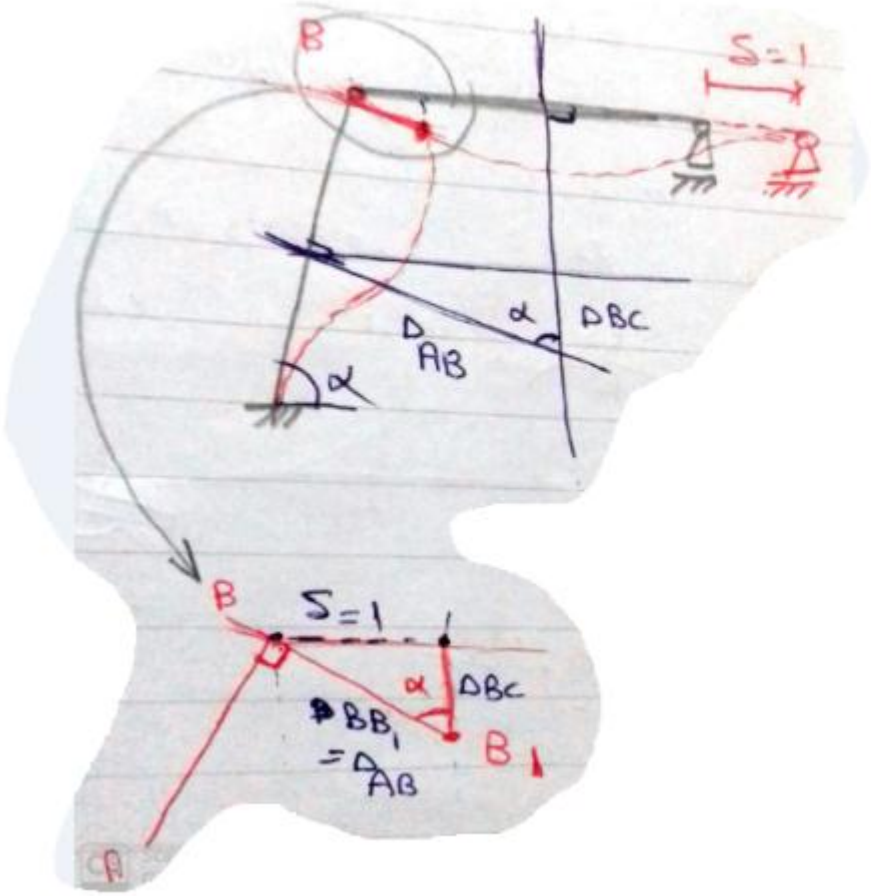


$k_{11}=0.5EI+1.6EI=2.1EI$ العزم في B نتيجة الدوران الواحدي للعقدة B.

$k_{21}=0.54EI$ القوة الأفقية في منحى BC نتيجة الدوران الواحدي للعقدة B.

مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:

$k_{21} = 0.54EI$ القوة الأفقية في منحى BC نتيجة الدوران الواحدي للعقدة B.



المجهول الحركي الثاني: δ_{BC}

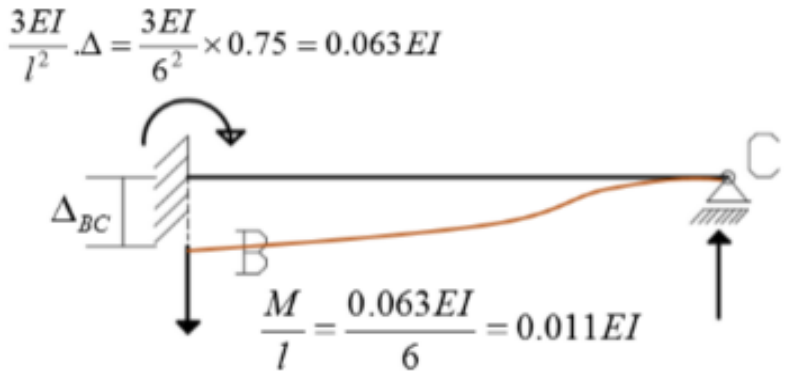
نعطي المنشأ انتقال $\delta_{BC} = 1$ وندرس العناصر التي تتشوه نتيجة هذا الانتقال:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\Delta_{AB}} = \frac{1}{BB_1} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{\Delta_{AB}} \Rightarrow \Delta_{AB} = 1.25$$

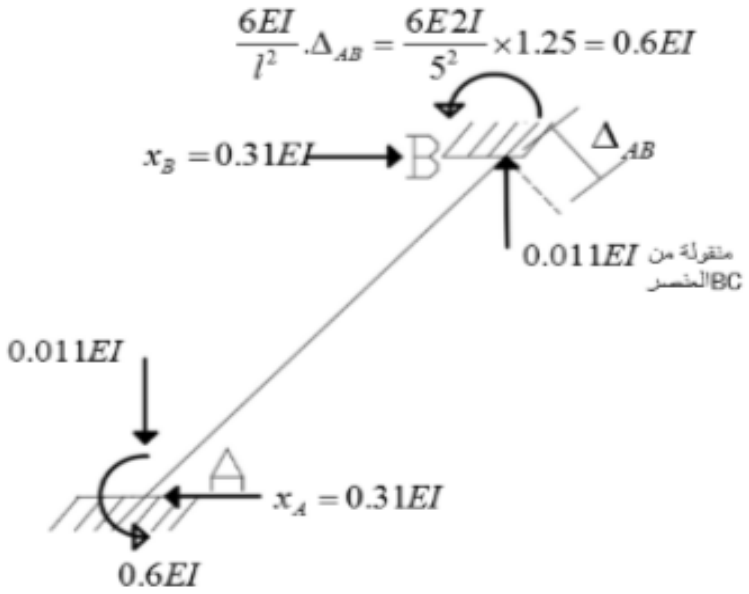
$$tg\alpha = \frac{1}{\Delta_{BC}} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\Delta_{BC}} \Rightarrow \Delta_{BC} = 0.75$$

مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:

العنصر BC :



العنصر AB:



$k_{12} = 0.6EI - 0.063EI = 0.54EI = k_{21}$ العزم في B نتيجة الانتقال الواحدي $\delta_{BC} = 1$.

$k_{22} = 0.31EI$ القوة الأفقية في منحى BC نتيجة الانتقال الواحدي $\delta_{BC} = 1$.

$$\Rightarrow [K] = EI \begin{bmatrix} 2.1 & 0.54 \\ 0.54 & 0.31 \end{bmatrix}$$

مثال (2): إطار يحوي عنصر مائل:

6- باستخدام مبدأ جمع الآثار يمكن التعبير عن معادلات التوازن في عقد المنشأ بالعلاقة:

$$\{P_i\}=\{P_r\}+[K].\{x\}$$

$$\begin{Bmatrix}150\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}135\\-84.38\end{Bmatrix}+EI\begin{bmatrix}2.1 & 0.54\\0.54 & 0.31\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\theta_B\\\delta_{BC}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\theta_B\\\delta_{BC}\end{Bmatrix}=\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-113.84 & Rad\\470.5 & m\end{Bmatrix}$$

7- تعيين ردود الأفعال $\{R\}$ في المنشأ المدروس وفق العلاقة: $\{R\}=\{R_r\}+[r]\{x\}$

$$\begin{Bmatrix}x_A\\y_A\\M_A\\y_C\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}84.38\\112.5\\0\\67.5\end{Bmatrix}+EI\begin{bmatrix}-.54 & -0.31\\0.083 & -0.011\\0.8 & 0.6\\-0.083 & 0.011\end{bmatrix}.\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-113.84\\470.5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_A\\y_A\\M_A\\y_C\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\97.88\ kN\\191.23\ kN.m\\82.12\ kN\end{Bmatrix}$$

يمكن التحقق من الحل بمعادلات التوازن للمنشأ ككل

تذكر دوماً: القوة الشاقولية على عنصر مائل تنشأ عنها قوة أفقية حتى يتوازن المنشأ.

الأسئلة النظرية (3):

1- اشرح خطوات تحليل المنشآت باستخدام طريقة مصفوفة القساوة (الصلابة).

2- قارن بين طريقتي مصفوفة القساوة والليونة لتحليل الجمل الإنشائية.

==========

THANK YOU