(5)

[1] أ. آلاء الطالب

- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

مقدمة -

تعريف 1: ليكن A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ و X متجه مغاير للصفر n مركبة. ندعو X المتجه الذي يحقق المعادلة المصفوفية.

$$AX = \lambda X$$

أي: $AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$

بالمتجه الذاتي للمصفوفة A، ونسمي λ (قد يكون عدد حقيقي أو عقدي) بالقيمة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للمتجه X.

مثال 1: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ فإن: $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

في هذه الحالة المتجه X هو متجه ذاتي للمصفوفة A موافق للقيمة الذاتية λ.

* لحساب المتجهات والقيم الذاتية الموافقة لمصفوفة مربعة:

إن المتجه الذاتي لمصفوفة مربعة A من المرتبة $n \times n$ حسب التعريف: هو متجه مغاير للصفر $X \neq 0$ من n مركبة ويحقق المعادلة $AX = \lambda X$ التي تكافئ المعادلة المتجانسة

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad \cdots \quad *$$

حيث I مصفوفة واحدية من المرتبة $n \times n$

إن * جملة معادلات خطية متجانسة مجاهيلها هي مركبات المتجه الذاتي $X \neq 0$ والشرط اللازم والكافي ليكون لها حل غير الحل الصفري هو أن يكون محدد أمثالها مساوياً للصفر أي:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

تعريف 2: نسمي المعادلة $\det(A - \lambda I) = 0$ بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وهي معادلة من الدرجة n بالمتغير λ، بحلها نحصل على جذور المعادلة المميزة $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ وهي القيم الذاتية للمصفوفة A

⊛ نسمي عادة مجموعة القيم الذاتية $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ طيف المصفوفة A

⊛ ندعو كثير الحدود $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ بكثير الحدود المميز، وهو كثير حدود من الدرجة n بالمتغير λ.

نتائج ١) إن للمصفوفة المربعة من المرتبة n ، n قيمة ذاتية $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$
يمكن أن تكون مختلفة فيما بينها أو أن يكون لبعضها مضاعفاً عدداً من المرات.

٢) إن جذور المعادلة المميزة (القيم الذاتية) يمكن أن تكون حقيقية أو عقدية وبناءً على ذلك تكون مركبات المتجهات الذاتية حقيقية أو عقدية.

٣) يوجد مقابل كل قيمة ذاتية λ للمصفوفة A عدد غير منته من المتجهات الذاتية المرتبطة بها والمتعلقة بثابت اختياري واحد أو أكثر وذلك لأن للمعادلة المتجانسة
* عدداً لانهائياً من الحلول عندما يكون محدد أمثالها معدوماً

مثال ② أوجد القيم الذاتية للمصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ثم عين المتجهات الذاتية الموافقة لها.

الحل . نكتب أولاً المعادلة المميزة للمصفوفة A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

إما $\lambda - 3 = 0$ ونجد القيمة الذاتية $\lambda_1 = 3$

أو $\lambda - 2 = 0$ ~ ~ $\lambda_2 = 2$

* ولإيجاد المتجهات الذاتية نكتب جملة المعادلات المكافئة المصفوفية

$$(A - \lambda I) . X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \quad \text{---}(1)$$
$$-2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0$$

نعوض القيمة الذاتية الأولى $\lambda_1 = 3$ في (1) فنجد

$$x_2 = 2x_1 \Leftarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

أي $X(\lambda_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ حيث x_1 قيمة اختيارية و $X(\lambda_1)$ المتجه الذاتي الموافق لـ λ_1.

نعوض القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = 2$ في (1) نجد

$$x_1 = x_2 \Leftarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

إذن $X(\lambda_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و x_1 قيمة اختيارية.

و $X(\lambda_2)$ هو المتجه الذاتي الموافق لـ λ_2.

مثال 3: عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية الموافقة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: نكتب المعادلة المميزة لـ A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 5 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

إما $\lambda - 1 = 0 \Leftarrow \lambda_1 = 1$

أو $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ وله القيمتين الذاتيتين المترافقتين $\lambda_{2,3} = 1 \mp 2i$

⊕ لإيجاد المتجهات الذاتية نكتب جملة المعادلات المكافئة للمعادلة المصفوفية *

$$(A - \lambda I) . X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 5 & 5 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

نعوض القيمة الأولى: $\lambda_1 = 1$ في الجملة السابقة

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

إذا اعتبرنا $x_1 = 1$ الوسيط: يكون

$X(\lambda_1) = (1, -1, 0)$ الموافق لـ $\lambda_1 = 1$

نعوض القيمة الثانية: $\lambda_2 = 1 + 2i$ في الجملة:

$$\begin{cases} (1-2i)x_1 + x_2 = 0 \\ -2ix_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - (1-2i)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (2i-1)x_1 \\ x_3 = (4+2i)x_1 \end{cases}$$

إذا اعتبرنا $x_1 = 1$ يكون

$X(\lambda_2) = (1, 2i-1, 4+2i)$ الموافق لـ λ_2

نعوض القيمة الذاتية الثالثة : $\lambda_3 = 1-2i$ في الجملة الناتجة :

$$(1+2i)x_1 + x_2 = 0$$
$$2i\,x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = -(1+2i)x_1 \\ x_3 = (4-2i)x_1 \end{cases}$$
$$5x_1 + 5x_2 - (1-2i)x_3 = 0$$

اذا وضعنا $x_1 = 1$ يكون $X(\lambda_3) = (1, -1-2i, 4-2i)$ المرافق لـ λ_3

مثال 4 عين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل : لنوجد المعادلة المميزة لـ A ،

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0$$

نلاحظ أن $\lambda = 1$ جذر لها نقسم على $(\lambda - 1)$ فنجد

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 10)(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0$$

أي أن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$

والمتجهات الذاتية المقابلة لها نوجدها كما يلي : نكتب جملة المعادلات المكافئة المصفوفية *

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + (5-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

من اجل $\lambda_3 = 10$ نعوض في (1) فنجد

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

و هي تكافئ الجملة المدرجة المختزلة:

$$\sim \begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$X(\lambda_3 = 10) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو المتجه الذاتي الموافق لـ $\lambda_3 = 10$.

ومن اجل $\lambda_{1,2} = 1$ نجد:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right.$$

باعتبار x_1 و x_2 وسيطان نجد:

$$X(\lambda_{1,2} = 1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة.

إن العبارات التالية متكافئة:

① المصفوفة $A_{n \times n}$ شاذة ($|A| = 0$)

② $\lambda = 0$ قيمة ذاتية لـ A

③ المعامل الثابت في كثير الحدود المميز $f(\lambda)$ لـ A يساوي الصفر.

نتيجة.

A غير شاذة $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ يوجد مقلوب للمصفوفة $A \Leftrightarrow \lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية لـ $A \Leftrightarrow$ المعامل الثابت في $f(\lambda)$ لا يساوي الصفر.

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة غير شاذة و لمقلوبها ولمصفوفة القوى

مبرهنة. اذا كانت λ قيمة ذاتية لمصفوفة غير شاذة A و X المتجه الذاتي الموافق لها فان λ^m هي القيمة الذاتية للمصفوفة A^m و X المتجه الذاتي المقابل. (m عدد صحيح)

* كذلك في حالة $m=-1$ (λ^{-1} هي القيمة الذاتية لمقلوب المصفوفة A (A^{-1}))

مثال 5: وجدنا في مثال 4 ان القيمتين $\{\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=10\}$ هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A لذلك القيمتان $\{(\lambda_{1,2})^3=1, (\lambda_3)^3=10^3\}$ حسب المبرهنة السابقة هما القيمتان الذاتيتان لمصفوفة القوة A^3

وكذلك الأمر المتجهان الذاتيان $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ الموافقان للقيمة الذاتية المضاعفة $\lambda_{1,2}=1$ هما نفسهما المتجهان الذاتيان لـ A^3 الموافقان للقيمة الذاتية المضاعفة $(\lambda_{1,2})^3=1$ وبأسلوب مشابه، ان المتجه الذاتي $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ لـ A الموافق لـ $\lambda=10$ هو نفسه المتجه الذاتي لـ A^3 الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_3^3=1000$.

تمرين: أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من مصفوفة القوى A^7 والمصفوفة المعاكسة A^{-1} للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مبرهنة: كايلي - هاملتون:

اذا كانت A مصفوفة رتبتها n ومعادلتها المميزة هي $\det(A-\lambda I)=0$ فان A تحقق المعادلة المميزة.

نتيجة. نستنتج من مبرهنة كايلي - هاملتون طريقة جديدة لحساب معكوس مصفوفة غير شاذة. كما في المثال التالي.

مثال 6: أوجد معكوس المصفوفة التالية اعتماداً على مبرهنة (كايلي - هاملتون)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ان المعادلة المميزة لـ A هي

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

ان A تحقق المعادلة السابقة حسب مبرهنة كايلي هاملتون اي

$$* \quad A^3-7A^2+11A-5I=0$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية بـ A^{-1} نجد

$$A^2-7A+11I-5A^{-1}=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}A^2-\frac{7}{5}A+\frac{11}{5}I=\frac{1}{5}\left[A^2-7A+11I\right]$$

نحسب

$$A^2=\begin{bmatrix}7&12&6\\6&13&6\\6&12&7\end{bmatrix}$$

والتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}7&12&6\\6&13&6\\6&12&7\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-2&-1\\-1&3&-1\\-1&-2&4\end{bmatrix}$$

ملاحظة . ويمكننا حساب قوى مصفوفة مربعة بدلالة القوى الأدنى من مرتبة المصفوفة .

في المثال السابق اذا طلب حساب A^5 مثلاً:

من المعادلة المميزة نجد

$$** \quad A^3=7A^2-11A+5I$$

نضرب بـ A ونعوض قيمة A^3 من **

$$A^4=7A^3-11A^2+5A$$
$$=7(7A^2-11A+5I)-11A^2+5A$$
$$=49A^2-77A+35I-11A^2+5A$$

$$A^4=38A^2-72A+35I$$

ثم نتابع ونضرب بـ A ونعوض قيمة A^3 من **

$$A^5=38A^3-72A^2+35A$$
$$=38(7A^2-11A+5I)-72A^2+35A$$

$$A^5 = 266A^2 - 418A + 190I - 72A^2 + 35A$$

$$A^5 = 194A^2 - 383A + 190I$$

نعوض عن قيم كل من I و A و A^2 ونحسب A^5

تمرين ١ : أوجد A^{-1} , A^5 للمصفوفة A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$$

تمرين ٢ : أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية الموافقة لكل من المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$