جُمل المعادلات الخطية

مفاهيم أساسية وتعريفات :

إن الشكل العام لجملة معادلات خطية غير متجانسة مؤلفة من m معادلة و n مجهولاً $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n قد تساوي m أو تختلف عنه) هو :

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

تسمى الأعداد $\{a_{ij}\}$ ، $(i = 1, \dots m ; j = 1, 2, \dots n)$ أمثال أو معاملات الجملة ،

وتسمى المقادير $b_1, b_2, \dots b_m$ الثوابت الحرة

إذا كانت المقادير الحرة جميعها معدومة فإننا نسمي الجملة جملة متجانسة.

تعريف : حل جملة المعادلات (*) (الحل المشترك) هو مرتب من n عدداً $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ يحقق جميع المعادلات عند التعويض. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

لتسهيل حل جملة المعادلات الخطية (*) نكتب هذه الجملة بالشكل المصفوفي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أو بالشكل المختصر

$$AX = B \quad (**)$$

حيث :

مصفوفة الأمثال $A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{bmatrix}$ ، مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

مصفوفة المجاهيل $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. المصفوفة الموسعة $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ يمكن تشكيل

حل جملة المعادلات الخطية (*)

لحل جملة المعادلات الخطية (*) نشكل المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ ثم نجري عليها بعض التحويلات الأولية للحصول على مصفوفة مدرجة ومن خلالها نعرف رتبة كلاً من المصفوفتين A و $\tilde{A}$ وعندها:

① إذا كانت $r(\tilde{A}) > r(A)$ فإن (*) مستحيلة الحل.

② إذا كانت $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ فإن (*) تقبل حلاً وحيداً. (n عدد المجاهيل)

③ إذا كانت $r(\tilde{A}) = r(A) \neq n$ فإن (*) تقبل عدداً لانهائياً من الحلول وعدد المجاهيل الاختيارية $r - n$.

أمثلة.

1 أوجد الحل العام لجملة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

الحل. نشكل المصفوفة الموسعة ونجري عليها التحويلات الأولية

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & 11 \end{array}\right] -R_2 + R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

عدد المجاهيل $n = 3$

و $r(A) = 2$ ، $r(\tilde{A}) = 3$

وبالتالي $r(\tilde{A}) > r(A)$ أي أن جملة المعادلات الخطية المكافئة للجملة المعطاة:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ -5x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 0 &= 5 \quad \text{(مستحيلة الحل)} \end{aligned}$$

أي أن جملة المعادلات المعطاة مستحيلة الحل.

2 أثبت أن جملة المعادلات الخطية التالية لا تملك حلولاً:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3

2| أوجد الحل لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25$$

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة ونجري عليها التحويلات الأولية

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right] -4R_2+R_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] -\frac{1}{8}R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ وبالتالي للجملة حل وحيد لا وحيد.

إن جملة المعادلات الخطية المكافئة لجملة المعطاة والموافقة للمصفوفة الموسعة الأخيرة الناتجة عن التحويلات الأولية:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$$
$$-3x_2 - 2x_3 = 11$$
$$x_3 = -1$$

من المعادلة الأخيرة لدينا $x_3 = -1$ نعوض في الثانية فنجد $x_2 = -3$ ومن ثم نعوض في الأولى فنجد $x_1 = 2$ وتكون عبارة الحل العام

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3| أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4$$

[4]

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} -R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \\ -2R_1+R_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_2+R_3 \\ R_2+R_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن $r(\tilde{A}) = r(A) = 2 \neq n = 4$ وبالتالي فإن جملة المعادلات تملك عدداً لا نهائياً من الحلول. وعدد المجاهيل الاختيارية $n - r = 4 - 2 = 2$

إن جملة المعادلات الخطية الكافئة للجملة المعطاة هي

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$
$$x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2$$

لكن المجاهيل الاختيارية هي x_3 و x_4 وبالتالي من المعادلة الثانية نجد

$$x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$$

نعوض في الأولى فنجد أن

$$x_1 + 20x_3 - 34x_4 - 4 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$
$$x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5$$

وبالتالي فإن عبارة الحل العام:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17x_3 + 29x_4 + 5 \\ 10x_3 - 17x_4 - 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17x_3 \\ 10x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29x_4 \\ -17x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = x_3 \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 29 \\ -17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

5

تمرين : أوجد عبارة الحل العام إن وجد لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 \quad\quad - x_4 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

تذكير: نقول عن جملة المعادلات * أنها متجانسة إذا كان $B = 0$ مصفوفة الثوابت

$$A \cdot X = 0$$

نلاحظ هنا أن $r(\tilde{A}) = r(A)$ كانت جملة المعادلات الخطية المتجانسة تقبل حلاً دائماً (إما وحيداً أو عدد لانهائي من الحلول):

← إذا كانت $r(A) = n$ فإن الجملة تقبل حلاً وحيداً وهو الحل الصفري

إذا كانت $r(A) < n$ " " " عدداً لانهائياً من الحلول بالإضافة للحل الصفري

(n عدد المجاهيل).

مثال 4 : حل جملة المعادلات الخطية التالية إن أمكن:

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

الحل بما أن الجملة متجانسة، نجري تحويلات أولية على مصفوفة الأمثال لحساب رتبتها

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \\ -R_1 + R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -11 & 8 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -C_2 \\ \longrightarrow \\ -C_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -11 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4R_2 + R_3 \\ \longrightarrow \\ \frac{3}{2}R_2 + R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3 + R_4} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $r(A) = 3 = n$ أي أن جملة المعادلات الخطية المتجانسة المعطاة تقبل حلاً وحيداً هو الحل الصفري.

مثال 5: حل جملة المعادلات الخطية التالية إن أمكن:

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل: بما أن الحلة متجانسة نجري التحويلات الأولية على مصفوفة المثال لحساب رتبتها:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1+R_2 \\ R_1+R_3 \\ \longrightarrow \\ 5R_1+R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -18 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3R_2+R_3 \\ -9R_2+R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $r(A) = 2 < n = 3$ أي أن جملة المعادلات الخطية المتجانسة المعطاة تملك عدداً لا نهائياً من الحلول. لإيجادها نكتب الجملة المكافئة

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$3-2=1$ (وسيط واحد ولكن x_3)

من المعادلة الثانية نجد $x_2 = x_3$ نعوض في الأولى

$$-x_1 - 3x_3 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 = 0$$

وبالتالي نضع عبارة الحل العام

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

تمرين: حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

المصفوفة المدرجة :

هي المصفوفة التي يزايد عدد الأصفار السابقة لأول عنصر غير صفري في كل سطر غير من سطر لآخر ، ويسمى العنصر الأول غير الصفري في كل سطر عنصراً مميزاً.

مثال. ان المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{5} & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مدرجة عدد عناصرها المميزة 3 (وهي : 1، 5، 9)

ملاحظات : 1) تتجمع جميع الأسطر الصفرية المدرجة في الأسفل .

2) العنصر المميز في سطر ما يقع إلى يسار العنصر المميز في السطر الذي يليه .

نتيجة : إن رتبة المصفوفة المدرجة تساوي عدد عناصرها المميزة .

* في المثال السابق : فإن أكبر محدد غير معدوم هو المحدد المثلثي من الرتبة الثالثة التالي

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 9 = 45 \neq 0$$

وذلك لأن جميع المحددات من الرتبة الرابعة معدومة بسبب وجود سطر صفري فيها

وهذا يعني أن $r(A)=3$ (عدد العناصر المميزة) .

مبرهنة . ان اجراء تحويلات أولية على أسطر (أعمدة) مصفوفة A

اذا كان $A \sim B$ فإن : $r(A) = r(B)$

مثال أوجد رتبة المصفوفة A التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2R_1+R_2 \\ 2R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -R_3+R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2\leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا حصلنا على المصفوفة المدرجة المكافئة لـ A عدد عناصرها المميزة ثلاثة وعليه فإن $r(A)=3$.

تمرين: أوجد رتبة المصفوفة A و B

$$A=\begin{bmatrix}1&5&-2&3&4\\3&4&-1&5&-2\\2&-1&1&2&3\\3&-7&4&1&-7\\0&11&-5&4&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-5&-8&1&3\\3&1&-3&-5&1\\1&0&-7&2&-5\\0&11&20&-9&2\end{bmatrix}$$

تمارين عامة حول المصفوفات والمحددات.

تمرين 1: اذا كانت $A(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ أثبت أن: $A(\alpha).A(\beta)=A(\beta).A(\alpha)=A(\alpha+\beta)$

واستنتج أن $A^2(\alpha)=A(2\alpha)$

تمرين 2: اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$ أثبت أن $A^2-5A+2I=0$.

تمرين 3: إذا كانت $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x&-\sin x&0\\\sin x&\cos x&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ عندئذ أثبت أن

1) $f(x).f(-x)=I$

2) $f(x).f(y)=f(x+y)$

تمرين 4: باستخدام خواص المحددات احسب قيم المحددات الآتية:

1) $\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\a&a^2&1\\a^2&1&a\end{vmatrix}$

تمرين 4. حل المعادلة التالية:

$$\begin{vmatrix}x-2&2x-3&3x-4\\x-4&2x-9&3x-16\\x-8&2x-27&3x-64\end{vmatrix}=0$$

تمرين 5: أوجد قيم المتحولين x و y إذا كان

$$\begin{vmatrix}x&-3i&1\\y&1&i\\0&2i&-1\end{vmatrix}=6+11i$$