أ. آلاء الطايع

حالات خاصة :

1- معكوس مصفوفة من الرتبة الثانية :

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

يتم الحصول على معكوس مصفوفة غير شاذة من الرتبة الثانية مباشرة بتبديل موضعي عنصري القطر الرئيسي وتغيير إشارة عنصري القطر الثانوي ثم نضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب محددها .

2- معكوس المصفوفة القطرية

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة قطرية (غير شاذة) نحصل عليه بقلب عناصر القطر الرئيسي .

* خواص المصفوفة المعاكسة :

1) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A\cdot B)^{-1} = (B^{-1}\cdot A^{-1})$

4) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

تمرين 1 : أوجد X من المعادلة : $A^2X + B = D$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

الجواب :

$$X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

العمليات البسيطة (الأولية) على المصفوفات .

وجدنا انه عند اجراء بعض العمليات على أسطر (أعمدة) المحدد يسهل حساب قيمة المحدد .
سنرى في هذه الفقرة عمليات مماثلة نجريها على أسطر (أعمدة) المصفوفات، لتسهل
العمل عليها ولاسيما عند ايجاد معكوسها (مقلوبها) أو رتبتها ..
لكن يجب الانتباه إلى ان أي عملية تجرى على المصفوفة ستغيرها تماماً، على خلاف
المحددات التي لا تتغير قيمتها عند اجراء بعض العمليات على أسطرها او أعمدتها .

واما هذه العمليات فهي :

1- cR_i $(c \neq 0)$: ضرب جميع عناصر السطر i بعدد ثابت .

2- $-R_j + R_i$ طرح سطر j من سطر آخر i

3- $R_i \leftrightarrow R_j$ التبديل بين موضعي السطرين i و j

4- $cR_j + R_i$ ضرب السطر j بعدد ثابت واضافته إلى السطر i

*) $R_j + cR_i$ " " i بعدد ثابت ثم اضافة السطر j إليه)

تعريف المصفوفتان المتكافئتان سطرياً :
نقول ان المصفوفتين A و B أنهما متكافئتان سطرياً (عمودياً) اذا نتجت
إحداهما عن الأخرى باجراء سلسلة منتهية من العمليات الأولية على أسطرها (أعمدتها)
ونكتب $A \sim B$

مثال ① حول المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ إلى المصفوفة الواحدية I

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\overset{-R_1+R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \overset{-2R_2+R_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-R_2+R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-3R_3+R_2}{\overset{+2R_3+R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقلوب مصفوفة باستخدام المصفوفة الموسعة :

مبرهنة : لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، يُراد حساب مقلوبها ، ولنشكل المصفوفة الموسعة المستطيلة $[A \mid I]$ ، حيث I مصفوفة واحدية من المرتبة n إذا أجرينا سلسلة منتهية من العمليات البسيطة على $[A \mid I]$ وحصلنا على مصفوفة من الشكل $[I \mid B]$ ، فإن B هي مقلوب المصفوفة A .

بمعنى أنه إذا كان $[A \mid I] = [I \mid B]$ فإن $B = A^{-1}$

مثال② أوجد مقلوب المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : نشكل المصفوفة الموسعة $[A \mid I]$ ثم نجري العمليات البسيطة اللازمة.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-5R_1+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{-\frac{1}{4}R_3}{\overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{-R_3+R_1}{\overset{-\frac{3}{2}R_3+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\overset{-R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

ومنه نجد :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

تمرين : أوجد مقلوب المصفوفات بطريقة التحويلات الأولية

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة ١: ان تطبيق طريقة التحويلات الاولية (المصفوفة الموسعة)
لايجاد مقلوب مصفوفة يتم فقط باجراء التحويلات (العمليات) على الاسطر دون الاعمدة

٢) اذا توصلنا من المصفوفة A وفق سلسلة منتهية من التحويلات الى مصفوفة تحوي على الاقل سطراً جميع عناصره معدومة فاننا نتوقف عند هذا الحد من التحويلات ونستنتج ان A مصفوفة شاذة . أي ليس لها معكوس .

مثال ③ : أوجد مقلوب المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ (إن وجد)

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, I]$ ونجري عليها العمليات البسيطة ..

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

نتوقف عند هذا الحد وبهذا تكون المصفوفة A شاذة ليس لها معكوس.

مثال ④ : أوجد حل المعادلة المصفوفية التالية : $A \, . \, X = B$

حيث $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

الحل: لحل هذه المعادلة يجب ان تكون المصفوفة A غير شاذة أي لها معكوس A^{-1}
وعندها يكون الحل يعطى بالعلاقة التالية $X = A^{-1}.B$

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{2R_2+R_3 \\ -R_2}]{2R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & +2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}R_3+R_2 \\ -\frac{1}{4}R_3}]{-\frac{1}{4}R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/4 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$= [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

ومنه نجد أن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/4 & 3/2 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/4 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي :

$$X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -7/4 & 3/2 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/4 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين 2 احسب محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ثم أوجد مقلوبها باستخدام المصفوفة المـ ثم استنتج حل المعادلة المصفوفية $A.X = B$ من أجل المصفوفة B في المثال 4

تمرين 3: نفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة. مقلوبها

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة X التي تحقق:

$$A . X . A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين 4: عين a و b لتكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حلا للمعادلة المصفوفية

$$X^2 + aX + bI = 0$$

تمرين 5: أوجد حل المعادلة المصفوفية $X . A = B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

تمرين 6: اذا كانت A, B مصفوفتين من المرتبة الثالثة ، $\det A = 2$ و $\det B = -3$

أوجد قيمة كل من المقادير:

$$\det(3A^3 . B^{-3})$$

$$\det((A^T)^3 . B^{-1})$$

مثال (5): أوجد معكوس المصفوفة الغير الشاذة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا علمت أنها تحقق المعادلة التالية:

$$* \quad A^3 - 8A^2 + 17A - 10I = 0$$

الحل: بما أن المصفوفة غير شاذة فإن لها معكوس A^{-1}

نضرب طرفي المعادلة * بـ A^{-1} فنجد

$$A^{-1}(A^3 - 8A^2 + 17A - 10I) = 0$$

$$A^2 - 8A + 17I - 10A^{-1} = 0$$

$$10A^{-1} = A^2 - 8A + 17I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 - 8A + 17I)$$

نقوم بحساب A^2 وتعويضه ونعوض A و I في المعادلة السابقة فنجد

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}^2 - \frac{8}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \frac{17}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -39 & 7 & 18 \\ -30 & 12 & 13 \end{bmatrix} - \frac{8}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \frac{17}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10-32+17 & 6-16 & -6+16 \\ -39+40 & 7-24+17 & 18-16 \\ -30+16 & 12-32 & 13-8+17 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & -10 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ -14 & -20 & 22 \end{bmatrix}$$

رتبة مصفوفة.

تعريف صغير مصفوفة من المرتبة k:

إن صغير مصفوفة A_{nm} من المرتبة k هو المحدد الناتج من العناصر الواقعة على تقاطع k مستقيماً شاقولياً و k مستقيماً أفقياً مرسومة على أسطر وأعمدة هذه المصفوفة A_{nm}

مثال. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & I_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & I_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & I_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & I_4 \end{bmatrix}$$

إذا ركنا على سطرين (2 و 3 مثلاً) وعمودين (2 و 4 مثلاً) من المصفوفة السابقة فنحصل على صغير المصفوفة A من المرتبة الثانية وهو

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

مبرهنة. إن عدد الصغائر من المرتبة k التي يمكن تشكيلها من المصفوفة A_{nm} هو

$$C_k^n \cdot C_k^m = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

نتيجة: علك المصفوفة A_{nm} صغائر من مراتب مختلفة.

صغائر المصفوفة A من المرتبة الأولى هي عناصر المصفوفة A

وأكبر مرتبة لصغير هي مرتبة أكبر محدد يمكن تشكيله من المصفوفة A_{nm}

وهي أصغر العددين n, m

مثال. إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد عدد الصغائر من المرتبة الأولى والثانية والثالثة ثم عين الصغائر من المرتبة الثالثة.

الحل.

عدد الصغائر من المرتبة 1 $= C_1^3 C_1^4 = 3 \times 4 = 12$

2 " " " $= C_2^3 C_2^4 = \frac{3 \times 2}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 18$

3 " " " $= C_3^3 C_3^4 = \frac{3 \times 2}{3 \times 2} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$

الصغائر من المرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

رتبة مصفوفة ، $rank(A)$ ، $r(A)$

إن رتبة مصفوفة A هي مرتبة أكبر صغير لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

أمثلة: ① ماهي رتبة المصفوفة : $A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

نلاحظ وجود صغيرين فقط من المرتبة الثانية وهما معدومان وهذا يعني أن $r(A_1)<2$

ويوجد صغير واحد من المرتبة الأولى مغاير للصفر وهو $1\neq 0$

إذاً $r(A)=1$

② أوجد رتبة المصفوفة: $A_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$

نلاحظ أن جميع الصغائر من المرتبة الثانية والثالثة معدومة لوجود سطرين فيها متناسبين ولذلك $r(A_2)<2$ ونلاحظ وجود صغير من المرتبة الأولى مثل $2\neq 0$ وبالتالي $r(A_2)=1$

③ ماهي رتبة المصفوفة : $A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\3&2&1&0\\0&0&5&0\\4&4&4&0\end{bmatrix}$

نلاحظ أن الصغير الوحيد من المرتبة الرابعة الذي يمكن تشكيله من المصفوفة A هو محدد المصفوفة A ذاتها، وهو يساوي الصفر لوجود عمود صفري، إذاً $r(A)<4$

لذلك نبحث عن صغير من مرتبة أقل مغاير للصفر، ولكن

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&0&5\end{vmatrix}=-20\neq 0$$

إذاً $r(A)=3$

④ ماهي رتبة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}9&0&3\\3&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

نلاحظ وجود صغير من المرتبة الأولى مغاير للصفر مثل $9\neq 0$ إذاً $r\geq 1$

ننتقل إلى الصغائر من المرتبة الثانية فنجد صغيراً من المرتبة الثانية مغايراً للصفر

مثلاً $\begin{vmatrix}9&0\\3&2\end{vmatrix}=18\neq 0$ إذاً $r\geq 2$ ننتقل إلى صغائر المرتبة الثالثة فنجد أن

الصغير الوحيد هو $\begin{vmatrix}9&0&3\\3&2&1\\0&1&0\end{vmatrix}=0$ إذاً مرتبة أكبر صغير مغاير للصفر هي 2 وهي

رتبة هذه المصفوفة، أي: $r=2$