أ. الاء الطالب

* المحددات *

- المحددات من المرتبة الثانية :

نسمي الكائن الرياضي : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدداً أو معيناً من المرتبة الثانية ،

ونسمي $ad - bc$ قيمة أو مفكوك ذلك المحدد ونكتب

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- إن إيجاد قيمة المحدد نسميه نشراً له. ونسمي a,b,c,d عناصر المحدد
- a,b عنصرا السطر الأول ، c,d عنصرا السطر الثاني .
- a,c عنصرا العمود الأول ، b,d عنصرا العمود الثاني.
- a,d عنصرا القطر الرئيسي ، b,c عنصرا القطر الثانوي .

مثال١ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3(-1) = 13$$

مثال٢ . أوجد قيمة x التي تعدم المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x-6 \\ 1 & x^2-6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow x(x^2-6) - (x-6) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x - x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 7x - 6 = 0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2) = 0$$

اذن قيم x التي تعدم المحدد هي : $x = -3, 1, 2$

- المحددات من المرتبة الثالثة :

استناداً لتعريف المحددات من المرتبة الثانية : نسمي الكائن الرياضي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

محدداً من المرتبة الثالثة والمؤلف من ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة وقيمته يساوي

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_1 c_2 b_3 + b_1 a_2 c_3 + c_1 b_2 a_3)$$

نسمي a_1, b_2, c_3 عناصر القطر الرئيسي و c_1, b_2, a_3 عناصر القطر الثانوي .

طريقة ساروس : (طريقة ثانية لفك محدد من المرتبة الثالثة).

نكتب على يمين المحدد المطلوب نشره عمودين آخرين هما العمود الأول والثاني على النحو التالي :

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|$$

بأخذ المجموع الجبري لجداءات العناصر الثلاثة المتوضعة على القطر الرئيسي والقطرين الموازيين له ثم نطرح منه الجداء الجبري لجداءات العناصر الثلاثة المتوضعة على القطر الثانوي والقطرين الموازيين له اذاً

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_1c_2b_3 + b_1a_2c_3 + c_1b_2a_3)$$

مثال 3 : أوجد فكوك المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$\Delta = [1(-2)(2) + 2(1)(1) - 3(-1)(1)] - [(-3)(-2)(1) + 1(1)(1) + 2(-1)(2)]$$

$$= [-4 + 2 + 3] - [6 + 1 - 4] = 1 - 3 = -2$$

تمرين 1 . احسب فكوك المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\Delta = -4)$$

تمرين 2 : أوجد قيمة الوسيط β التي تعدم المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \beta \end{vmatrix} \qquad (\beta = 5)$$

تعريفات :

١- صغير عنصر : ان صغير العنصر a_{ij} في محدد Δ هو المحدد الناتج من حذف سطر وعمود العنصر a_{ij} (أي حذف السطر i والعمود j) ونرمز له بالرمز $M(a_{ij})$

مثال ٩ : احسب صغائر العناصر a_{21} ، a_{22} و a_{11} في المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الحل :

$$M(a_{11}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,\ M(a_{22}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} ,\ M(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

٢- المتمم الجبري : المتمم الجبري للعنصر a_{ij} هو صغير العنصر a_{ij} مضروباً بالاشارة $(-1)^{i+j}$ ونرمز له بالرمز A_{ij} ، أي : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

مثال : المتمم الجبري للعنصر a_{11} في المثال السابق :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M(a_{11})$$

مبرهنة : ان مفكوك محدد يساوي مجموع جداءات عناصر أحد أسطره (أعمدته) في متمماتها الجبرية . فالنشر وفق عناصر السطر i مثلاً هو

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

ملاحظة : المبرهنة السابقة تعطينا طريقة في إيجاد مفكوك محدد من المرتبة الثالثة تسمى طريقة النشر وفق عناصر سطر أو عمود ذلك المحدد .
وبما أنه لم تحدد السطر (أو العمود) الذي تم النشر وفقه ، ننشر وفق السطر (أو العمود) الذي تحوي أكبر عدداً من الأصفار .

مثال ٥ : احسب قيمة المحدد حسب طريقة النشر :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل : ننشر وفق العمود الثاني لأنه تحوي أكبر عدداً من الأصفار

$$\Delta = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$$

- منقول محدد Δ^t :

هو المحدد الناتج من جعل أسطر المحدد Δ أعمدة وأعمدته أسطراً مع المحافظة على الترتيب .

مثال 6: اذا كان $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ فإن $\Delta^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

نتيجة : قيمة المحدد تساوي قيمة منقوله أي : $\Delta^t = \Delta$

- خواص المحددات من المرتبة الثانية والثالثة:

1) تنعدم قيمة المحدد إذا حوى سطراً (عموداً) جميع عناصره أصفار .

مثال 7 :
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2) إن تبديل موقعي سطرين (أو عمودين) في محدد يغير فقط من إشارته

مثال 8 :
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{}} -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

($R_1 \leftrightarrow R_2$ رمز للمبادلة بين السطر 1 والثاني ، $C_1 \leftrightarrow C_2$ رمز للمبادلة بين العمود 1 والعمود

3) العامل المشترك لجميع عناصر سطر أو عمود في محدد هو عامل في مفكوك المحدد ويمكن إخراجه.

وبالعكس : عند ضرب محدد لعدد ثابت $\alpha \neq 0$ تضرب جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة بالعدد α .

مثال 9 .
$$\alpha\,\Delta = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix}$$

4) تنعدم قيمة المحدد إذا تطابق سطران (أو عمودان) فيه

5) اذا تناسبت عناصر سطرين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد تساوي الصفر

6) مجموع جداءات عناصر أي سطر (أو عمود) في المتممات الجبرية لعناصر سطر آخر (أو عمود آخر) يساوي صفر .

7) ان جمع عدة محددات من المرتبة الثالثة التي لها سطران أو عمودان مشتركان يتم بالشكل :

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & b_1 \\ y_2 & a_2 & b_2 \\ y_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & a_1 & b_1 \\ x_2+y_2 & a_2 & b_2 \\ x_3+y_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال10: احسب قيمة المحدد.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

لحساب منشور المحدد بتحليله إلى مجموع محددين، نكتب السطر الثالث على شكل مجموع حدين

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1+1 & 3+2 & 7+5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}}_{\text{تطابق السطر الأول والثالث}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{تطابق السطر الثاني والثالث}} = 0 + 0 = 0$$

8) لا تتغير قيمة المحدد إذا جمعنا إلى عناصر أحد أسطره (أعمدته) العناصر المقابلة لها في سطر (عمود) آخر مضروبة بعدد ما K

رموز: R_i: السطر الذي رقمه i ، C_j العمود الذي رقمه j

$KR_j + R_i \to R_i$ جمع السطر R_i مع السطر R_j مضروباً بـ K واستبداله بالسطر i

واختصاراً نكتب $KR_j + R_i$

مثال11: احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{-7R_2+R_3}{\overset{-3R_2+R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{vmatrix}$$ نشر وفق العمود الأول.

$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} = -[6+48] = -54$$

تمرين3: احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \; C_2 + C_3 + C_1 \to C_1 = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\overset{-R_1+R_2}{=}} (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(1-\alpha)^2$$

$(\Delta = 0)$

تمرين ٤: احسب قيمة المحدد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a+c & c+b \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين ٥: أثبت صحة العلاقات التالية باستخدام خواص المحددات

① $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

② $$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

③ $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc$$

---

* محدد مصفوفة مربعة: يمكن إلحاق أي مصفوفة مربعة بمحدد من المرتبة ذاتها عناصره: هي عناصر المصفوفة نفسها وبالترتيب ذاته ونرمز له بـ $|A|$ أو $\det A$

* نسمي المصفوفة A مصفوفة شاذة إذا كان $\det A = 0$
وغير شاذة إذا كان $\det A \neq 0$

أمثلة: ① محدد المصفوفة الواحدية I يساوي الواحد أي $\det I = 1$

② محدد المصفوفة السلمية يساوي العدد الثابت السلمي λ مرفوعاً إلى القوة n
$\det A = \lambda^n$ (n مرتبة المصفوفة)

③ محدد المصفوفة القطرية يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

④ $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

⑤ $|A.B| = |A|.|B|$

معكوس (مقلوب) مصفوفة مربعة :

تعريفات :

1- المصفوفة العاكسة (مقلوب مصفوفة): اذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n

فإن المصفوفة B من المرتبة n والتي تحقق: $A.B = B.A = I$

تدعى مقلوب المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} ونكتب :

$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$ (I المصفوفة الواحدية من المرتبة n).

2- مصفوفة المتممات الجبرية (A_{ij}) :

هي مصفوفة عناصرها المتممات الجبرية A_{ij} للعناصر a_{ij} :

مثال 12 :

$$(A_{ij})_{33} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة المساعدة (الملحقة) للمصفوفة المربعة A ، $adj(A)$

هي منقول مصفوفة المتممات الجبرية للمصفوفة A أي

$$adj(A) = (A_{ij})^T$$

مثال 13 : إن مصفوفة المتممات الجبرية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

هي

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

مثال : اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A_{ij} = \begin{bmatrix} 13 & -8 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \\ 34 & -18 & 21 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: الشرط اللازم والكافي كي يكون للمصفوفة المربعة A مقلوب هو أن تكون غير شاذة أي $\det A \neq 0$ ونعطى معكوس المصفوفة بدلالة منقول مصفوفة المتممات الجبرية

$$A^{-1} = \frac{1}{\ } adj\, A$$

مثال 14: ناقش حسب قيم الوسيط وجود معكوس للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & \lambda\end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}=3(\lambda+4)$$

يكون المصفوفة A معكوس إذا وفقط إذا كان

$$|A|\neq 0 \Leftrightarrow 3(\lambda+4)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -4$$

الخطوات العامة لإيجاد مقلوب مصفوفة مربعة غير شاذة.

1. نحسب محدد المصفوفة A (يجب أن يكون المحدد مغايراً للصفر وإلا ليس لها معكوس)
2. نوجد مصفوفة المتممات الجبرية ثم نأخذ منقولها.
3. نطبق القانون: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}A$

مثال 15. وجدنا في مثال 13 أن مصفوفة المتممات الجبرية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -4\\ 6 & 9 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{هي} \quad A_{ij}=\begin{bmatrix}13 & -8 & 3\\ -9 & 7 & -5\\ 34 & -18 & 21\end{bmatrix}$$

و محدد A هو: $|A|=19\neq 0$ لذلك يوجد للمصفوفة A معكوس وهو

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A=\frac{1}{19}\begin{bmatrix}13 & -9 & 34\\ -8 & 7 & -18\\ 3 & -5 & 21\end{bmatrix}$$

تمرين: أوجد مقلوب كلاً من المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}, \quad =\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$