المحاضرة الثالثة
عملي + نظري

تبديل مستويات الإسقاط

٧-١. مقدمة :

يتبيـــن لنا من خلال الأبحَاث السابقة بأن العديد من المسائل تحل بسهولة أكـــبر إذا تـــم تمثـــيل الأشكال في أوضاع خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط . ويمكـــن استخدام بعض الطرق التي تسمح بالانتقال بهذه الأشكال من الأوضاع الكيفية إلى الأوضاع الخاصة .

وهذه الطرق هي :

١- طـــريقة تـــبديل مســـتويات الإسقاط : حيث يمكننا وفق هذه الطريقة اســـتبدال أحد مستويي الإسقاط بمستوٍ جديد عمودي على المستوي الآخر بحيث تأخذ الأشكال المفروضة أوضاعاً خاصة بالنسبة لمجموعة المستويين الجديدين .

٢- طريقة الدوران (الانتقال) : في هذه الطريقة تبقى مستويات الإسقاط ثابـــتة بيـــنما يتغير مكان الأشكال بالنسبة لهذه المستويات وذلك بتدويرها حول محور شاقولي أو أمامي حتى تأخذ الوضع الخاص المطلوب .

٣- طـــريقة التطبـــيق : وتـــتلخص بـــتدوير الشكل المستوي حول أحد مستقيماته الأفقية حتى يصبح أفقياً ، أو حول أحد مستقيماته الجبهية حتى يصبح جبهياً ، تسمى العملية الأولى بالتطبيق الأفقي والثانية بالتطبيق الجبهي .

طريقة تبديل مستويات الإسقاط

عـــند تـــبديل إي مســـتوي إسقاط بآخر يجب المحافظة على التعامد بين مستويات الإسقاط الجديدة وعندها فإن مسقطي النقطة في الجملة الجديدة سيقعان على خط تداعي واحد عمود على خط الأرض الجديد .

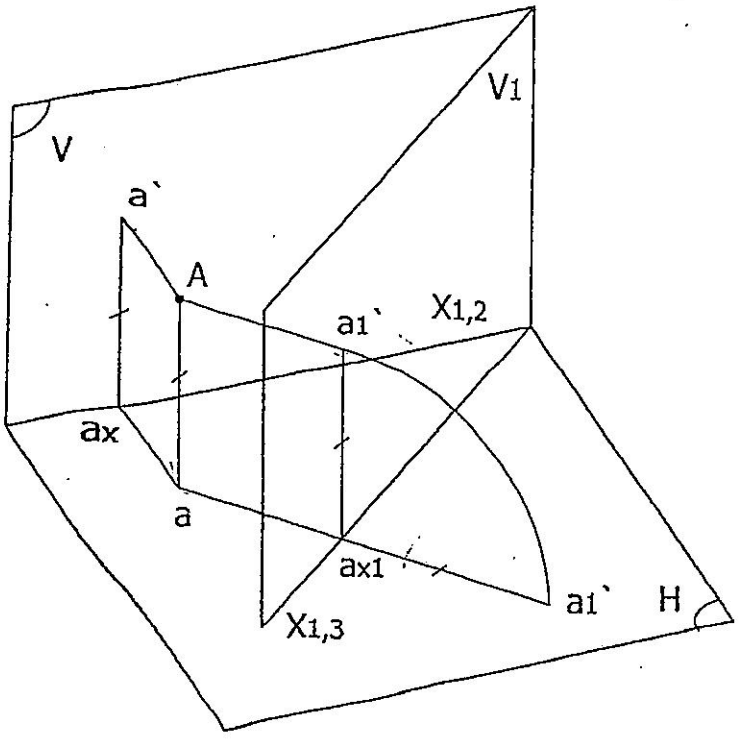
٧-٢. تبديل مستوي الإسقاط الجبهي :

ليكن لدينا مستويي الإسقاط المتعامدين V , H والمستوي V_1 العمودي على المستوي الأفقي H (الشكل ٧-١) . نرمز للفصل المشترك بين المستويين V , H بالرمز $X_{1,2}$ كما نرمز للفصل المشترك بين المستويين V_1 , H بالرمز $X_{1,3}$.

مسقط النقطة A على المستوي الجديد V_1 هو النقطة a_1' ، ولكي نتمكن مـن تمثـيل المسقط الثالث في مستوي الرسم ندور المستوي V_1 حول المحور $X_{1,3}$ حتى ينطبق على المستوي الأفقي H ، ثم ندور المستويين V_1 , H حول المحور $X_{1,2}$ بزاوية 90° .

نستطيع أن نتبين من الشكل السابق أن المسقطين a_1' , a سوف يقعان على خط تداعي واحد عمودي على المحور $X_{1,3}$. وأيضاً نلاحظ أن :

$$a_{x1}a_1' = aA = a_xa' = Z_A$$



الشكل (٧-١)

وبالتالي عند تبديل مستوي الإسقاط الجبهي القديم بآخر جديد ($\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}$) نجد ما يلي :

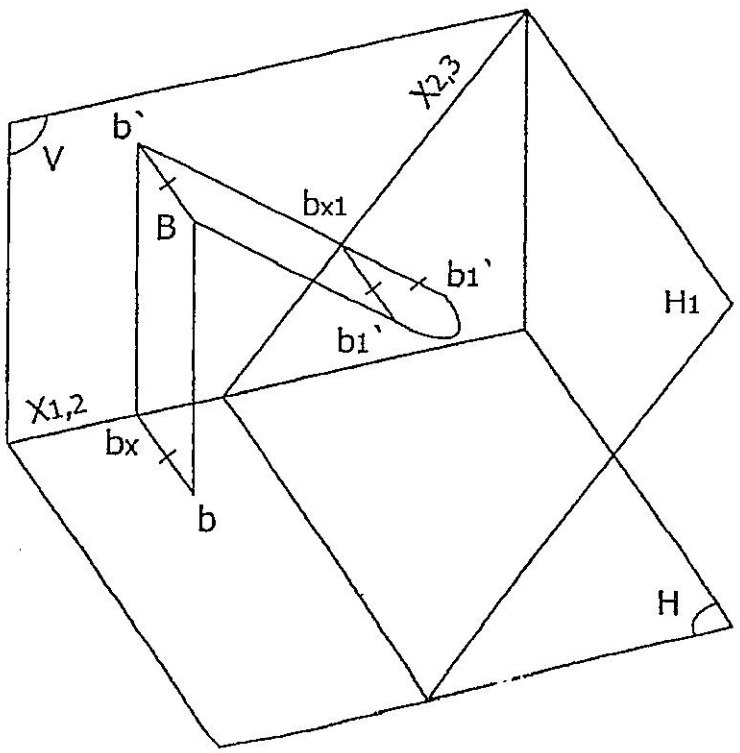
١- وضعية المسقط الأفقي للنقطة لا تتغير .

٢- بعد المسقط الجبهي للنقطة عن خط الأرض في الجملة القديمة والجديدة واحد لا يتغير .

٣- إن تطبيق المستوي V_1 على المستوي الأفقي H يمكن أن يجرى باتجاهين وكلاهما مقبول ، إلا أننا إذا بدأنا بتطبيق إحدى النقاط باتجاه معين فيجب المحافظة على هذا الاتجاه لكافة نقاط الجسم .

٧-٣. تبديل مستوي الإسقاط الأفقي :

ليكن لدينا مستويي الإسقاط المتعامدين V , H والمستوي H_1 العمودي على المستوي الجبهي V (الشكل ٧-٢) . نرمز للفصل المشترك بين المستويين V , H_1 بالرمز $X_{2,3}$.



الشكل (٧-٢)

مســقط النقطة B على المستوي الجديد H_1 هو النقطة b_1 ، ولكي نتمكن مــن تمثــيل المسقط الثالث في مستوي الرسم ندور المستوي H_1 حول المحور $X_{2,3}$ حــتى ينطبق على المستوي الجبهي V وندور المستوي H حول المحور $X_{1,2}$ بمقدار 90° فتصبح المستويات الثلاثة في مستوي واحد .

نســتطيع أن نتبين من الشكل السابق أن المسقطين b_1 , b' سوف يقعان على خط تداعي واحد عمودي على المحور $X_{2,3}$. وأيضاً نلاحظ أن :

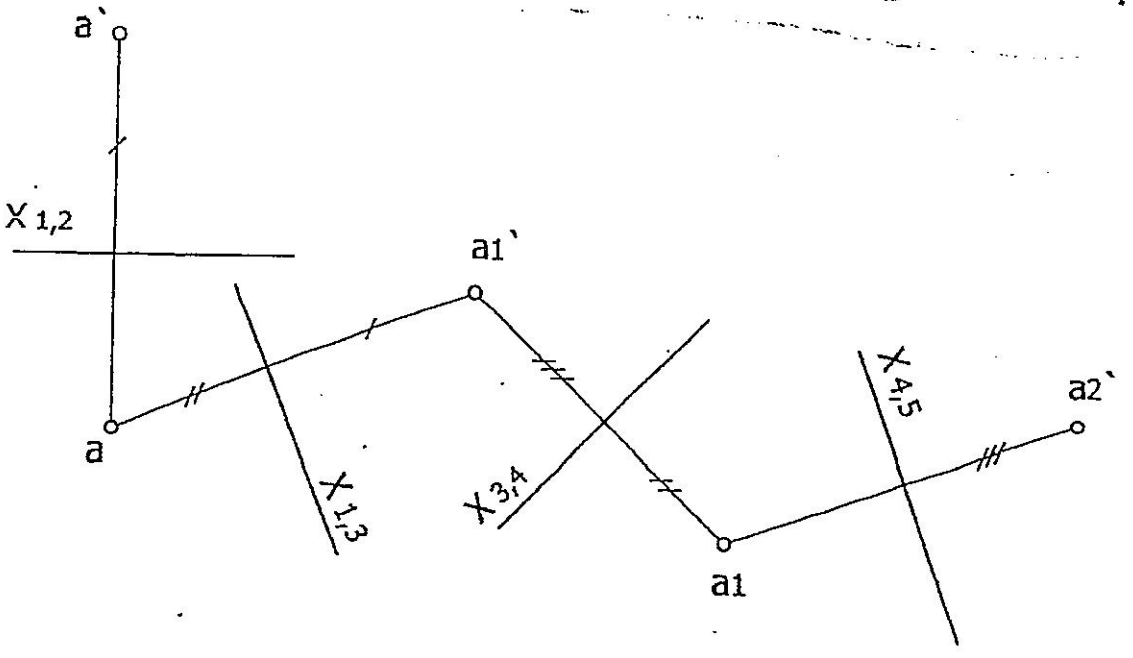
$$B_{x1}b_1 = Bb' = bb_x = Y_b$$

وبالتالي عند تبديل مستوي الإسقاط الأفقي القديم بآخر جديد $\left(\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V}{H_1}\right)$ نجد ما يلي :

١- وضعية المسقط الجبهي للنقطة لا تتغير .

٢- بعد المسقط الأفقي للنقطة عن خط الأرض في الجملة القديمة والجديدة واحد لا يتغير .

٣- إن تطبــيق المســتوي H_1 على المستوي الجبهيV يمكن أن يجرى باتجاهيــن وكلاهمــا مقبول ، إلا أننا إذا بدأنا بتطبيق إحدى النقاط باتجاه معين فيجب المحافظة على هذا الاتجاه لكافة نقاط الجسم .



الشكل (٧-٣)

ملاحظة :يمكن تكرار عملية تغيير مستويات الإسقاط عدداً غير محدد من المرات كما هو مبين في الشكل (٧-٣) .

٧-٤. أمثلة تطبيقية :

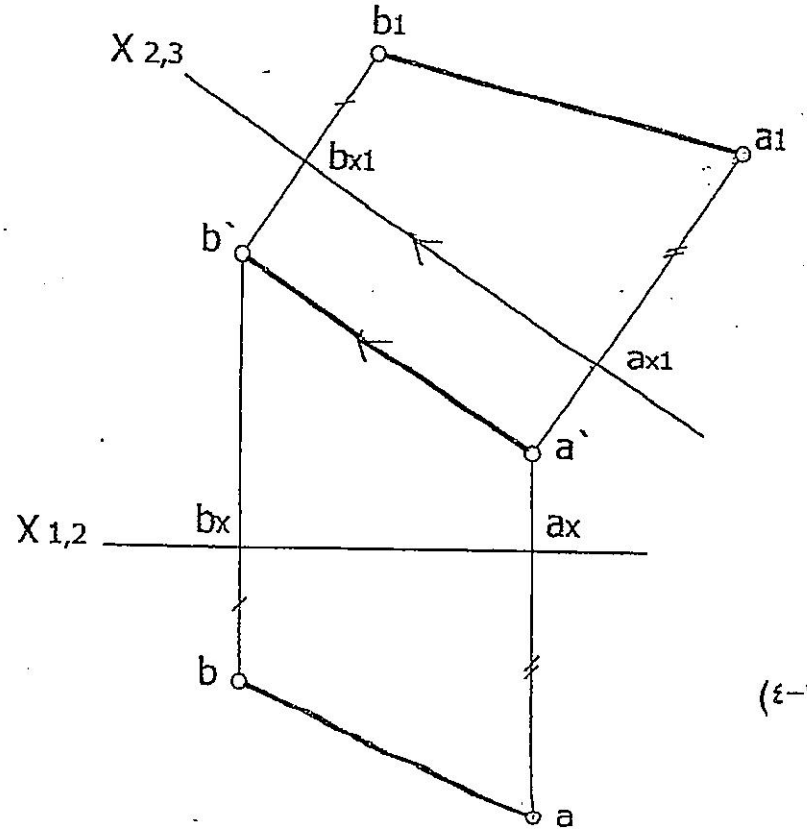
١. تحويل مستقيم كيفي إلى مستقيم أفقي :

ليكن المستقيم AB المبين بالشكل (٧-٤) ، لجعل هذا المستقيم أفقياً نجعل مسقطه الجبهي موازياً لخط الأرض ، ويتم ذلك كما يلي :

- نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{2,3}$ بحيث يكون موازياً للمسقط الجبهي للمستقيم $a'b'$. ثم نوجد المساقط الجديدة للنقطتين A , B حيث نرسم من a' خط تداعي عمودي على المحور $X_{2,3}$ فيتقاطع معه بالنقطة a_{x1} ثم نعين المسقط a_1 بحيث يكون : $a_{x1}a_1 = a_x a = Y_A$

ويتم بالطريقة نفسها تعيين المسقط الجديد b_1 للنقطة B .

وبالتالي فإن المسقط a_1b_1 يمثل المسقط الأفقي الجديد للمستقيم AB وطول هذا المسقط يساوي الطول الحقيقي للمستقيم .



الشكل (٧-٤)

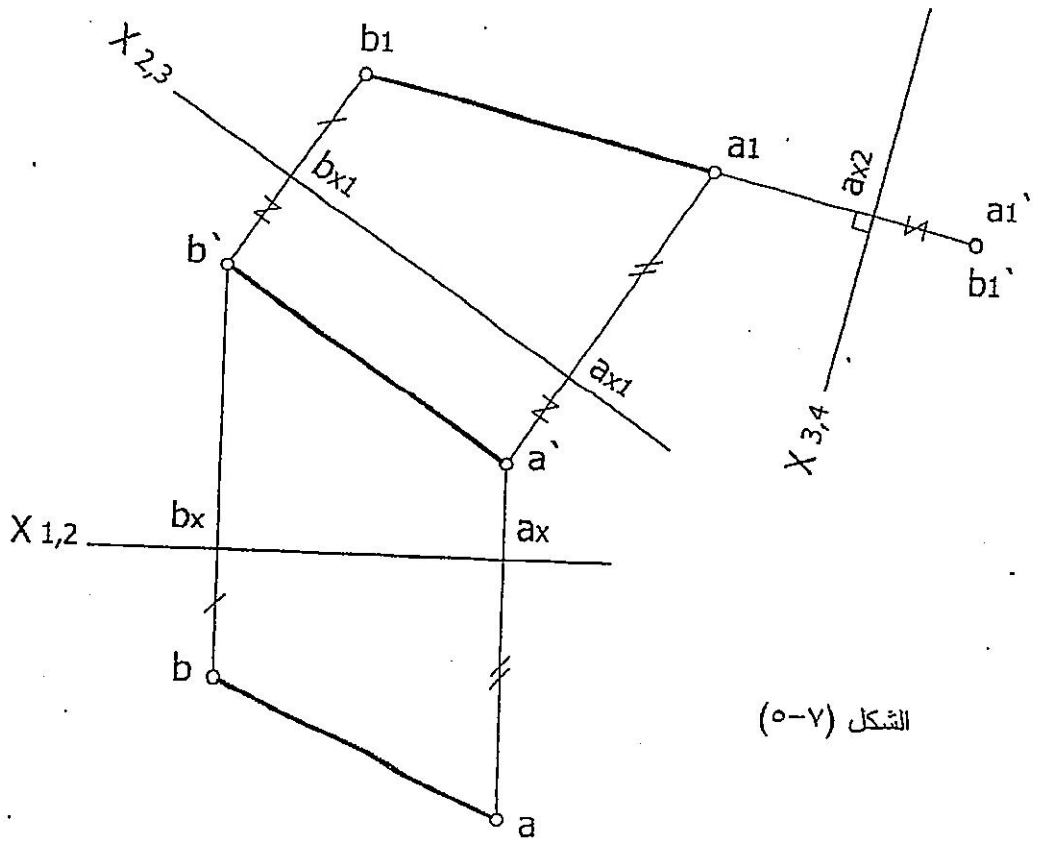
٢. تحويل مستقيم كيفي إلى مستقيم أمامي :

لـتحويل المسـتقيم AB الوارد في المثال السابق إلى مستقيم أمامي فإننا نقـوم بـتحويله أولاً إلـى مسـتقيم أفقـي ثم نقوم بتحويله إلى مستقيم أمامي (الشكل ٧-٥) ، ويتم ذلك كما يلي :

- نحـول المسـتقيم AB إلى مستقيم أفقي ونوجد المسقط الأفقي الجديد a_1b_1 . نـأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{3,4}$ بحيث يكون عمودياً على المسقط a_1b_1 .
- نوجد المساقط الجديدة للنقطتين A , B حيث نرسم من a_1 خط تداعي عمودي على المحور $X_{3,4}$ فيتقاطع معه بالنقطة a_{x2} ثم نعين المسقط a_1' بحيث يكون :

$$a_{x1}a' = a_{x2}a_1'$$

وباعتـبار المستقيم قد أصبح أمامياً ينطبق المسقط الجبهي الجديد b_1' على المسقط a_1' .



الشكل (٧-٥)

٣. تحويل مستقيم كيفي إلى مستقيم جبهي :

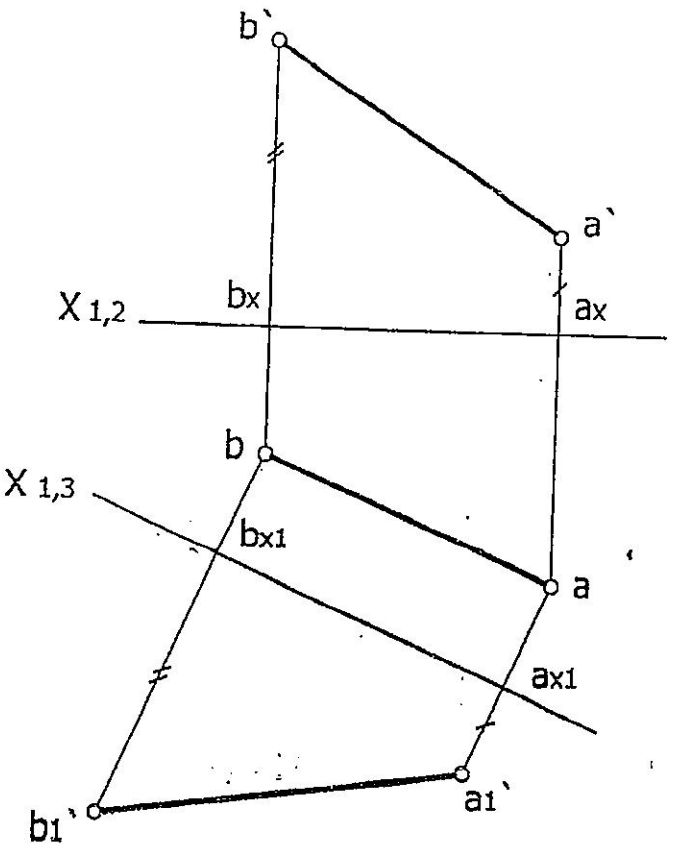
ليكـــن المســـتقيم AB المبين بالشكل (٧-٦) ، لجعل هذا المستقيم جبهياً نجعل مسقطه الأفقي موازياً لخط الأرض ، ويتم ذلك كما يلي :

- نـــأخذ خـــط أرض جديـــد ممثلاً بالمحور $X_{1,3}$ بحيث يكون موازياً للمسقط الأفقي للمستقيم ab .
- نوجد المساقط الجديدة للنقطتين A , B حيث نرسم من a خط تداعي عمودي على المحور $X_{1,3}$ فيتقاطع معه بالنقطة a_{x1} ثم نعين المسقط a_1' بحيث يكون :

$$a_{x1}a_1' = a_xa' = Z_A$$

ويتم بالطريقة نفسها تعيين المسقط الجديد b_1' للنقطة B .

وبالتالـــي فإن المسقط $a_1'b_1'$ يمثل المسقط الجبهي الجديد للمستقيم AB وطول هذا المسقط يساوي الطول الحقيقي للمستقيم .



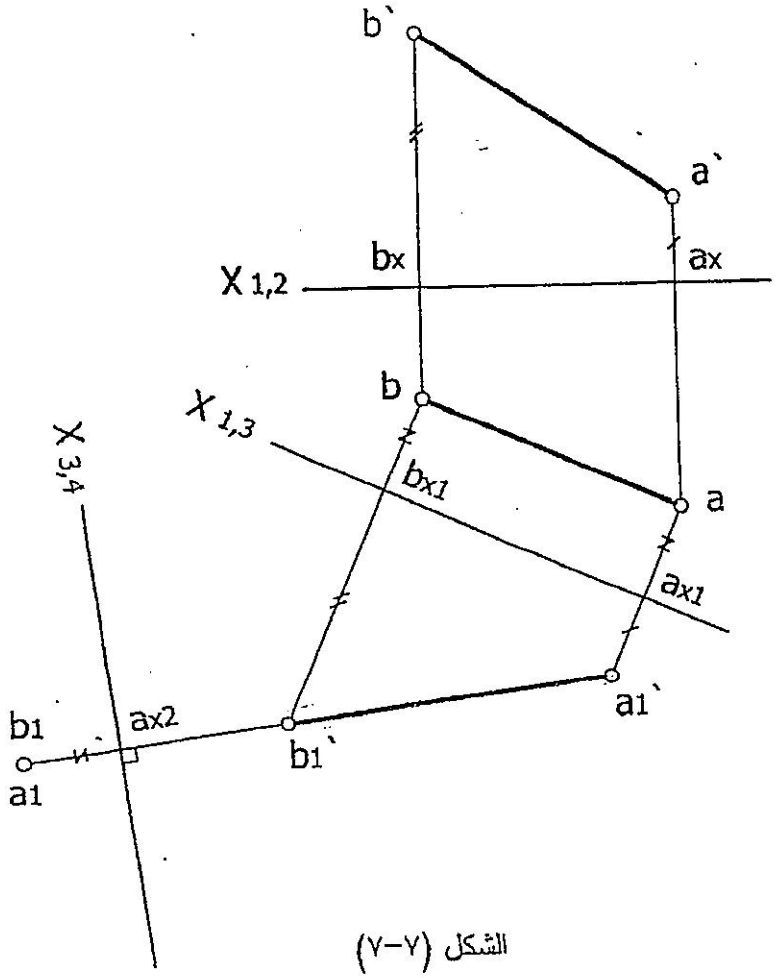
الشكل (٧-٦)

٤. تحويل مستقيم كيفي إلى مستقيم شاقولي :

لـتحويل المستقيم AB الوارد في المثال السابق إلى مستقيم شاقولي فإننا نقـوم بـتحويله أولاً إلـى مسـتقيم جبهي ثم نقوم بتحويله إلى مستقيم شاقولي (الشكل ٧-٧) ، ويتم ذلك كما يلي :

نحـول المسـتقيم AB إلى مستقيم جبهي ونوجد المسقط الجبهي الجديد $a_1'b_1'$. نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{3,4}$ بحيث يكون عمودياً على المسـقط $a_1'b_1'$. نوجد بعد ذلك المساقط الجديدة للنقطتين A , B حيث نرسم من a_1' خط تداعي عمودي على المحور $X_{3,4}$ فيتقاطع معه بالنقطة a_{x2} ثم نعين المسقط a_1 بحيث يكون : $a_{x1}a = a_{x2}a_1$

وباعتبار المستقيم قد اصبح شاقولياً ينطبق المسقط الأفقي الجديد b_1 على المسقط a_1 .



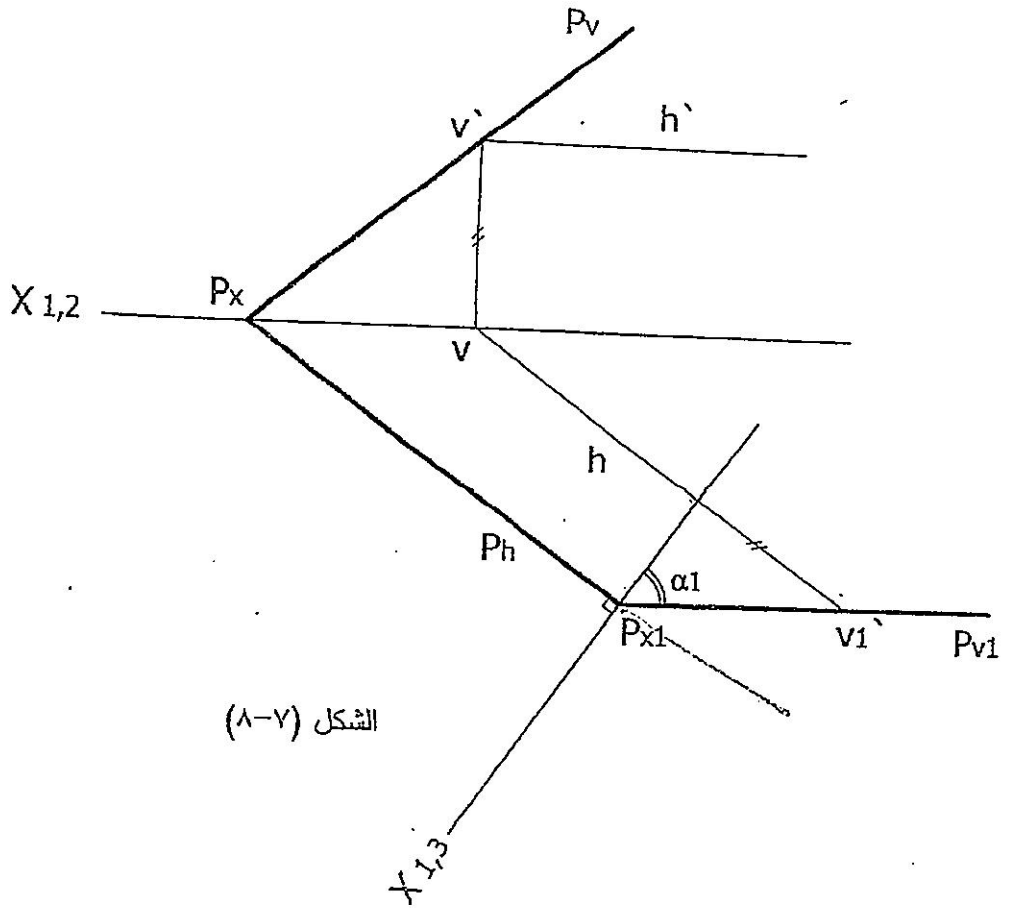
الشكل (٧-٧)

٥. **تحويل مستوي كيفي معين بأثريه إلى مستوي أمامي :**

ليكن لدينا المستوي P الموضح بالشكل (٧-٨) . لتحويل المستوي P من الوضع الكيفي إلى الوضع الأمامي نقوم بما يلي :

- نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{1,3}$ بحيث يكون عمودياً على الأثر الأفقي للمستوي P_h . لتعيين الأثر الجبهي الجديد للمستوي P_{v1} نحتاج إلى تعيين الوضع الجديد لنقطتين من الأثر الجبهي P_v . نلاحظ أن المسقط الجديد للنقطة P_x هو النقطة P_{x1} التي تنتج عن تقاطع P_h مع المحور $X_{1,3}$. ولتعيين نقطة ثانية نرسم في المستوي P المستقيم الأفقي H ونعين مسقطه في الجملة الجديدة v_1' اعتماداً على النتيجة : **أفقيات المستوي الأمامي هي مستقيمات أمامية** . نصل النقطتين P_{x1} ، v_1' فنحصل على الأثر الجبهي الجديد P_{v1} .

وباعتبار أصبح المستوي أمامياً فإن زاوية ميل هذا المستوي عن مستوي الإسقاط الأفقي α_1 تظهر مباشرةً كما هو موضح في الشكل السابق .



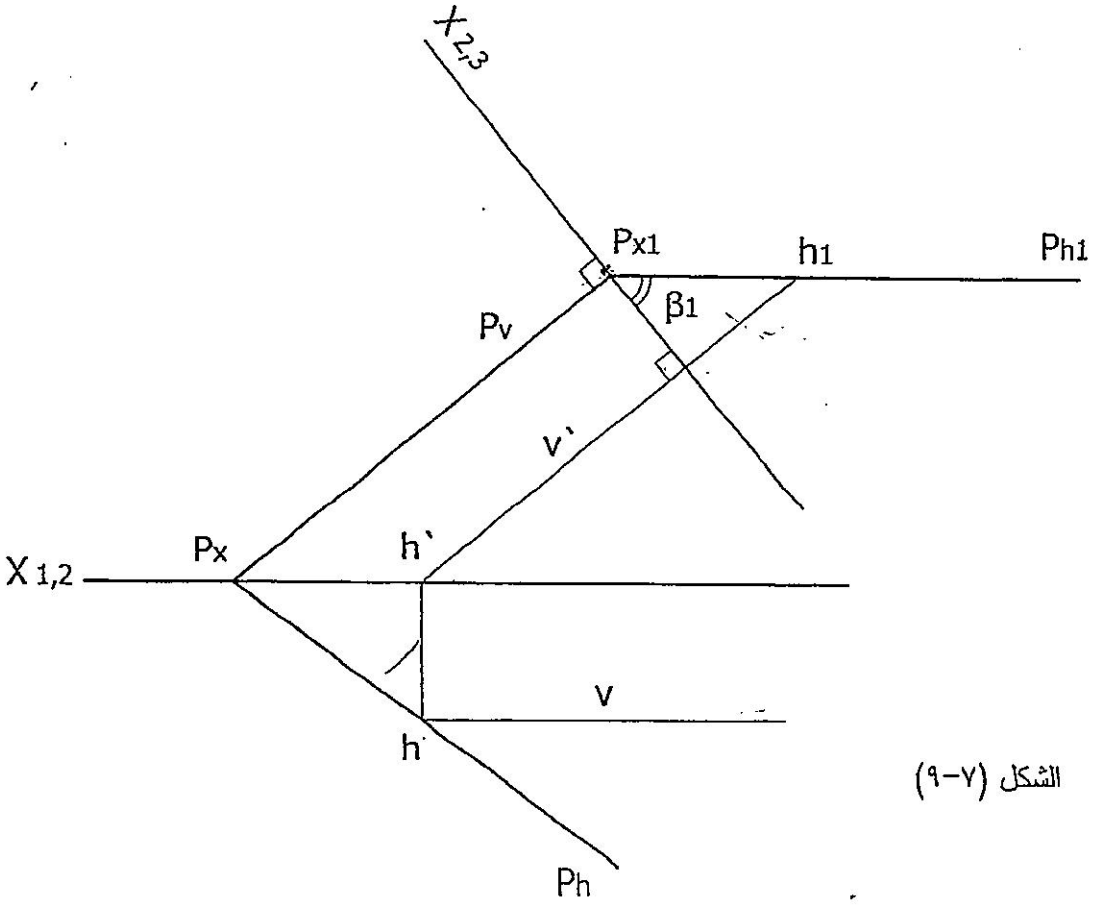
الشكل (٧-٨)

٦. تحويل مستوي كيفي معين بأثريه إلى مستوي شاقولي:

ليكن لدينا المستوي P الموضح بالشكل (٧-٩) . لتحويل المستوي P من الوضع الكيفي إلى الوضع الشاقولي نقوم بما يلي :

- نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{2,3}$ بحيث يكون عمودياً على الأثر الجبهي للمستوي P_v . لتعيين الأثر الأفقي الجديد للمستوي P_{h1} نحتاج إلى تعييـــن الوضع الجديد لنقطتين من الأثر الأفقي P_h . نلاحظ أن المسقط الجديد للنقطة P_x هو النقطة P_{x1} التي تنتج عن تقاطع P_v مع المحور $X_{2,3}$. ولتعيين نقطـــة ثانية نرسم في المستوي P المستقيم الجبهي V ونعين مسقطه في الجملة الجديـــدة h_1 اعتماداً على النتيجة : **جبهيات المستوي الشاقولي هي مستقيمات شاقولية** . نصل النقطتين P_{x1} , h_1 فنحصل على الأثر الأفقي الجديد P_{h1} .

وباعتبار أصبح المستوي شاقولياً فإن زاوية ميل هذا المستوي عن مستوي الإسقاط الجبهي β_1 تظهر مباشرةً كما هو موضح في الشكل السابق .

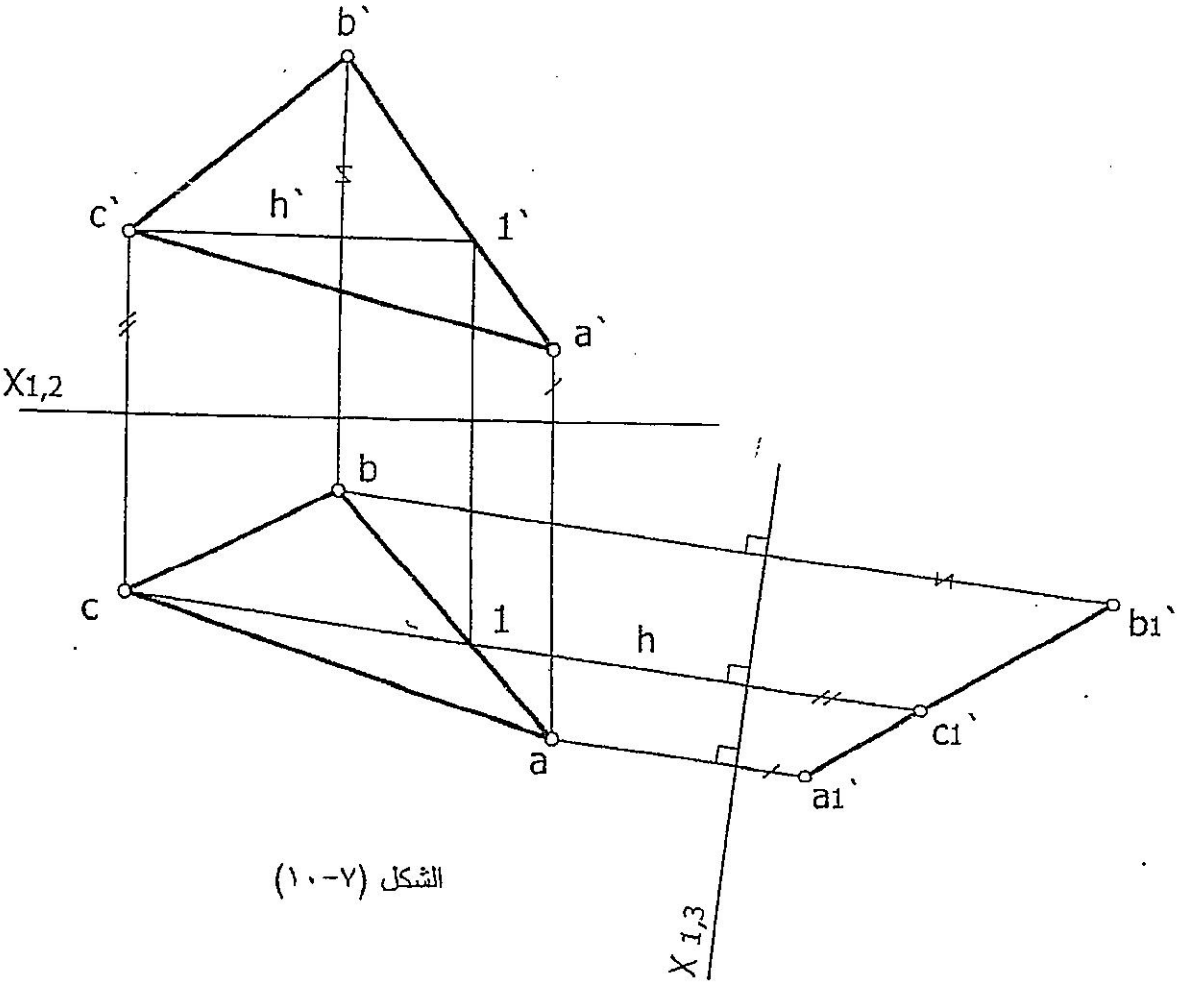


الشكل (٧-٩)

٧. تحويل مستوي كيفي غير معين بأثريه إلى مستوي أمامي :

ليكن لدينا المستوي P المعين بالمثلث ABC (الشكل ٧-١٠) . لجعل هذا المستوي أمامياً نقوم بما يلي :

- نرسم في مستوي المثلث ABC المستقيم الأفقي H .
- نجعل المستقيم السابق عمود على المستوي الجبهي (أمامي) حيث نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{1,3}$ بحيث يكون عمودياً على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي H ونوجد المسقط الجديد للمستقيم على المستوي المتعامد معه ويكون عبارة عن نقطة .
- نوجد بعد ذلك المساقط الجبهية الجديدة لبقية نقاط المثلث وهي تقع على استقامة واحدة باعتبار أصبح المستوي P أمامياً .

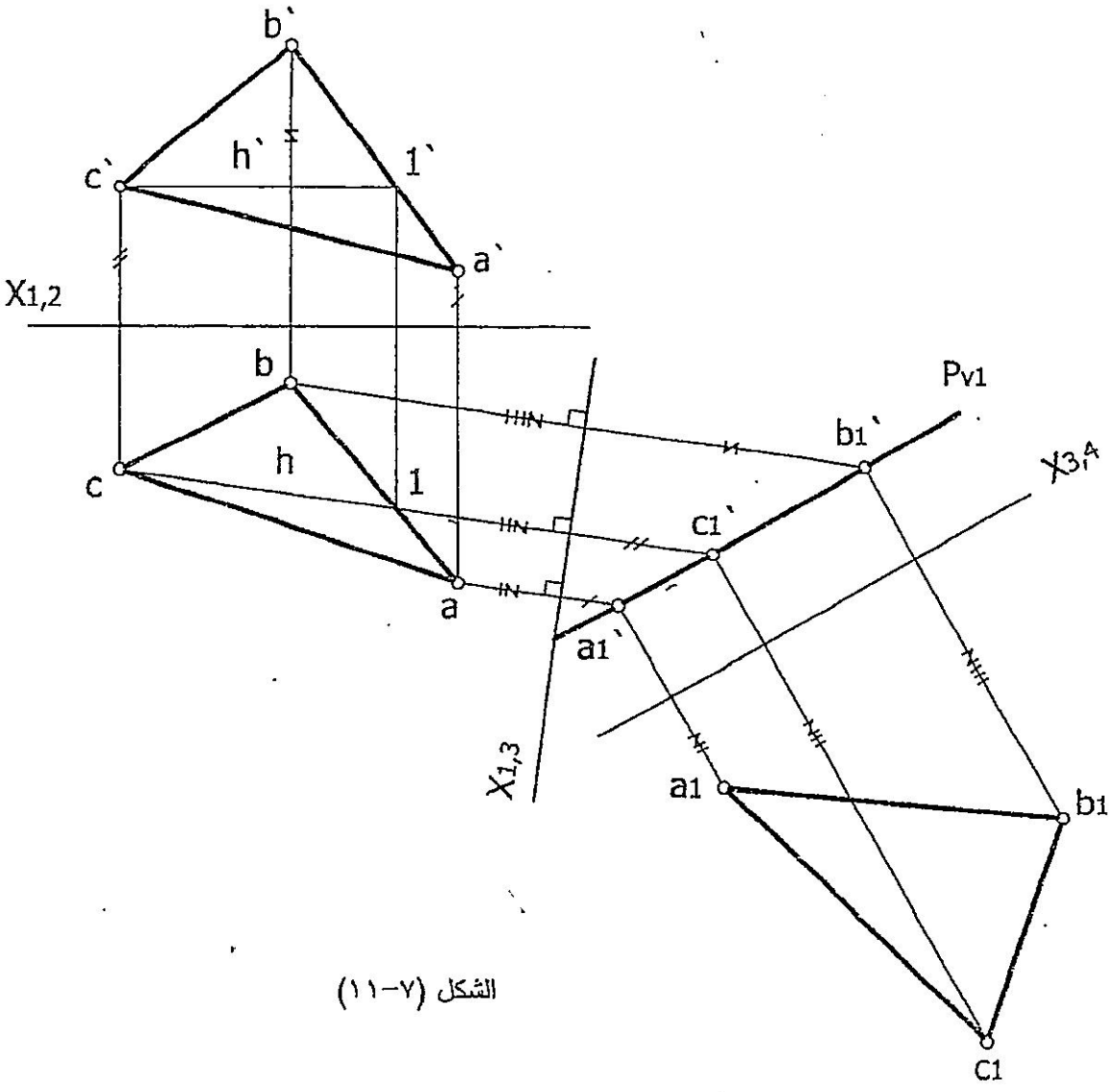


الشكل (٧-١٠)

٨. تحويل مستوي كيفي غير معين بأثريه إلى مستوي أفقي:

لـــتحويل المستوي P الوارد في المثال السابق إلى مستوي أفقي فإننا نقوم بـــتحويله أولاً إلـــى مســـتوي أمامـــي ثـــم نقـــوم بـــتحويله إلى مستوي أفقي (الشكل ٧-١١) ، ويتم ذلك كما يلي :

نحـــول المســـتوي P إلى مستوي أمامي ونوجد أثره الجبهي P_{v1} ونوجد المساقط الجديدة لنقاطه . نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{3,4}$ بحيث يكون موازيـــاً للأثـــر الجبهي P_{v1} ثم نوجد المساقط الجديدة لنقاط المثلث ABC في الجملة الجديدة ، والمسقط الذي حصلنا عليه يمثل الشكل الحقيقي للمثلث ABC باعتبار أن المستوي P أصبح أفقيا .

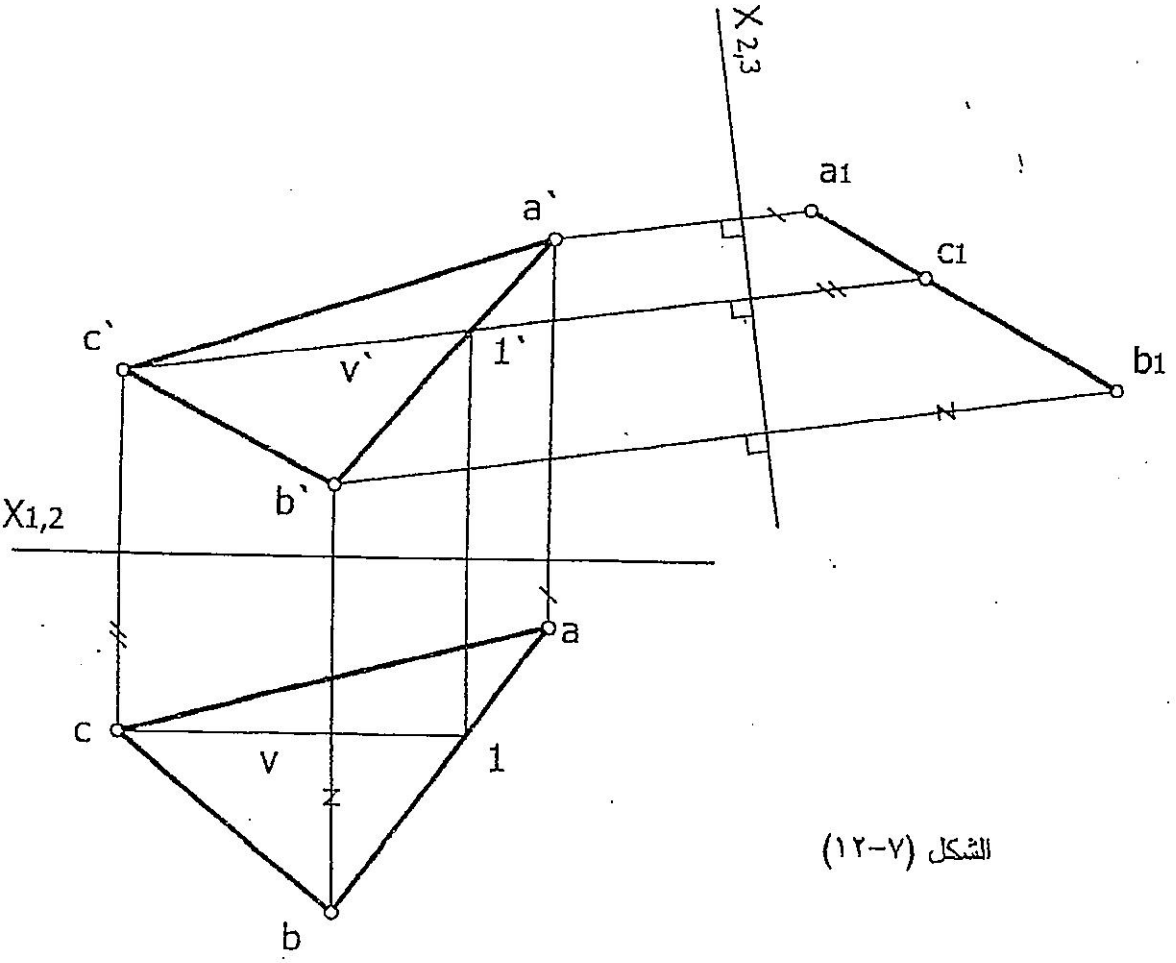


الشكل (٧-١١)

٩. تحويل مستوي كيفي غير معين بأثريه إلى مستوي شاقولي :

ليكن لدينا المستوي P المعين بالمثلث ABC (الشكل ٧-١٢) . لجعل هذا المستوي شاقولياً نقوم بما يلي :

- نرسم في مستوي المثلث ABC المستقيم الجبهي V .
- نجعل المستقيم السابق عمود على المستوي الأفقي (شاقولي) حيث نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{2,3}$ بحيث يكون عمودياً على المسقط الجبهي للمستقيم الجبهي V ونوجد المسقط الجديد للمستقيم على المستوي المتعامد معه ويكون عبارة عن نقطة .
- نوجد المساقط الأفقية الجديدة لبقية نقاط المثلث وهي تقع على استقامة واحدة باعتبار أصبح المستوي P شاقولياً .

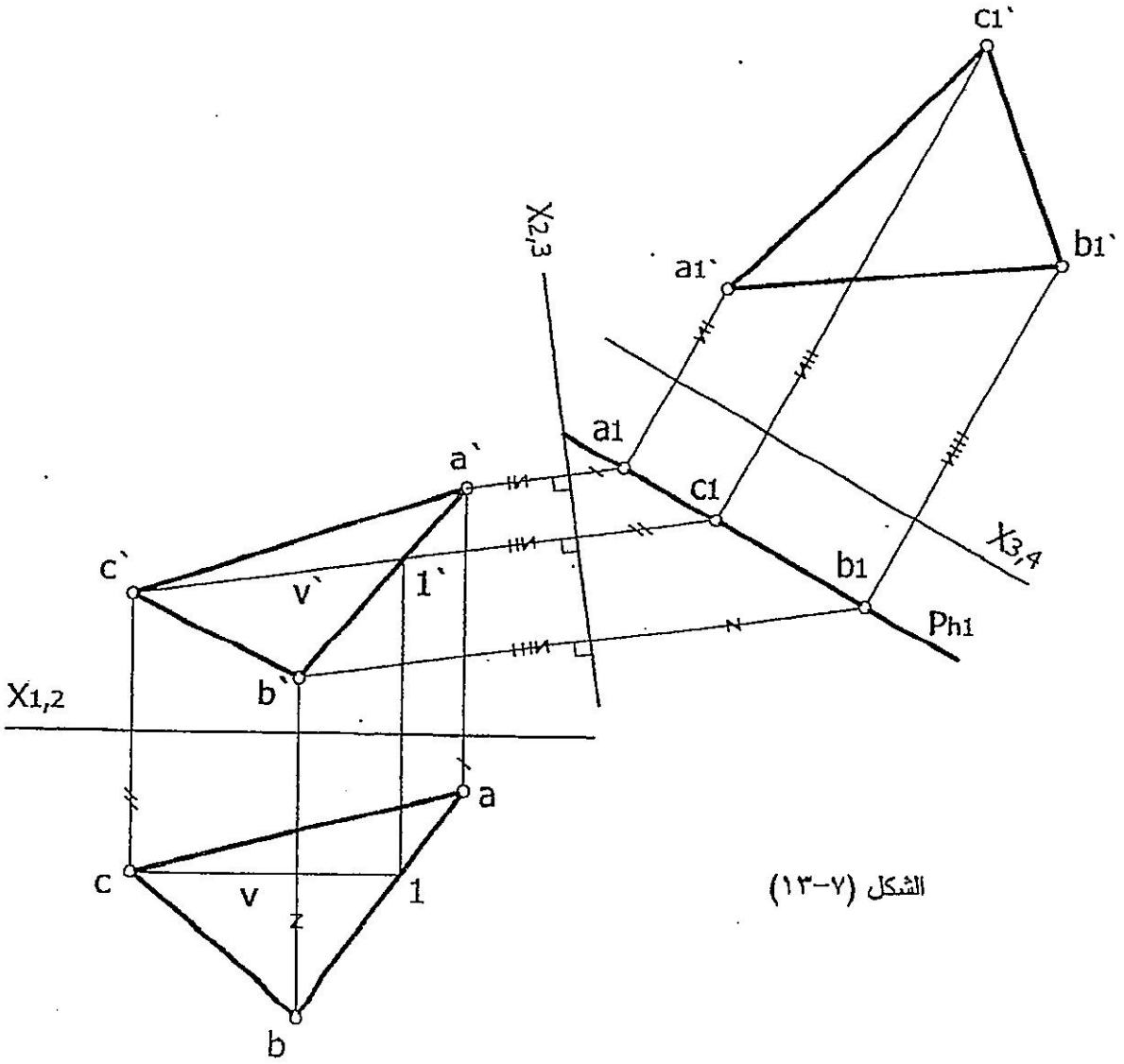


الشكل (٧-١٢)

١٠. تحويل مستوي كيفي غير معين بأثريه إلى مستوي جبهي:

لتحويل المستوي P الوارد في المثال السابق إلى مستوي جبهي فإننا نقوم بتحويله أولاً إلى مستوي شاقولي ثم نقوم بتحويله إلى مستوي جبهي (الشكل٧-١٣) ويتم ذلك كما يلي :

نحول المستوي P إلى مستوي شاقولي ونوجد أثره الأفقي P_{h1} ونوجد المساقط الجديدة لنقاطه . نأخذ خط أرض جديد ممثلاً بالمحور $X_{3,4}$ بحيث يكون موازياً للأثر الأفقي P_{h1} ثم نوجد المساقط الجديدة لنقاط المثلث ABC في الجملة الجديدة ، والمسقط الذي حصلنا عليه يمثل الشكل الحقيقي للمثلث ABC باعتبار أن المستوي P أصبح جبهياً .

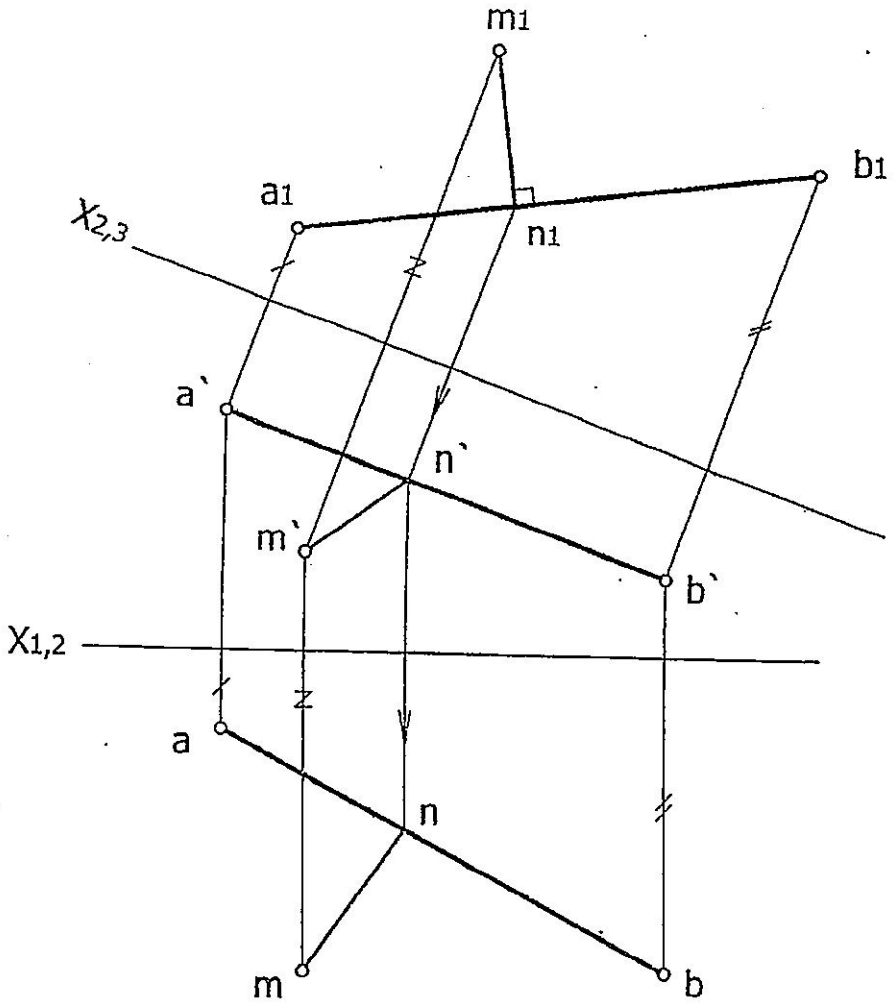


الشكل (٧-١٣)

١١. رسم من نقطة معلومة عمود على مستقيم كيفي :

ليكن لدينا المستقيم الكيفي AB والنقطة M (الشكل ٧-١٤) ، والمطلوب رسم من النقطة M عموداً على المستقيم AB . نتبع الخطوات التالية :

- نجعـل المستقيم AB موازياً لأحد مستويات الإسقاط (أفقياً) ونعين الوضع الجديد m_1 , m' للنقطة المفروضة .
- نرسـم مـن الـنقطة m_1 , m' المستقيم m_1n_1 , $m'n'$ العمود على المستقيم a_1b_1 , $a'b'$.
- نعيـن المسقط n ونصله مع المسقط m فنحصل على مساقط العمود المطلوب $m'n'$, mn .

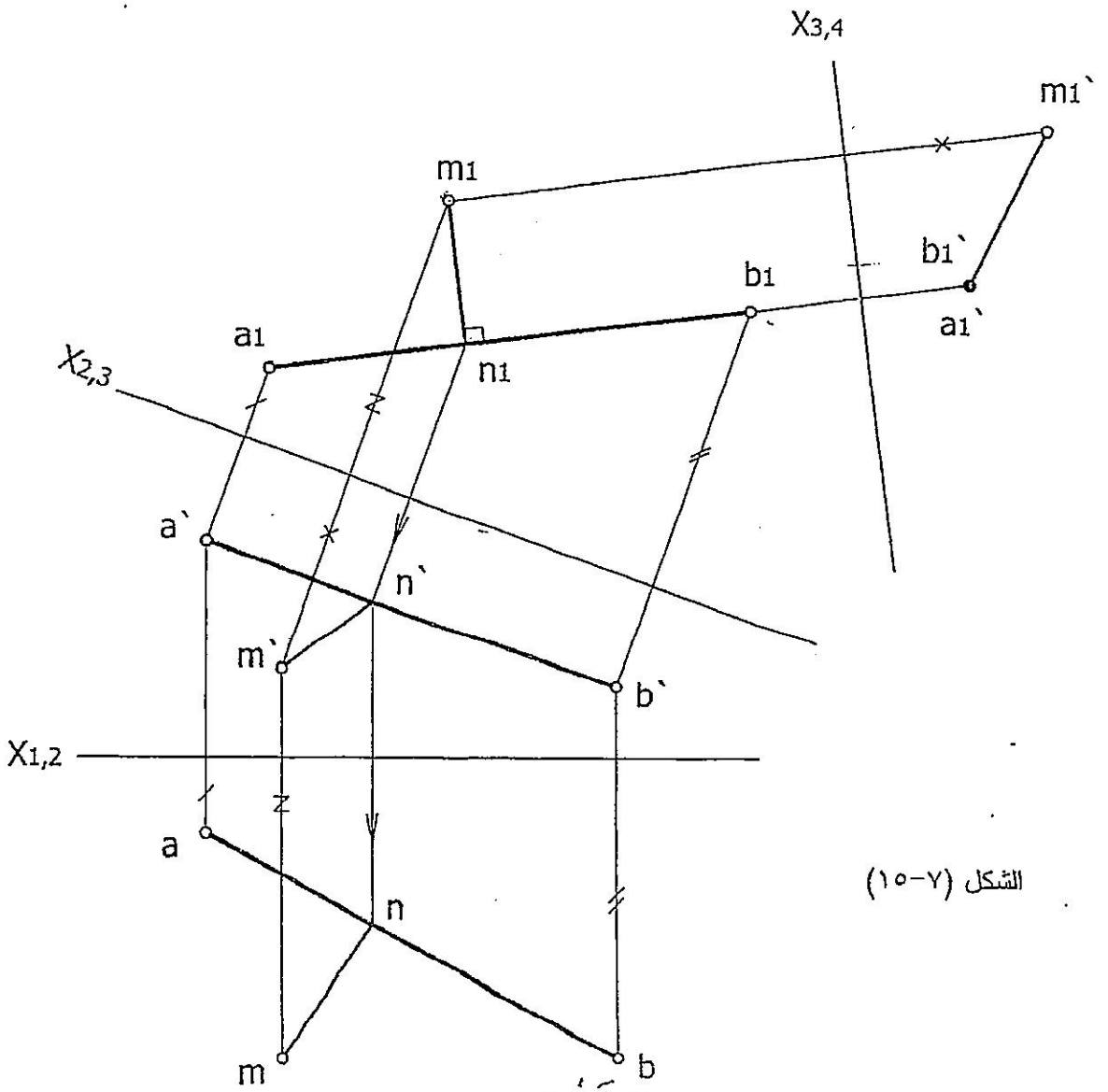


الشكل (٧ ١٤)

١٢. إيجاد بعد نقطة معلومة عن مستقيم كيفي :

ليكــن لدينا المستقيم الكيفي AB والنقطة M والمطلوب إيجاد بعد النقطة M عن المستقيم AB .نتبع إحدى الطرق التالية :

- نرسم العمود MN على المستقيم AB ثم نوجد طوله الحقيقي بطريقة فرق الإحداثيات .
- يمكن جعل المستقيم AB أمامياً (أو شاقولياً) وتعيين الوضع الجديد للنقطة (الشكل ٧-١٥) ، فالمسافة $a_1'm_1'$ تمثل البعد المطلوب .
- كما يمكن حل المسألة بجعل مستوي المثلث ABM أفقياً أو جبهياً ثم رسم العمود المطلوب وإيجاد المسافة المطلوب .

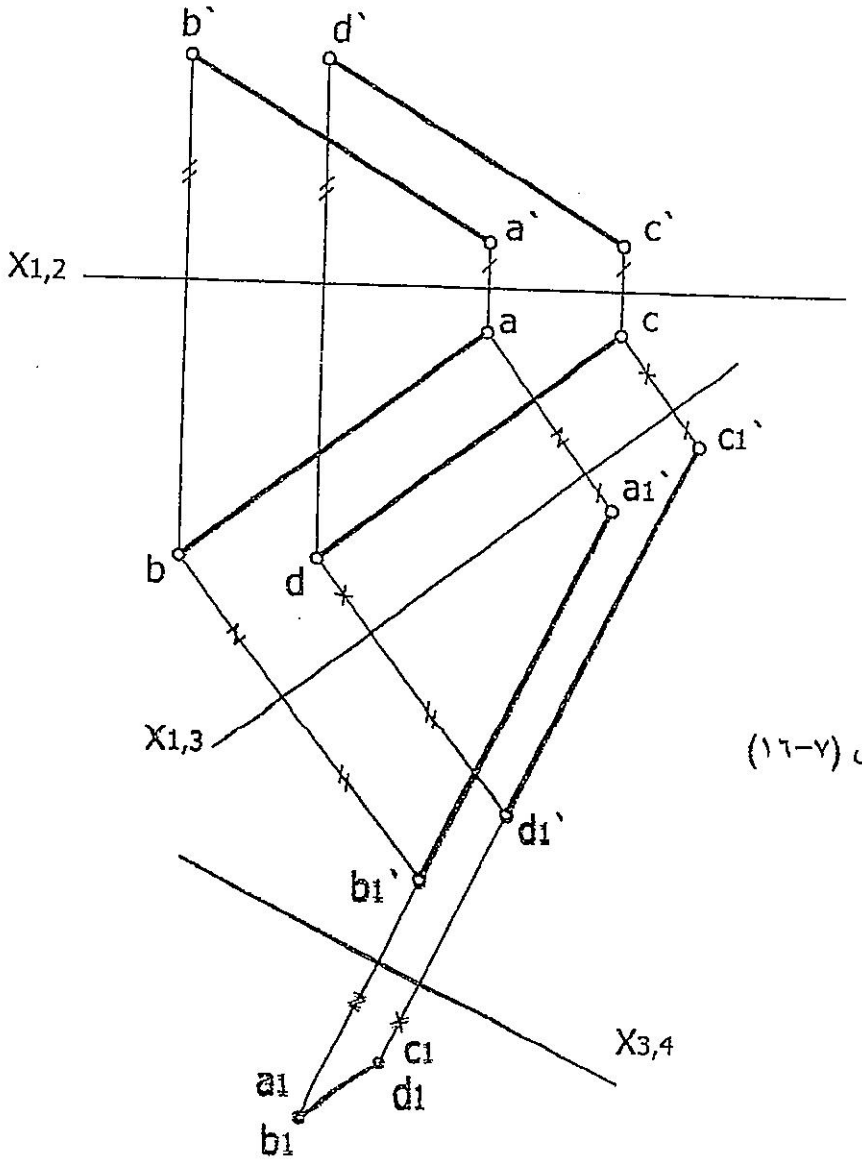


الشكل (٧-١٥)

١٣. إيجاد المسافة بين مستقيمين متوازيين :

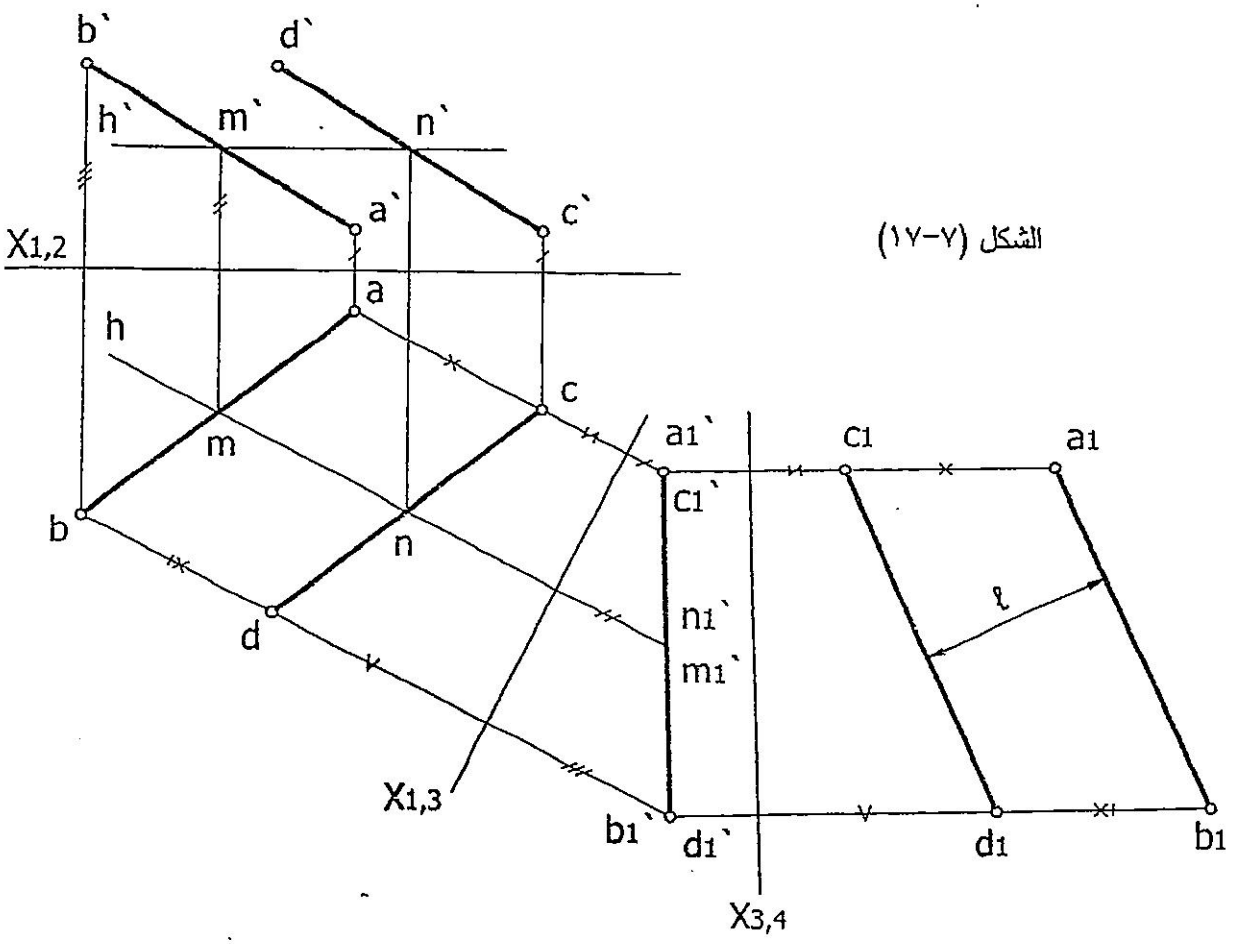
ليكن لدينا المستقيمين المتوازيين CD , AB ، لتعيين المسافة بينهما نتبع إحدى الطرق التالية :

- نـــأخذ نقطة ما على أحد المستقيمين ونعين بعدها عن المستقيم الآخر كما في المثال السابق .
- نجعـــل المستقيمين المفروضين عموديين على أحد مستويات الإسقاط (شاقوليين) كما في الشكل (٧-١٦) ، فمسقط كل منهما على المستوي المتعامد معهما عبارة عن نقطة والمسافة بين هاتين النقطتين تساوي المسافة المطلوبة .



الشكل (٧-١٦)

- نجعل المستوي المعين بالمستقيمين المتوازيين موازياً لأحد مستويات الإسـقاط (جبهياً) كما في الشكل (٧-١٧) ، وبالتالي المسافة ℓ بين المسقطين a_2b_2 , c_2d_2 على مستوي الإسقاط الموازي لهما يساوي المسافة المطلوبة .



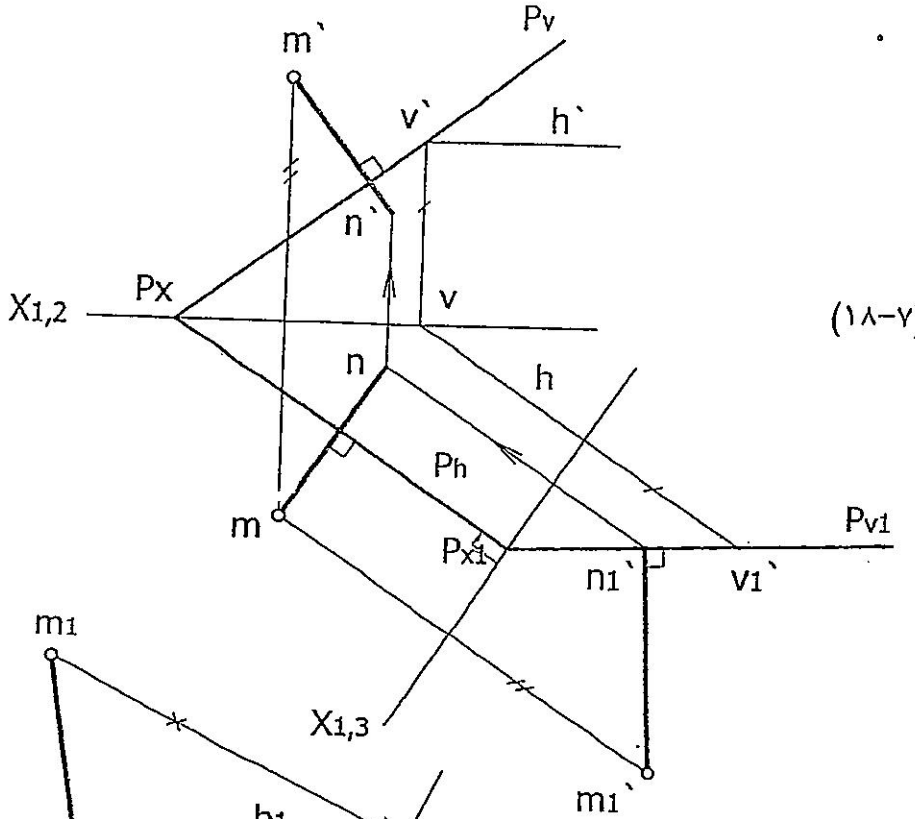
الشكل (٧-١٧)

١٤. إيجاد بعد نقطة عن مستوي :

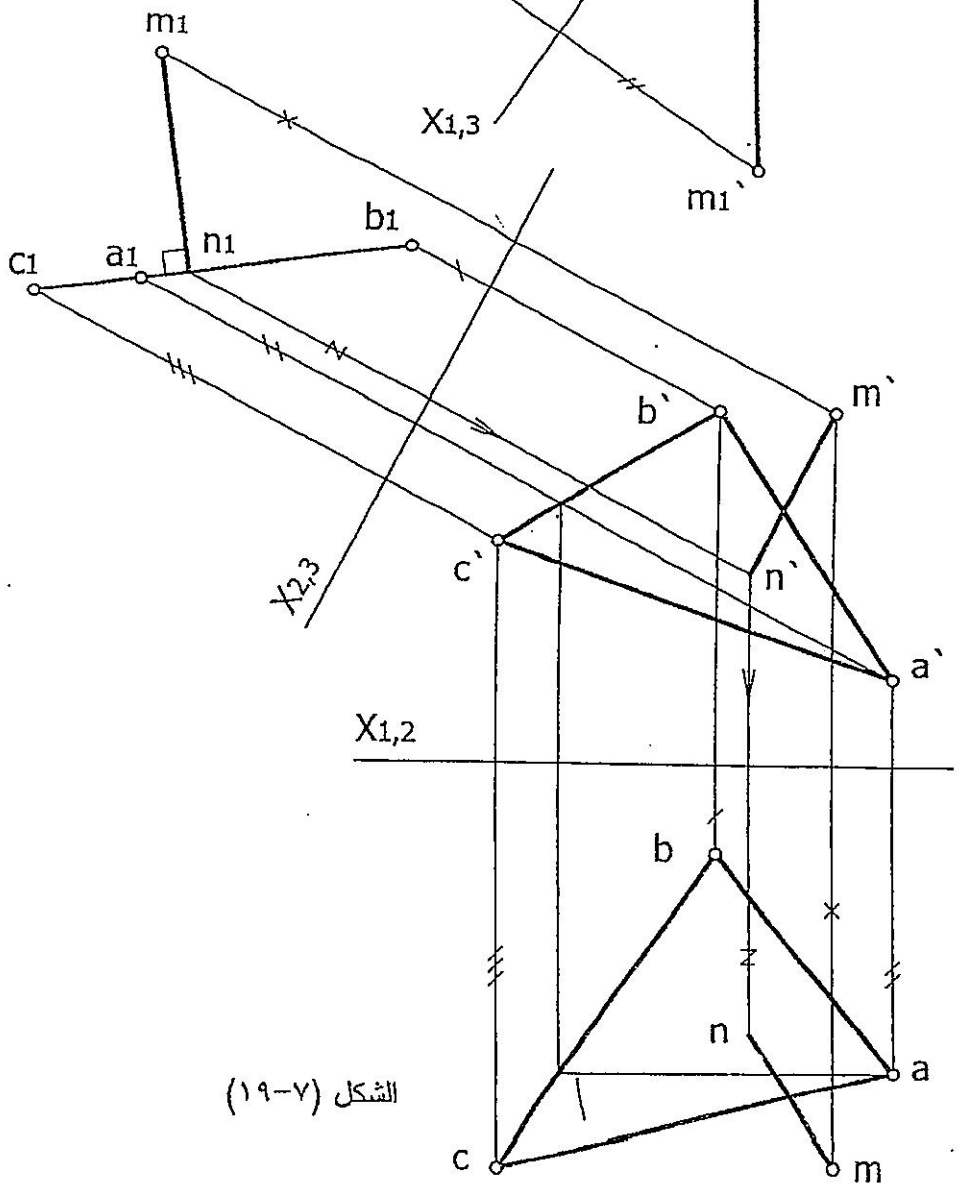
ليكن لدينا المستوي P والنقطة M (الشكل ٧-١٨) ، لتعيين بعد النقطة M عـن المسـتوي P نجعل هذا المستوي عمودياً على أحد مستويي الإسقاط (أمامياً) ونعين الوضع الجديد للنقطة M وهو m_1' , m . العمود المرسوم من هـذه الـنقطة علـى المستوي P هو مستقيم جبهي ($m_1'n_1'$, mn) ، طول مسقطه الجبهي $m_1'n_1'$ يساوي بعد النقطة M عن المستوي P .

يبيـن الشـكل (٧-١٩) كيفية إيجاد بعد النقطة M عن المستوي المعين بالمثلـث ABC حيـث جعلـنا هـذا المسـتوي شاقولياً ورسمنا عليه العمود

m_1n_1 , $m'n'$ وهو مستقيم أفقي وطول مسقطه الأفقي m_1n_1 يساوي بعد النقطة M عـــن مستوي المثلث ABC . وقد بينا على الرسم أيضاً كيفية رسم العمود mn , $m'n'$.



الشكل (٧-١٨)

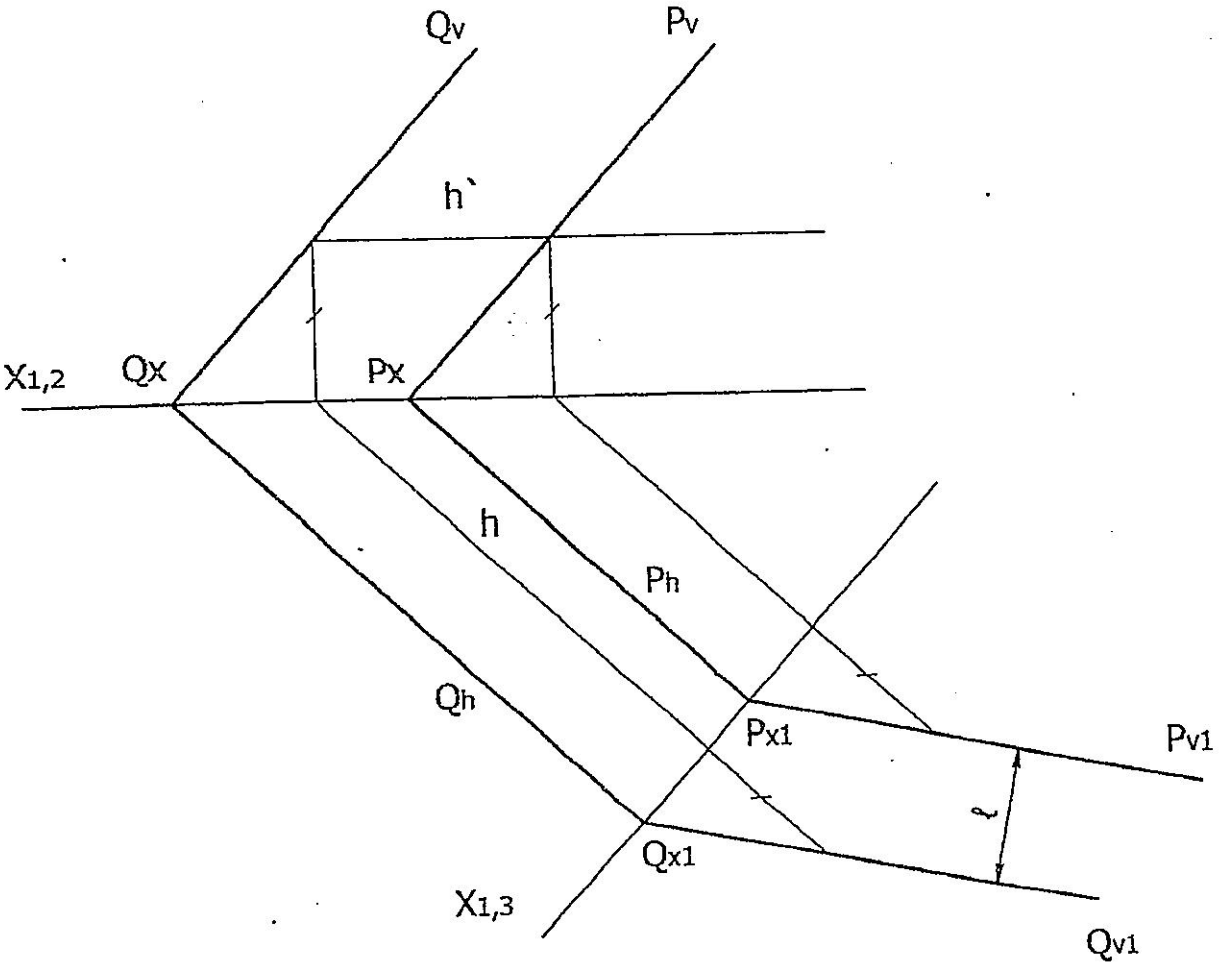


الشكل (٧-١٩)

١٥. تعيين المسافة بين مستويين متوازيين :

ليكن المستويين Q , P (الشكل ٧-٢٠) ، لتعيين المسافة بينهما نتبع إحدى الطرق التالية :

- نأخذ نقطة ما في أحد المستويين ونعين بعدها عن المستوي الآخر .
- نجعل المستويين المفروضين عموديين على أحد مستويي الإسقاط (أماميين) فالمسافة ℓ بين أثريهما الجبهيين Pv_1 , Qv_1 هي المسافة المطلوبة.

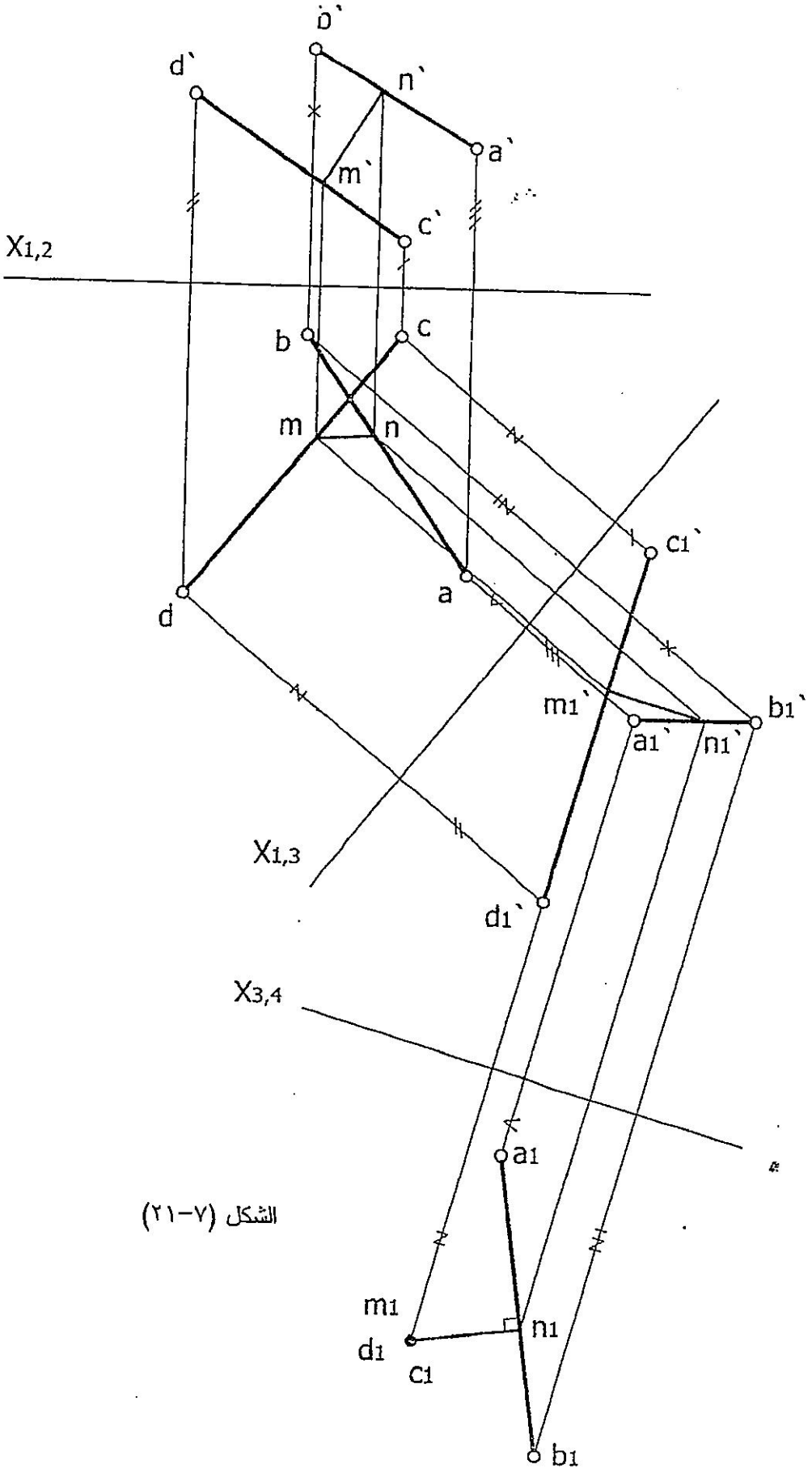


الشكل (٧-٢٠)

١٦. رسم العمود المشترك بين مستقيمين متخالفين وإيجاد المسافة بينهما :

ليكن لدينا المستقيمين المتخالفين AB , CD (الشكل ٧-٢١) ، لرسم العمود المشترك لهما وتعيين المسافة بينهما نجعل أحد المستقيمين المفروضين عمودياً على أحد مستويي الإسقاط وعندها يمكن رسم العمود المشترك بين المستقيمين المفروضين وتعيين المسافة بينهما بسهولة ، ويتم ذلك كما يلي :

- نجعل المستقيم CD عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي (شاقولياً) بحيث يأخذ الوضع $c_1'd_1'$, c_1d_1 ، ويأخذ المستقيم AB الوضع $a_1'b_1'$, a_1b_1 .
- نرسم العمود المشترك $m_1'n_1'$, m_1n_1 للمستقيمين المفروضين ، طول المسقط m_1n_1 يساوي المسافة الحقيقية بين هذين المستقيمين .
- نعين مسقطي العمود المطلوب $m'n'$, mn وذلك بإرجاع النقاط إلى المساقط الأصلية كما هو مبين بالرسم .



الشكل (٧-٢١)