جامعة حماة
كلية الهندسة المدنية

الميكانيك الهندسي
(1)

الدكتور المهندس
وسام الحزواني

2019-2018

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في الميكانيك الهندسي

Basic concepts on engineering mechanics

1-1 علم الميكانيك (Mechanics)

يعرف علم الميكانيك على أنه فرع من العلوم الفيزيائية الذي يدرس حركة الأجسام الواقعة تحت تأثير جملة قوى خارجية، حيث يعتبر السكون حالة خاصة من حالات الحركة. يقسم علم الميكانيك عادة إلى ثلاثة فروع: ميكانيك الأجسام الصلبة وميكانيك الأجسام القابلة للتشوه وميكانيك الموائع. سنتناول في هذا الكتاب ميكانيك الأجسام الصلبة فقط، والذي يشكل القاعدة العلمية لتصميم وتحليل الكثير من المنشآت والأجهزة الميكانيكية والكهربائية المستخدمة في المجالات الهندسية، كما تشكل دراسة ميكانيك الجسم الصلب الأرضية الجيدة لدراسة ميكانيك الأجسام القابلة للتشوه وميكانيك الموائع.

يقسم ميكانيك الأجسام الصلبة إلى قسمين: علم السكون (Statics) وعلم الحركة والتحريك (Dynamics). يهتم علم السكون بتوازن الأجسام الخاضعة لتأثير جملة قوى خارجية، بينما يدرس علم الحركة سرعة وتسارع الأجسام، ويدرس علم التحريك مسببات الحركة.

3-1 مفاهيم اساسية (Basic Concepts)

يبدو من المهم قبل البدء بدراسة ميكانيك الأجسام الصلبة أن نتعرف على معاني بعض المفاهيم والمبادئ الأساسية، حيث يستخدم ميكانيك الأجسام الصلبة المقادير الرئيسية الأربعة التالية:

1- **المسافة:** تستخدم المسافة لتحديد موقع الجسم بالنسبة لنقطة مرجعية وفق الإحداثيات المستخدمة. يجب بداية تحديد وحدة القياس ومن ثم نستطيع أخذ المسافات وأبعاد الشكل الهندسي للجسم المدروس.

2- **الزمن:** يستخدم الزمن لمعرفة تسلسل الأحداث. وهو غير مستخدم بدراسة علم السكون، بينما يعتبر المقدار الأساسي في دراسة الحركة والتحريك.

3- **الكتلة:** تعبر عن مقدار ما يحتويه الجسم من المادة وهي مهمة جداً لمقارنة فعل الأجسام كما أنها عامل أساسي في تحديد الجاذبية بين الأجسام، كما تعبر عن مقاومة الجسم لتغيير سرعته.

4- **القوة:** هي مقدار دفع أو سحب جسم لآخر، ويحدث هذا عندما يكون الجسمان متماسين، كدفع العامل لعربة أو صندوق، أو بعيدين عن بعضهما، كما في حالة سحب الأجسام الممغنطة للأجسام الفولاذية. تحدد القوة (شعاع القوة) في جميع الحالات بقيمتها واتجاهها ونقطة تطبيقها.

4-1 فرضيات أساسية (Basic Idealizations)

نستخدم في الميكانيك بعض الفرضيات المثالية لتبسيط الحالات المدروسة، وهي:

1-4-1 النقطة المادية: نقول عن جسم إنه نقطة مادية إذا استطعنا إهمال أبعاده، إما لأن جميع القوى المؤثرة على الجسم تمر من نقطة واحدة، أو لأننا نستطيع إهمال أبعاد هذا الجسم لصغرها مقارنة بباقي الأبعاد المدروسة. فالنقطة المادية بالتعريف هي جسم له كتلة ومهمل الأبعاد. عند دراسة الجسم على أنه نقطة مادية لا ندخل الشكل الهندسي للجسم في الدراسة.

2-4-1 الجسم الصلب: هو الجسم الذي لا تتغير الأبعاد بين نقاطه نتيجة تطبيق القوة عليه (غير قابل للتشوه)، وهو مثالي غير موجود في الواقع حيث أن جميع الأجسام إذا تعرضت إلى قوة فسوف تغير من شكلها وحجمها ولو بمقدار صغير جداً قد لا نستطيع ملاحظته بالعين المجردة في بعض المواد. عند دراسة تأثير القوى على الأجسام الصلبة لا نأخذ بعين الاعتبار خواص المادة المصنوعة منها.

3-4-1 القوة المركزة: لا يوجد عملياً قوة مركزة في نقطة، فالقوى تكون إما موزعة على الحجم كقوة الثقالة، حيث نفترض للسهولة بأن هذه القوة (قوة الثقالة الموزعة بانتظام على الحجم) هي قوة مركزة عند نقطة مركز الثقل، أو قد تكون القوة موزعة على السطح، سواء كان تأثير القوة على كامل سطح الجسم أو على جزء منه مهما كان صغيراً، وسنتعرف على كيفية تحديد شدة ونقطة تركيز هذه القوى في الفصل الرابع.

5-1 قوانين نيوتن (Newton's Laws)

تم تطوير ميكانيك الأجسام الصلبة ابتداء من قوانين نيوتن الثلاثة، والتي أوجدها نيوتن من ملاحظته للتجارب التي أجراها. وهي:

1-5-1 قانون نيوتن الأول (قانون الحالة)

يبقى الجسم في حالته الحركية سواءً كان ساكناً أو متحركاً حركة **مستقيمة** منتظمة، ما لم تجبره محصلة قوى خارجية غير معدومة على تغيير هذه الحالة.

2-5-1 قانون نيوتن الثاني

إذا أخضعت النقطة المادية لمحصلة قوى غير معدومة فإنها تكسبها تسارعاً له حامل واتجاه محصلة القوى المطبقة، ويتناسب طردا معها. يُعبَر عن هذا القانون رياضياً بالمعادلة:

$$\mathbf{F} = m.\mathbf{a} \qquad (1\text{-}1)$$

حيث:

- **F**: القوة المؤثرة على النقطة المادية مقاسة بالنيوتن (N).
- m: كتلة النقطة المادية مقاسة بالكيلو غرام (kg).
- **a**: تسارع النقطة المادية مقاسة بالمتر على مربع الثانية (m/sec^2).

3-5-1 قانون نيوتن الثالث

لكل فعل رد فعل يساويه بالقيمة ويعاكسه في الاتجاه ولهما نفس الحامل. فالصندوق المستند على أرض أفقية يؤثر على الأرض بقوة وزنه وترد عليه الأرض فتؤثر عليه بقوة رد فعل تساوي الوزن وتعاكسه بالاتجاه فيبقى الصندوق ساكناً تحت تأثير المحصلة المعدومة.

4-5-1 قانون نيوتن في الجاذبية

بعد فترة قصيرة من الانتهاء من القوانين الثلاثة وضع نيوتن قانونه في جاذبية الأجسام، وهو:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1\text{-}2)$$

حيث:

- F قوة التجاذب بين جسمين أو نقطتين ماديتين (N).
- G ثابت الجاذبية العام. وهو من التجارب:

$(G=66.73*10^{-12}\ m^3/kg\ sec^2)$

- m_1 ، m_2 كتلة كل من الجسمين أو النقطتين الماديتين (kg).
- r المسافة بين مركزي ثقل الجسمين الصلبين أو النقطتين الماديتين (m).

1-6 الوزن (Weight)

ينشأ بين أي نقطتين ماديتين أو جسمين قوة جذب متبادلة وفقاً للمعادلة (2-1)، ففي حالة جسم أو نقطة مادية وضعت على أو قريبة من سطح الأرض سينشأ بينهما قوة جذب، تسمى هذه القوة وزن النقطة المادية أو الجسم. الوزن هو قوة الجذب الوحيدة بين الأجسام التي سوف نأخذها بعين الاعتبار لأن باقي قوى التجاذب لن تكون محسوسة لصغرها.

إذا عوضنا في المعادلة (2-1) بدلاً عن ثابت الجاذبية العام وكتلة الأرض ونصف قطرها بثابت g نجد:

$$W = m.g \qquad (1\text{-}3)$$

واحدة الثابت g هي (m/sec^2) ويسمى بتسارع الجاذبية الأرضية. تتغير قيمة g مع تغير البعد عن مركز الأرض r. يؤخذ نصف قطر الأرض r عند سطح البحر وخط عرض 45، وهي القيم القياسية، القيمة الوسطى لنصف القطر فهو أكبر عند خط الاستواء وأصغر عند القطبين.

1-7 واحدات القياس (Units of Measurement)

إن المقادير الرئيسية الأربعة: المسافة والزمن والكتلة والقوة، مرتبطة مع بعضها بقانون نيوتن الثاني وبالتالي لا يمكن اختيار واحداتها بشكل عشوائي. واحدات المسافة والزمن والكتلة هي واحدات أساسية بينما واحدة القوة هي واحدة مشتقة من الواحدات [illegible]

1-8 الواحدات الدولية (SI Units)

نظام الواحدات الدولية (The International System of Units or SI Units) هو نظام مطور عن نظام القياس المتري المستخدم في نطاق واسع عالمياً. تقاس المسافة في الواحدات الدولية بالمتر (m)، والزمن بالثانية (sec)، وتقاس الكتلة بالكيلوغرام (kg). واحدة القوة هي النيوتن (N)، وهي مشتقة من قانون نيوتن الثاني ($F = m\,a$)، ومنه، من المعادلة (1-1)، فإن واحد نيوتن هو القوة المطلوبة لجعل جسم كتلته واحد كيلو غرام يتسارع بمقدار ($1\ m/sec^2$)، ومنه ($N=kg.m/sec^2$).

إذا أردنا تحديد وزن جسم بالنيوتن عند القيم القياسية لكتلة الأرض ونصف قطرها، ومن المعادلة (1-2)، نجد: ($g=9.80665\ m/sec^2$). ولكن عادة ما تؤخذ قيمة g بالحسابات $g = 9.81\ m/sec^2$، أي:

$$W = m.g\left(g = 9.81\frac{m}{sec^2}\right)$$

ومنه الجسم الذي كتلته 1 kg يزن 9.81 N، والذي كتلته 2 kg يزن 19.62 N وهكذا. كما تؤخذ القيم التقريبية لكتلة الأرض ($5.98*10^{24}$ kg)، وقطرها (12755 km).

المضاعفات و الأجزاء

البادئة	المقدار	الاختصار
يوكتو (yocto)	1×10^{-24}	y
زيبتو (zippto)	1×10^{-21}	z
أتو (atto)	1×10^{-18}	a
فيمتو (femto)	1×10^{-15}	f
بيكو (pico)	1×10^{-12}	p
نانو (nano)	1×10^{-9}	n
ميكرو (micro)	1×10^{-6}	μ
ميلي (milli)	1×10^{-3}	m
سنتي (centi)	1×10^{-2}	c
ديسي (deci)	1×10^{-1}	d
1		
ديكا (deca)	$1\times10^{+1}$	d
هيكتو (hecto)	$1\times10^{+2}$	h
كيلو (kilo)	$1\times10^{+3}$	k
ميغا (mega)	$1\times10^{+6}$	M
غيغا (gega)	$1\times10^{+9}$	G
تيرا (terra)	$1\times10^{+12}$	T
بيتا (peta)	$1\times10^{+15}$	P
إيكسا (exa)	$1\times10^{+18}$	E
زيتا (zetta)	$1\times10^{+21}$	Z
يوتا (yotta)	$1\times10^{+24}$	Y

Dr. Mohammad Al-Hattami

التحويل بين الواحدات

أولاً: واحدات الأطوال

	mm	m	km	inch	feet	yard
mm	1	1×10^{-3}	1×10^{-6}	0.03937	0.00328	0.001093
m	$1\times10^{+3}$	1	1×10^{-3}	39.37	3.28	1.093
km	$1\times10^{+6}$	$1\times10^{+3}$	1	39370	3280	1093
inch	25.4	0.0254	25.4×10^{-3}	1	0.08333	0.02778
feet	304.8	0.3084	0.3084×10^{-3}	12	1	0.3333
yard	914.4	0.9144	0.9144×10^{-3}	36	3	1

بعض واحدات الطول الشائعة وليست من جملة الواحدات الدولية

- الأنغستروم: ويرمز له A^o حيث $1A^o = 1\times10^{-10} meter$.
- الفرسخ (league): هي المسافة التي يقطعها الانسان في ساعة سيراً على الأقدام حيث $1league = 4828meter$
- الميل الدولي (statute mile) : حيث $1mile = 1609meter$
- الميل البحري (nautical mile): ويرمز له nm حيث $1nm = 1852meter$
- السنة الضوئية (light year):ويرمز له ly حيث $1ly = 4605\times10^{+15} meter$

Damascus University

ثانياً: واحدات المساحة

	mm^2	m^2	km^2	$Inch^2$	$feet^2$	$yard^2$
mm^2	1	$1x10^{-6}$	-----	$1550x10^{-6}$	$10.76x10^{-6}$	$1.196x10^{-6}$
m^2	$1x10^{+6}$	1	$1x10^{-6}$	1550	10.76	1.196
km^2	-----	$1x10^{+6}$	1	$1550x10^{+6}$	$10.76x10^{+6}$	$1.196x10^{+6}$
$Inch^2$	645.16	$6.452x10^{-4}$	$6.451x10^{-10}$	1	$6.944x10^{-3}$	$0.772x10^{-3}$
$feet^2$	92903	0.092903	$9.2903x10^{-8}$	12	1	0.3333
$yard^2$	83612	0.83612	$8.3612x\ 10^{-7}$	36	3	1

بعض واحدات المساحة الشائعة وليست من جملة الواحدات الدولية

- الآر (are) : $1are = 1\times10^{+2}\ meter$
- الفدان (acre): $1acre = 4046meter$
- الهكتار (hectare): $1hectare = 10000meter$

Dr. Wissam Al Hazmi

ثالثاً: واحدات الحجوم

	mm^3	m^3	km^3	$Inch^3$	$feet^3$	$yard^3$
mm^3	1	$1x10^{-9}$	$1x10^{-18}$	$6.102x10^{-5}$	------	----
m^3	$1x10^{+9}$	1	$1x10^{-9}$	61023	35.314	1.3079
km^3	-----	$1x10^{+9}$	1	-----	-----	$1308x10^{+9}$
$Inch^3$	16378	$1.638x10^{-5}$	-----	1	$5.787x10^{-4}$	$2.143x10^{-5}$
$feet^3$	$28.6x10^{+6}$	0.02831	$2.83x10^{-11}$	1728	1	0.037037
$yard^3$	$764.5x10^6$	0.764554	$7.6x10^{-10}$	46656	27	1

بعض واحدات الحجوم الشائعة وليست من جملة الواحدات الدولية

- الليتر (liter) : $1liter = 1\times10^{-3}m^3$
- برميل النفط (petroleum barrel): $1p.b. = 159liter$
- فنجان (cup): $1cup = 0.25liter$
- غالون أمريكي (US. gallon): $1gallon = 3.785liter$
- خزان (stere): $1stere = 1000liter$

Dr. Wisam Al Homsi

رابعاً: واحدات الكتلة

	gram	kilogram	dram	ounce	lb
gram	1	0.001	0.5643	0.03527	0.0022
kilogram	1000	1	564.3	35.273	2.204
dram	1.7718	1.7718×10^{-3}	1	0.0625	0.0039
ounce	28.349	0.028349	16	1	0.0625
lb	453.592	0.453592	256	16	1

بعض واحدات الكتلة الشائعة وليست من جملة الواحدات الدولية

- الطن المتري (metric ton): $1 metricton = 1 \times 10^{+3} kg$.

خامساً: واحدات الزوايا

	radian	grad	degree	minute	second
radian	1	63.662	57.295	-----	-----
grad	0.0157	1	0.9	-----	-----
degree	0.01745	1.11111	1	60	3600
minute	-----	-----	0.016666	1	60
second	-----	-----	0.000277	0.016666	1

Ahmad Alhaj Ali

سادساً: واحدات درجات الحرارة

	كلفن (K)	درجة مئوية (° C)	درجة فهرنهايت (° F)
كلفن $K =$	1	$t_c + 273.15$	$\frac{5}{9}\cdot\left({}^{o}F - 32\right) + 273$
درجة مئوية $t_c =$	$K - 273.15$	1	$\frac{5}{9}\cdot\left({}^{o}F - 32\right)$
درجة فهرنهايت ${}^{o}F =$	$\frac{9}{5}\cdot(K - 273) + 32$	$\frac{9}{5}\cdot t_c + 32$	1

Wissam Al-Hozimi

سابعاً: واحدات القوة

	gram-force	Kilogram-force	newton	kilonewton
gram-force	1	$1x10^{-3}$	$9.80665x10^{-3}$	$9.80665x10^{-6}$
Kilogram-force	$1x10^{+3}$	1	9.80665	$9.80665x10^{-3}$
newton	101.971	0.101971	1	$1x10^{-3}$
kilonewton	101971	101.971	$1x10^{+3}$	1

ثامناً: واحدات الضغط

	atmosphere	bar	kg.f/cm^2	pascal	pound/inch^2 (psi)
atm.	1	1.01325	1.03322	101325	14.69595
bar	0.98692	1	1.019716	100000	14.503773
g.f/cm^2	0.00096784	0.000980665	0.001	98.0665	0.0142233
kg.f/cm^2	0.967841	0.980665	1	98066.5	14.2233
N/m^2	9.8692x10^{-6}	0.00001	1.0197x10^{-5}	1	0.000145037
N/mm^2	9.8692	10	10.19716	1000000	145.03773
MPa	9.8692	10	10.19716	1000000	145.03773
pascal	9.8692x10^{-6}	0.00001	1.0197x10^{-5}	1	0.000145037
(psi)	0.068045	0.0689475	0.0703069	6894.757	1
(ksi)	68.045	68.9475	70.3069	6894757	1000
torr	0.0013157	0.001333	0.0013595	133.3223	0.019336

Dr. Wissam Kanbour

مسائل غير محلولة

المسألة 1-1

ما هي قيمة الوزن بالنيوتن لجسم كتلته:

1- 8 kg
2- 0.04 g
3- 760 Mg

المسألة 1-2

اكتب بالواحدات الدولية كل من كتلتك ووزنك وطولك.

المسألة 1-3

اكتب الواحدات المركبة التالية بما يقابلها بالواحدات الدولية مستخدما السابقة المناسبة:

1- m/ms
2- μkm
3- ks/mg
4- km.μN

المسألة 1-4

اكتب الأرقام التالية بأرقام بين 0.1 و 1,000 مستخدما السابقة المناسبة:

1- 45,320 kN
2- $568*10^5$ mm
3- 0.00563 mg

المسألة 1-5

احسب القيم التالية مستخدما السابقة المناسبة:

1- $(430\ kg)^3$
2- $(0.002\ mg)^2$
3- $(230\ mm)^3$

المسألة 1-6

اكتب الواحدات المركبة التالية بالشكل الصحيح في جملة الواحدات الدولية:

1- GN. μm

2- $kg/\mu m$
3- N/ks^2
4- $kN/\mu s$

المسألة 1-7

اكتب الواحدات المركبة التالية بالشكل الصحيح في جملة الواحدات الدولية:

1- $kN.\ \mu s$
2- Mg/mN
3- $MN/(kg.ms)$

المسألة 1-9

تحقق من تجانس واحدات المعادلة (1-2) بالواحدات الدولية ثم احسب قوة التجاذب بين كرتين متماستين لكل منهما كتلة 150 kg ونصف قطر 275 mm.

المسألة 1-10

احسب قوة التجاذب بين نقطتين ماديتين A وB، كتلتاهما 8 kg و12 kg، على التوالي، والمسافة بينهما 800 mm. قارن هذه القوة مع قوة جذب الأرض لكل من النقطتين الماديتين.

المسألة 1-11

اكتب القيم التالية بالشكل المناسب بالواحدات الدولية:

1- $(212\ mN)^2$
2- $(52800\ ms)^2$
3- $(548*10^6)^{1/2}\ ms$

المسألة 1-12

احسب ناتج الجداءات التالية بالواحدات الدولية مستخدما السابقة المناسبة:

1- (28 ms)(0.0458 Mm)/(384 mg)
2- (2.68 mm)(426 Mg)

المسألة 1-13

احسب كتلة كل من الأجسام المبين وزنها بالواحدات الدولية مستخدما السابقة المناسبة:

1- 20 mN
2- 150 kN
3- 60 MN

الفصل الثاني

الأشعة – شعاع القوة

Force Vectors

1-2 مقدمة (Introduction)

نتعرف في هذا الفصل على مفهوم القوة المركزة وطرائق جمع القوى. وبما أن القوى مقادير شعاعية، سنستخدم قوانين الجبر الشعاعي في التعامل معها. لنبدأ دراستنا بتعريف القيم الشعاعية والقيم السلمية، وبعدها نوضح بالتفصيل بعض القواعد الأساسية للجبر الشعاعي.

2-2 المقادير السلمية والمقادير الشعاعية (Scalars and Vectors)

يمكن التعبير رياضياً عن المقادير الفيزيائية في الميكانيك بشكل سلمي أو شعاعي.

1-2-2 المقدار السلمي

يسمى كل مقدار ممثلٍ بعدد مقداراً سلمياً، سواءً كان العدد موجب أو سالب ويكون متبوعاً بالواحدة المميزة له ،مثل الطول والحجم والكتلة والكثافة والشحنة الكهربائية، وتمثل عادة بأحرف (Small letter) a, b, c,... وتخضع للعمليات الرياضية الجبرية. وكمثال عن الأعداد السلمية مساحة أرض أو ارتفاع مدينة عن سطح البحر.....

تعين المقادير السلمية بـ:

- وحدة القياس للمقدار السلمي.
- العدد الذي يعين ما تحويه هذه الكمية من وحدة القياس.

2-2-2 المقدار الشعاعي

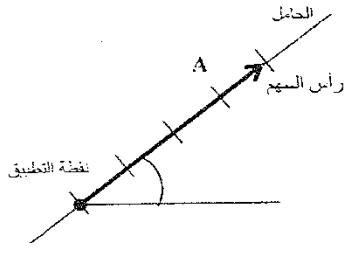
للمقدار الشعاعي نقطة تطبيق ومنحى وقياس واتجاه، وكمثال على المقادير الشعاعية القوة والسرعة والتسارع والقوة الكهربائية. يتعين المقدار الشعاعي بـ :

- وحدة القياس المميزة للمقدار.
- القيمة العددية لهذا المقدار من وحدة القياس.
- نقطة التطبيق وهي النقطة التي ينطلق منها الشعاع.
- الحامل خط عمل هذا الشعاع.
- الاتجاه.

تتعين سرعة جسم مثلاً بما يلي:

- وحدة القياس للسرعة، ولتكن مثلاً الميل بالساعة أو المتر بالثانية.
- العدد الذي يعين قياس السرعة بالنسبة لوحدة قياس السرع هذه.
- نقطة التطبيق وهي الجسم.
- حامل السرعة وهو المماس لمسار الحركة.
- اتجاه السرعة وهو مع اتجاه الحركة.

تشكل الشروط الأربعة الأخيرة المفهوم الهندسي للكميات المتجهة (أو للأشعة)، أياً كان نوع الكمية الاتجاهية. من أكثر الأشعة استخداماً في علم السكون (الستاتيك): شعاع الموضع وشعاع القوة وشعاع العزم. يمثل الشعاع تخطيطياً بسهم يحدد القيمة والاتجاه، منطلق من نقطة التطبيق ومحمول على الحامل، فيكون طول السهم هو قيمة الشعاع بمقياس رسم محدد، ويحدد الاتجاه برأس السهم والحامل بالزاوية (θ) التي يصنعها مع اتجاه مرجعي، كما هو ممثل تخطيطياً في الشكل (2-1). تمثل الأشعة عادة بحرف غامق فوقه شعاع $\bar{A}$ أو حرف **A** غامق **(Bold)** فقط، وهو ما سنستخدمه في هذا الكتاب، بينما قيمته بالشكل $|\bar{A}|$ أو فقط حرف A خفيف.



الشكل(2-1)

سنقابل ثلاثة أنواع للأشعة وهي:

1- الشعاع المقيد: وهو شعاع ثبتت فيه جميع عناصره، أي ثبت فيه الطول والمنحى والمبدأ والاتجاه. مثل: شعاع عزم القوة حول نقطة.

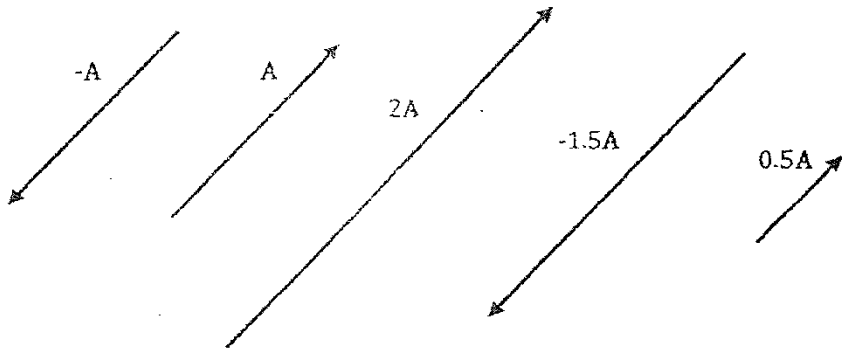
2- **الشعاع المنزلق:** وهو شعاع يمكن زلقه على المستقيم الحامل له، وبالتالي مبدؤه أي نقطة من حامله المقيد. مثل: شعاع القوة.

3- **الشعاع الطليق:** وهو شعاع ثبت فيه الطول والاتجاه والمنحى، وبقي مبدؤه غير معين في الفراغ. لذا يمكن إيجاد نقطة مشتركة لجميع الأشعة الطليقة في الفراغ. مثل: شعاع عزم المزدوجة.

3-2 العمليات على الأشعة (Vector Operations)

2-3-1 جداء شعاع بعدد سلمي

يعطي جداء الشعاع **A** بالعدد السلمي a شعاعاً طويلته (a.A) وحامله حامل الشعاع **A**. أما اتجاهه هو نفس اتجاه **A** إذا كان العدد السلمي a موجباً، وعكس اتجاه **A** إذا كان سالباً, الشكل (2-2). وبذلك يكون الشعاع **A**- هو نفسه الشعاع **A** مضروباً بالعدد السلمي (1-).



الشكل (2-2)

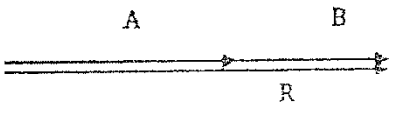
2-3-2 جمع الأشعة

ليكن لدينا الشعاعان **A** و**B**، يمكن جمع الشعاعين للحصول على شعاع المحصل **R** بالعلاقة الشعاعية:

$$R = A + B \qquad (2\text{-}1)$$

إذا كانت الأشعة على نفس الحامل الشكل (2-3)، عندها يصبح الجمع جمعاً جبرياً

$$R = A + B \qquad (2\text{-}2)$$

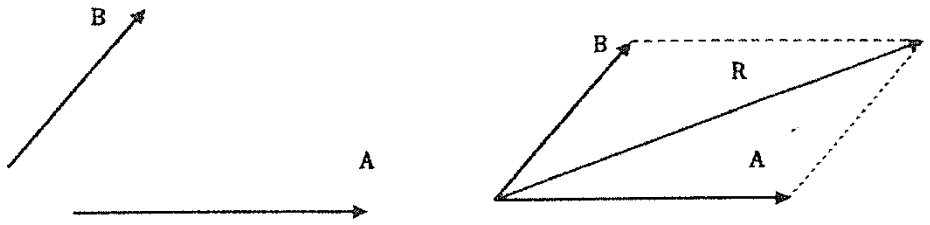


الشكل (2-2)

وإن لم تكن الأشعة على نفس الحامل فهناك طريقتان: طريقة متوازي الأضلاع وطريقة قاعدة المثلث.

2-3-2-1 طريقة متوازي الأضلاع

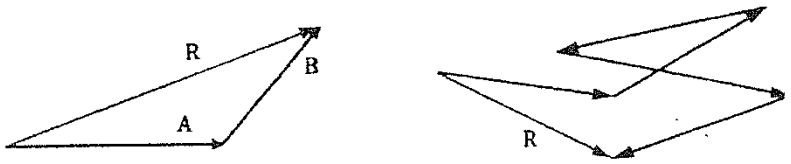
نرسم من نقطة مختارة شعاعاً يوازي الشعاع الأول **A** وبنفس الطول ومن نفس النقطة نرسم شعاعاً موازياً للشعاع الثاني **B** وبنفس قيمته، ثم نرسم من نهاية **A** خطاً موازياً لـ **B**، ومن نهاية **B** موازياً لـ **A**، فيتشكل لدينا متوازي أضلاع، الشكل (2-4)، يكون فيه الشعاع **R** المحمول على قطر متوازي الأضلاع والمنطلق من بداية الشعاعين هو الشعاع المحصل.



الشكل (2-4)

2-3-2-2 طريقة قاعدة المثلث

نرسم من نقطة ما شعاعاً يوازي الشعاع الأول **A** وبنفس الطول ومن نهايته نرسم شعاعاً يوازي الشعاع الثاني **B** وبنفس الطول، الشكل (2-5)، مجموع الشعاعين هو الشعاع **R** الذي بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الثاني. يمكن بهذه الطريقة جمع أي عدد من الأشعة برسم الشعاع الأول ومن نهايته نرسم بداية الشعاع الثاني ومن نهايته نرسم الثالث وهكذا حتى آخر شعاع، المجموع أو المحصلة هو الشعاع **R** الذي بدايته الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الأخير. تدعى هذه الطريقة لجمع عدة أشعة **بطريقة شال**.



الشكل (2-5)

3-2-3-2 مجموع ثلاثة أشعة غير واقعة في مستوٍ واحد

ليكن لدينا الأشعة الثلاثة **OA** و**AB** و**BC** غير الواقعة في مستوٍ واحد، الشكل (6-2). مجموعها حسب علاقة شال هو الشعاع **OC**، أي:

$$\mathbf{OC = OA + AB + BC}$$

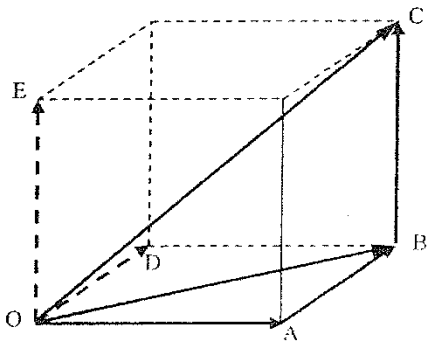
إذا أنشأنا من O شعاعاً **OD** يساوي **AB** ويوازيه، نجد:

$$\mathbf{OB = OA + AB = OA + OD}$$

وإذا أنشانا من O شعاعاً **OE** يساوي **BC** ويوازيه، نجد:

$$\mathbf{OC = OB + BC = OB + OE}$$

بالتالي: $\mathbf{OC = OA + AB + BC = OA + OD + OE}$



الشكل (6-2)

وإذا لاحظنا أن **OB** هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين **OA** و**OD**، وأن **OC** هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين **OB** و**OE** أدركنا أن **OC** هو قطر متوازي السطوح المنشأ على الأشعة **OA**، **OD** و**OE** والمساوية للأشعة المفروضة **OA** ، **AB** و**BC** على التوالي. وبذلك نجد طريقة هندسية لإنشاء مجموع ثلاثة أشعة.

3-3-2 خواص جمع الأشعة

إذا كان لدينا الأشعة **A**، **B**، **C** فإن:

- الجمع عملية تبديلية $\mathbf{A + B = B + A}$
- الجمع عملية تجميعية $\mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C}$
- إذا كان لدينا الشعاع

$$\mathbf{A = x\,i + y\,j + z\,k}$$

فإنه يوجد شعاع وحيد

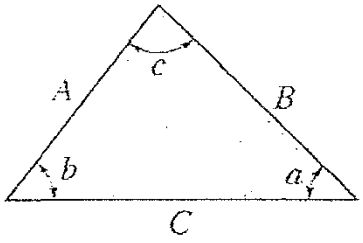
$$-\mathbf{A} = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$$

بحيث يكون

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = 0$$

والشعاعان **A-** و**A** متعاكسان.

ملاحظة: نذكر هنا بقانوني الجيب والتجيب في المثلث، حيث يستخدمان لحساب أطوال أضلاع وزوايا المثلث، وهما:



الشكل (2-7)

ليكن لدينا مثلث أطوال أضلاعه A وB وC، وزواياه a وb وc، كما في الشكل (2-7)، فإن:

قانون التجيب:
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

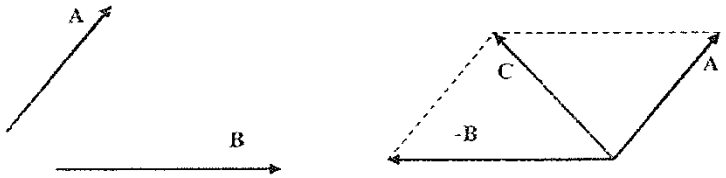
قانون الجيب:
$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

2-3-4 طرح الأشعة

حاصل طرح الشعاعين **A** و**B** هو شعاع ثالث بحيث:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (2\text{-}3)$$

وبالتالي طرح الشعاعين أصبح جمعاً للشعاع **A** والشعاع **(−B)** كما في الشكل (2-8).



الشكل (2-8)

2-3-5 تحليل (تفريق) شعاع

إن تحليل شعاع هو إيجاد عدة أشعة بحيث يكون مجموعها مساوياً للشعاع المفروض فهو عملية معاكسة لجمع الأشعة، ويمكن تحليل شعاع بأشكال مختلفة سنذكر منها:

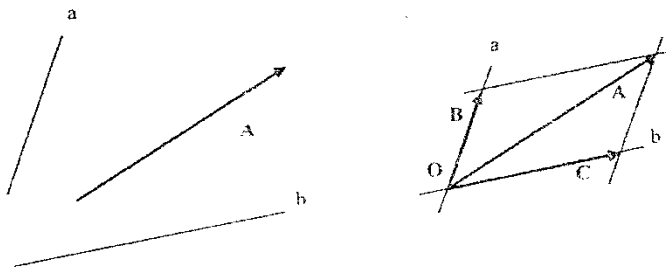
1- التحليل على محورين غير متوازيين.

2- التحليل على ثلاثة محاور غير واقعة في مستوٍ واحد.

2-5-3-1 تحليل شعاع على محورين غير متوازيين

يمكن تحليل (تفريق) الشعاع A إلى مركبتين (شعاعين) واقعتين على حاملين غير متوازيين a و b، الشكل (2-9)، بشرط أن يكون الشعاع والحاملين واقعين في مستوٍ واحد. نرسم من بداية الشعاع A (النقطة o فرضاً) محورين موازيين للحاملين a و b، ونرسم من نهاية الشعاع أيضاً محورين موازيين للحاملين، فيتشكل لدينا متوازي أضلاع قطره هو الشعاع المطلوب تحليله، وضلعا متوازي الأضلاع عند النقطة o هما المركبتان **B** و **C** للشعاع **A**، بحيث:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

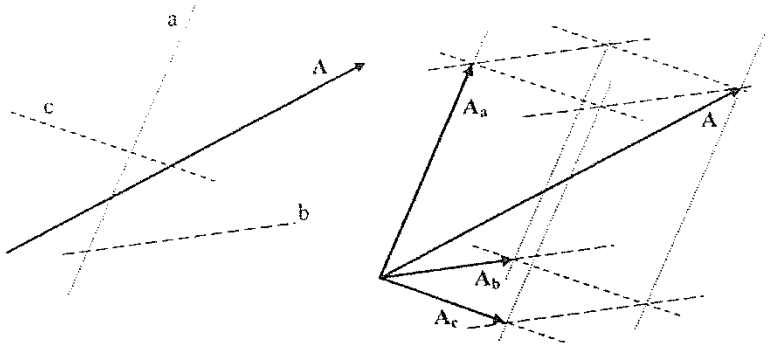


الشكل (2-9)

2-5-3-2 التحليل على ثلاثة محاور غير واقعة في مستوٍ واحد

لتحليل شعاع إلى ثلاث مركبات (ثلاثة أشعة) على ثلاثة محاور غير واقعة في مستوٍ واحد، نرسم الشعاع **A** المطلوب تحليله، الشكل (2-10)، ومن كل من بدايته ونهايته نرسم ثلاثة محاور موازية لمحاور الأشعة الثلاثة a و b و c المعطية، ثم نكمل متوازي السطوح الذي قطره الشعاع **A** المطلوب تحليله، الأشعة $\mathbf{A_a}$ و $\mathbf{A_b}$ و $\mathbf{A_c}$ المحمولة على أضلاع متوازي السطوح الثلاثة المجاورة لمبدأ الشعاع **A** هي الأشعة المطلوبة. بحيث:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_a} + \mathbf{A_b} + \mathbf{A_c}$$



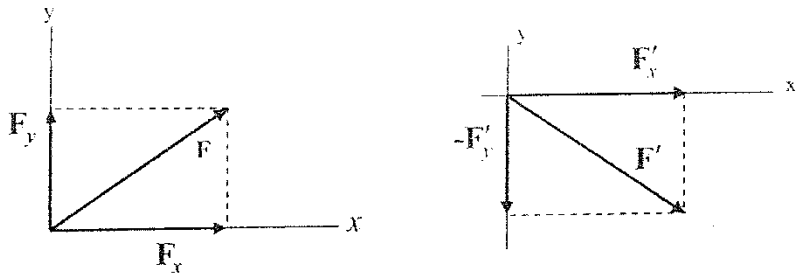
الشكل (2-10)

4-2 شعاع القوة (Force vector)

نستطيع أن نثبت بخبرة بسيطة أن القوة مقدار شعاعي، حاملها خط عمل القوة واتجاهها باتجاه القوة، وطول الشعاع (الطويلة) يعبر عن شدة القوة بمقياس مناسب. يوجد عادة نقطة تطبيق للقوة ولكن يمكن دائماً زلق القوة على حاملها مما يقلل من أهمية نقطة التطبيق. بما أننا نعبر عن القوى بالأشعة فجميع العمليات التي تطبق على الأشعة تطبق على شعاع القوة، فعندما نعلق مثلاً جسماً بطرف النابض نرى أن نقطة التعليق تحركت من موضع إلى آخر، فثقل الجسم قوة أثرت في نقطة التعليق، فحركتها باستقامة الشاقول مسافة تتناسب مع ثقل الجسم، باتجاه الشاقول من الأعلى إلى الأسفل. نسمي نقطة التعليق بنقطة تطبيق القوة، واستقامة الشاقول بمنحى القوة، والاتجاه من أعلى إلى أسفل باتجاه القوة، وثقل الجسم بشدة القوة. بهذه العناصر الأربعة يمكن تعيين شعاع القوة لهذا تمثل القوة هندسيا بشعاع (يمكن اعتبار نقطة تطبيق القوة أي نقطة من الحامل).

2-4-1 تحليل القوى في المستوي الديكارتي

لسهولة جمع وطرح القوى المستوية يفضل تحليل القوى إلى مركبتين على محورين ثابتين، x و y مثلاً. يبين الشكل (2-11) تحليل القوة $\mathbf{F}$ والقوة $\mathbf{F}'$ إلى مركبتين $\mathbf{F}_x$ ، $\mathbf{F}_y$ و $\mathbf{F}'_x$ ، $\mathbf{F}'_y$ على التوالي. وهنا يجب أن نعرف اتجاهاً موجباً للمحورين x و y، فتكون مركبة الشعاع على المحور موجبة إذا كانت مع اتجاه هذا المحور وتكون سالبة إذا كانت عكس اتجاه المحور. نلاحظ أن جميع المركبات موجبة ما عدا المركبة $\mathbf{F}'_y$ فهي سالبة لأنها عكس اتجاه المحور y.



الشكل (2-11)

بما أن حامل كل من مركبات القوة معلوم (المحور الإحداثي)، فإنه يمكن أن نستعيض عن مركبات القوى بقيم جبرية تساوي طويلة مركبة الشعاع بحيث تكون موجبة إذا كان اتجاه الشعاع مع المحور وسالبة إذا كان الاتجاه عكس المحور.

كما يمكن أن نعبر عن مركبات القوة باستخدام الأشعة الواحدية للمحاور الإحداثية الديكارتية. الأشعة الواحدية للمحورين y،x (في المستوي)، هي **i** و**j**، على التوالي، الشكل (2-12). قيمة هذه الأشعة تساوي الواحد وليس لها واحدة, وتكون موجبة إذا كانت باتجاه المحور وسالبة إذا كانت عكسه. كما نلاحظ في الشكل (2-12)، إن مركبات القوة F_x وF_y لها قيم سلمية موجبة. ومنه يمكن أن نكتب القوة **F** في الجملة الديكارتية بالمعادلة:

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} \qquad (2\text{-}4)$$

أما القوة F′ فتكتب بالشكل: $\mathbf{F}' = F'_x\,\mathbf{i} + F'_y\,(-\mathbf{j})$

$$\mathbf{F}' = F'_x\,\mathbf{i} - F'_y\,\mathbf{j}$$

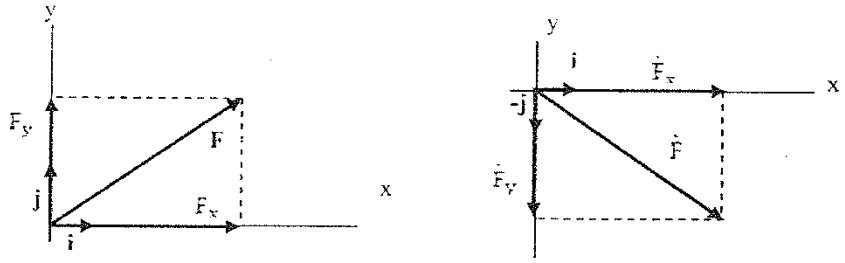
تسمى هذه العلاقة بالصيغة الشعاعية أو التحليلية لشعاع القوة.

وتحسب شدة شعاع القوة في المستوي الديكارتي بالعلاقة:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

وزاوية شعاع القوة مع المحور x بالعلاقة:

$$tan\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{أو} \quad cos\,\alpha = \frac{F_x}{F}$$



الشكل (2-12)

2-4-2 جمع القوى في المستوي الديكارتي

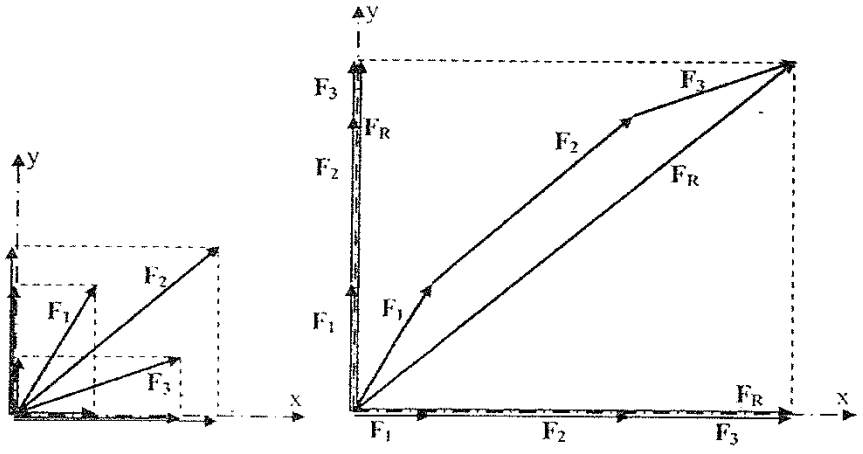
لجمع القوى المكتوبة بالصيغة الشعاعية في الجملة الإحداثية الديكارتية، كالقوى الموضحة بالشكل (2-13)، نحلل كل قوة من هذه القوى إلى مركباتها على المحاور الإحداثية، ثم نقوم بجمع هذه المركبات على كل محور جمعاً جبرياً (المركبة المتجهة باتجاه المحور الإحداثي موجبة, وسالبة إذا عاكسته)، المركبتان الناتجتان هما مركبتا شعاع المجموع.

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots \qquad (2\text{-}5)$$

$$F_{Rx} = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots \qquad (2\text{-}6)$$

$$F_{Ry} = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots \qquad (2\text{-}7)$$

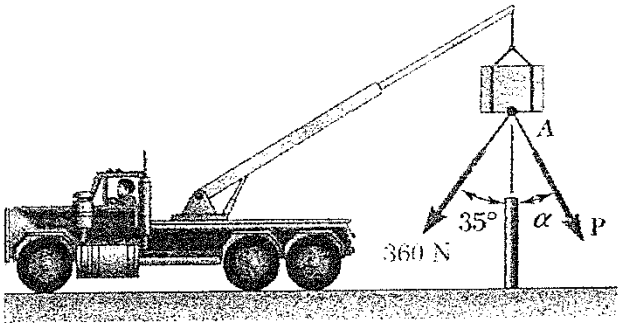
$$\mathbf{F}_R = F_{Rx}\,\mathbf{i} + F_{Ry}\,\mathbf{j} \qquad (2\text{-}8)$$



الشكل (2-13)

مثال 2-1

تستخدم القوتان P و F=360 N المبينتان بالشكل (a) لتثبيت الصندوق المعلق، إذا علمت أن P=300 N، احسب الزاوية α اللازمة لكي تكون القوة المكافئة (المحصلة) للقوتين شاقولية. احسب قيمة هذه القوة.



الشكل (a)

الحل:

أولاً- تخطيطياً:

نتبع الخطوات التالية (بعد أخذ مقياس الرسم 1 cm لكل 100 N):

1- نرسم خطاً شاقولياً يمثل حامل المحصلة **R**، انظر الشكل (b).

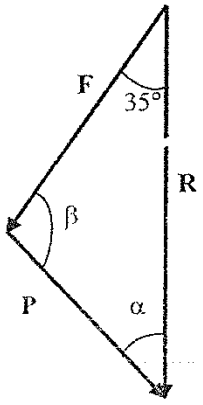
2- نرسم خطاً يصنع زاوية 35° مع الشاقول طوله 3.6 cm يمثل القوة F=360 N.

3- نفتح الفرجار بمقدار 3 cm (قيمة القوة P=300 N)، نضع رأس الفرجار في نهاية القوة ونرسم قوساً يقطع الشاقول (حامل المحصلة) في نقطة.

4- نرسم خطاً من نهاية القوة **F** حتى نقطة التقاطع، هذا الخط يمثل القوة **P**.

5- الزاوية بين القوة **P** والشاقول هي الزاوية α.

6- نقيس الطول من بداية القوة **F** حتى نهاية القوة **P** على الشاقول، ونضرب بمقياس الرسم لنحصل على قيمة القوة المكافئة (المحصلة) **R**.



الشكل (b)

ثانياً– تحليلياً باستخدام قاعدة المثلث:

نطبق قانون الجيب على المثلث المبين بالشكل (b):

$$\frac{P}{\sin 35^o}=\frac{F}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{300N}{\sin 35^o}=\frac{360N}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha=0.68829\Rightarrow\alpha=43.5^o$$

ومنه الزاوية β:

$$\beta=180-(35+43.5)=101.5^o$$

لحساب القوة المحصلة **R** نعوض في قانون الجيب:

$$\frac{300N}{\sin 35^o}=\frac{R}{\sin 101.5^o}\Rightarrow R=513N$$

ثالثاً – شعاعياً:

نكتب القوى بصيغة شعاعية، الشكل (c).

$$\mathbf{F}=-360\sin 35^o\,\mathbf{i}-360\cos 35^o\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}=-206.5\mathbf{i}-294.9\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{P}=300\sin\alpha\,\mathbf{i}-300\cos\alpha\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}=-R\,\mathbf{j}$$

القوة المكافئة (المحصلة) هي المجموع الشعاعي للقوتين **P** و**F**:

$$\mathbf{R}=\mathbf{F}+\mathbf{P}$$

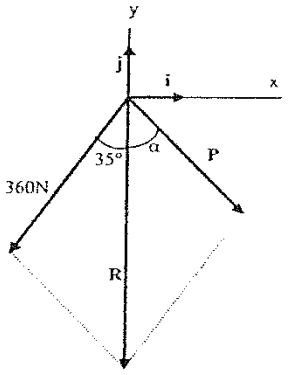
$$-R\mathbf{j}=(-206.5\mathbf{i}-294.9\,\mathbf{j})+(300\sin\alpha\,\mathbf{i}-300\cos\alpha\,\mathbf{j})$$

$$-R\mathbf{j}=(-206.5+300\sin\alpha)\mathbf{i}-(300\cos\alpha+294.9)\mathbf{j}$$

بمساواة أمثال **i** و**j** نجد:

$$0=(-206.5+330\sin\alpha)\Rightarrow\alpha=43.5^o$$

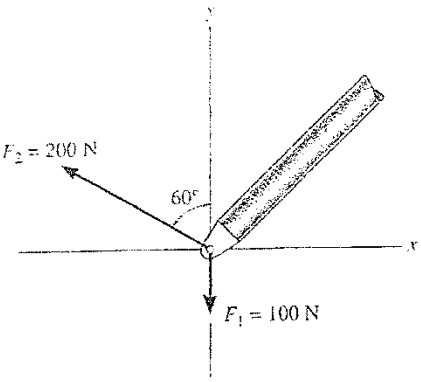
$$-R=-(300\cos\alpha+294.9)\Rightarrow R=513\text{N}$$



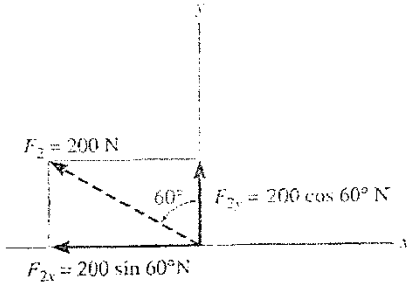
الشكل (c)

مثال محلول 2-2

جد مركبات القوتين $\mathbf{F}_1$ و$\mathbf{F}_2$ الموضحتين بالشكل (a)، على المحورين x و y .



الشكل (a)



الشكل (b)

الحل:

بما أن القوة $\mathbf{F}_1$ محمولة على المحور y وتعاكس اتجاهه وقيمتها 100 N ، فإن القيم السلمية للمركبات هي:

$$F_{1x} = 0 \qquad F_{1y} = -100\ N$$

أو بشكل آخر:

$$F_{1x} = 0. \qquad F_{1y} = 100\ N.\downarrow$$

بالنسبة للقوة $\mathbf{F}_2$ نحللها إلى مركبتين على المحورين x و y، كما في الشكل (b)، تحدد قيمة هاتين المركبتين بإسقاط القوة على المحاور (نلاحظ أن المسقط على x عكس اتجاه المحور بينما المسقط على y مع اتجاه المحور)، نجد:

$$F_{2x} = -200 sin\ 60^o = -173\ N = 173\ N \leftarrow$$
$$F_{2y} = 200 cos\ 60^o = 100\ N = 100\ N \uparrow$$

الصيغة الشعاعية للقوى:

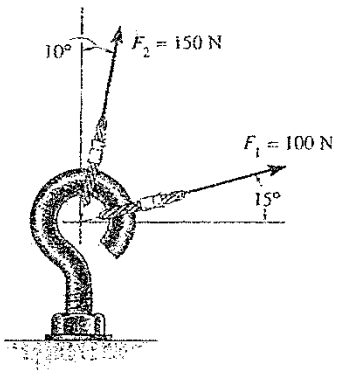
بما أننا وجدنا مركبات القوتين على المحاور الإحداثية x و y ، أصبح من السهل إيجاد الصيغ الشعاعية التالية:

$$\mathbf{F}_1 = 0\mathbf{i} + 100(-\mathbf{j}) = \{-100\,\mathbf{j}\}\ \text{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = 173(-\mathbf{i}) + 100\,\mathbf{j} = \{-173\mathbf{i} + 100\,\mathbf{j}\}\ \text{N}$$

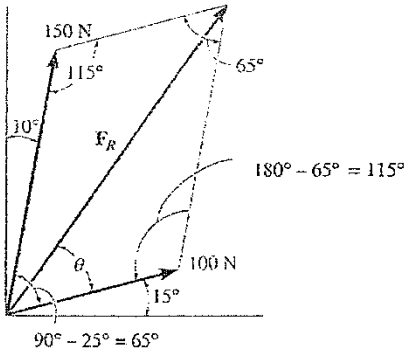
مثال 2-3

جد شدة واتجاه محصلة القوتين $\mathbf{F}_1$ و$\mathbf{F}_2$ المطبقتين على البرغي الخطاف المبين بالشكل (a).

الحل:



(a)



(b)

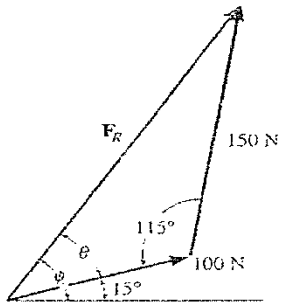
أولاً: تخطيطياً باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع، من الشكل (b) يمكن قياس طويلة حاصل جمع القوتين (شدة المحصلة F_R)، والزاوية θ، (بالطبع زاوية المحصلة مع المحور x هي (θ+15)).

ثانياً: تحليلياً باستخدام قوانين الجيب والتجيب في المثلث، الشكل (c)، نحسب F_R من قانون التجيب:

$$F_R = \sqrt{100^2 + 150^2 - 2(100)(150)\cos 115^\circ}$$

$$F_R = \sqrt{10000 + 22500 - 30000(0.4226)} = 212.6 \text{ N}$$

ومن قانون الجيب:



(c)

$$\frac{150}{\sin\theta} = \frac{212.6}{\sin 115^\circ}$$

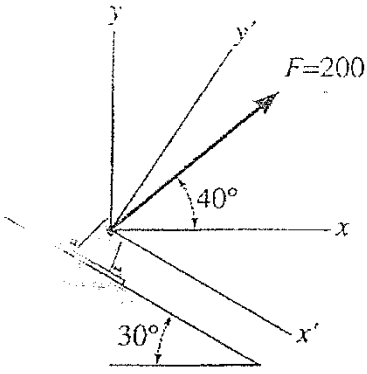
$$\sin\theta = \frac{150}{212.6}(0.9063) = 0.64$$

$$\Rightarrow \theta = 39.8^\circ$$

ومنه زاوية المحصلة مع الأفق:

$$\phi = \theta + 15 = 39.8 + 15 = 54.8^\circ$$
$$F_R = 212.6 \text{ N} \angle 54.8$$

مثال 2-4



(a)

حلل القوة **F** المؤثرة على الحلقة المبينة بالشكل (a) إلى مركبتين:

1- على المحورين المتعامدين x, y.

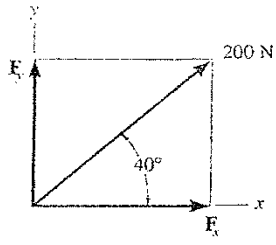
2- على المحورين غير المتعامدين x', y.

الحل:

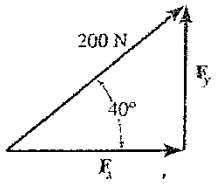
لتحليل القوة **F** إلى مركبتين سنستخدم قانون متوازي الأضلاع، ولحساب القيم العددية سنستخدم قوانين المثلثات.

الطلب الأول:

من متوازي الأضلاع, الشكل (b), العلاقة الشعاعية: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ ، ومن المثلث القائم الشكل (c)، يمكن كتابة:



(b)



(c)

$$F_x = 200\cos 40^\circ = 153 \text{ N}$$
$$F_y = 200\sin 40^\circ = 129 \text{ N}$$

الطلب الثاني:

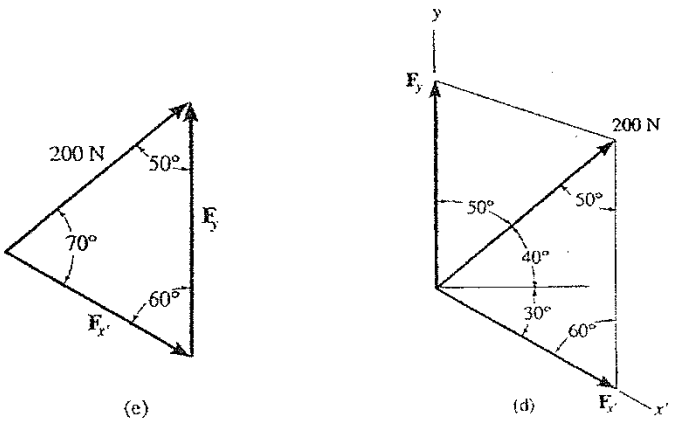
من متوازي الأضلاع, الشكل (d), العلاقة الشعاعية: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}_y$ ، ومن المثلث الشكل (e)، باستخدام قانون الجيب يمكن كتابة:

$$\frac{F_{x'}}{\sin 50^\circ} = \frac{200}{\sin 60^\circ}$$

$$F_{x'} = 200\left(\frac{\sin 50^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = 177 \text{ N}$$

$$\frac{F_y}{\sin 70^\circ} = \frac{200}{\sin 60^\circ}$$

$$F_y = 200\left(\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = 217 \text{ N}$$



مثال 2-5

تؤثر القوة **F** على العقدة A، نقطة تمفصل الذراعين AB وAC، الشكل (a). احسب الزاوية θ اللازمة لتكون مركبة القوة **F** على AC تساوي 400 N وتتجه من A إلى C، احسب مركبة القوة **F** على AB.

الحل:

للتمكن من الحل نبدأ بالحل التخطيطي ولو بدقة منخفضة، بعد الحصول على مخطط القوى سيسهل علينا إيجاد الحل تحليلياً وبالدقة المطلوبة.

ولرسم متوازي أضلاع القوى نرسم من نقطة A الشكل (b)، محورين موازيين للذراعين AB وAC، ثم نأخذ من A على AC شعاع قوة $\mathbf{F}_{AC}$ يساوي 400N، من نهاية هذا الشعاع نرسم موازياً للمحور AB، لتحديد قيمة القوة **F** الممثلة بقطر متوازي

الأضلاع نفتح الفرجار بطول يساوي 500N (حسب مقياس الرسم)، ونركزه في A ونرسم قوساً يقطع الخط الموازي لـ AB. نرسم من هذه النقطة خطاً أفقياً موازياً لـ AC, يقطع AB في نقطة هي نهاية الشعاع $\mathbf{F}_{AB}$، مركبة القوة F على AB.

لإيجاد قيمة الزاوية θ تحليلياً نطبق قانون الجيب على المثلث المبين في الشكل (c)، نجد:

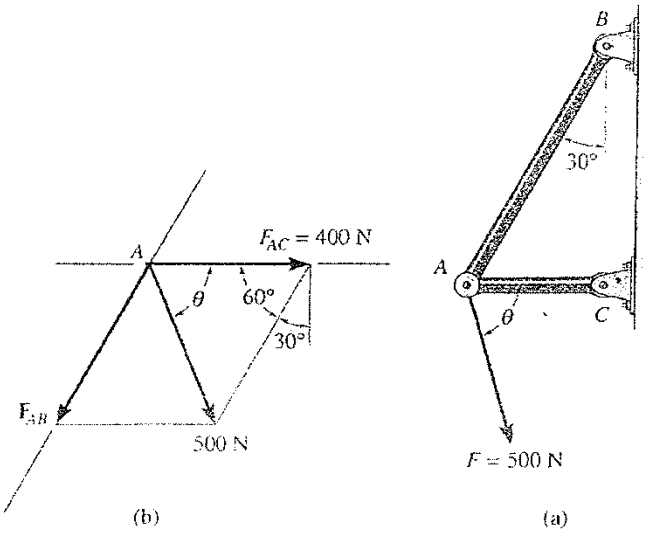
$$\frac{F_{AC}}{\sin\phi} = \frac{F}{\sin 60^o} \Rightarrow \frac{400}{\sin\phi} = \frac{500}{\sin 60^o}$$

$$\sin\phi = \frac{400}{500}\left(\sin 60^o\right) \Rightarrow \phi = 43.9^o$$

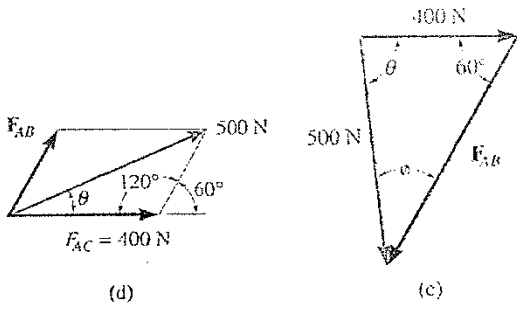
$$\theta = 180^o - \left(\phi + 60^o\right) = 76.1^o$$

$$\frac{F}{\sin 60^o} = \frac{F_{AB}}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{500}{\sin 60^o} = \frac{F_{AB}}{\sin 76.1^o}$$

$$F_{AB} = 500\frac{\sin 76.1^o}{\sin 60^o} = 561\ N$$



كما توجد قيمة أخرى للزاوية θ تحقق القيمة المطلوبة لـ AC كما في الشكل (d)، وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمتها θ=16.1°. و F_{AB}=161 N.



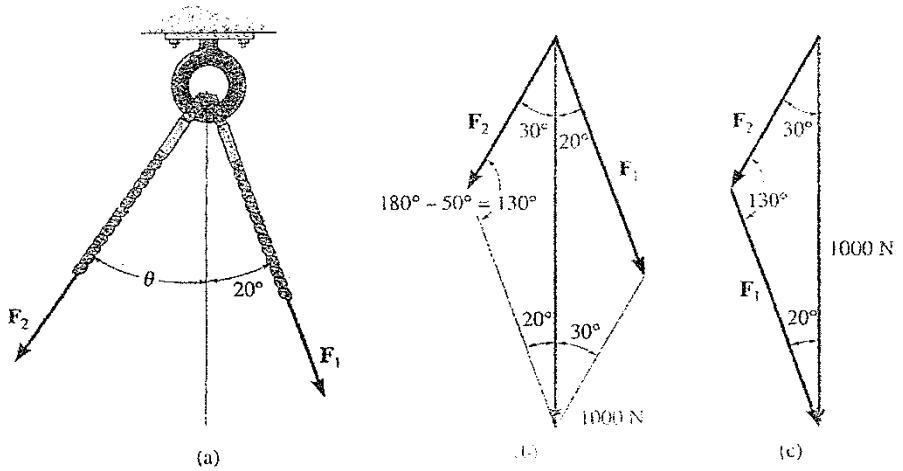
مثال 2-6

تخضع الحلقة المبينة بالشكل (a) للقوتين $\mathbf{F_1}$ و$\mathbf{F_2}$. إذا علمت أن محصلة هاتين القوتين شاقولية باتجاه الأسفل وشدتها 1kN، احسب:

1- شدة القوتين $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ إذا كانت $\theta=30°$.

2- قيمة الزاوية θ التي تكون عندها شدة القوة $\mathbf{F_2}$ أصغر ما يمكن.

الحل:



الطلب الأول: كما ذكرنا سابقاً نبدأ تخطيطياً برسم متوازي الأضلاع الشكل (b)، حيث نرسم خط شاقولي طوله يساوي شدة المحصلة F_R=1kN. ومن بدايته ونهايته نرسم محورين موازيين للقوتين $\mathbf{F_1}$ و$\mathbf{F_2}$، فيتشكل متوازي الأضلاع. لحساب شدة القوتين $\mathbf{F_1}$ و$\mathbf{F_2}$ نطبق قانون الجيب على المثلث، الشكل (c)، نجد:

$$\frac{F_1}{\sin 30^o} = \frac{1000}{\sin 130^o} = \frac{F_2}{\sin 20^o}$$

$$F_1 = 1000\frac{\sin 30^o}{\sin 130^o} = 653\ N$$

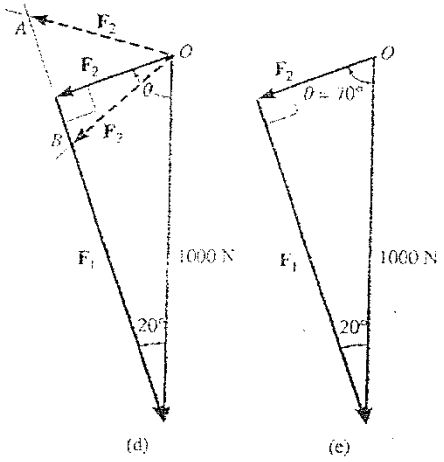
$$F_2 = 1000\frac{\sin 20^o}{\sin 130^o} = 446\ N$$

الطلب الثاني: إذا كانت الزاوية θ مجهولة والمطلوب الحصول على $\mathbf{F_2}$ أصغرية، نعلم أن العمود هو اقصر مسافة بين نقطة وخط، الشكل (d). إذاً يجب أن تكون الزاوية بين القوتين قائمة، وبالتالي الزاوية θ=90°-20°=70°.

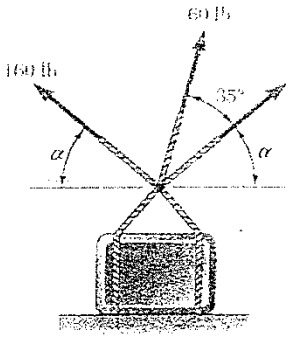
لحساب شدة القوتين $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ من قانون الجيب الشكل (e)، نجد:

$$F_1 = 1000\sin 70^\circ = 940\ \text{N}$$

$$F_2 = 1000\sin 20^\circ = 342\ \text{N}$$



مثال 2-7



احسب القوة المحصلة المكافئة للقوى المطبقة على الكتلة المبينة بالشكل، إذا علمت أن α=50°.

الحل:

لحساب القوة المحصلة نجمع مساقط هذه القوى على المحور x نجد:

$$\rightarrow \sum F_x = 140\cos 50^o + 60\cos\left(50^o + 35^o\right) - 160\cos 50^o$$
$$\sum F_x = R_x = -7.6\ N$$

مساقط القوى على المحور y نجد:

$$\uparrow \sum F_y = 140\sin 50^o + 60\sin\left(50^o + 35^o\right) + 160\sin 50^o$$
$$\sum F_y = R_y = 289.6\ N$$

القوة المحصلة للقوى الثلاث هي:

$$R = \sqrt{(-7.6)^2 + (289.6)^2} = 289.7\ \text{N}$$

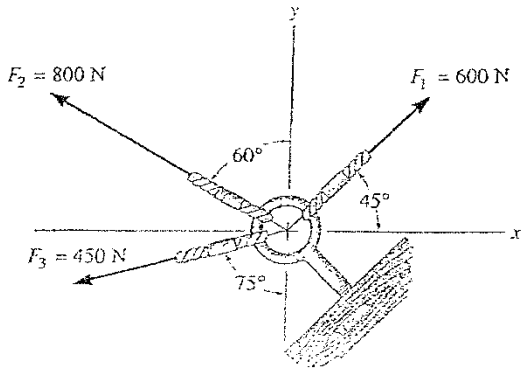
والزاوية التي تصنعها القوة المحصلة مع المحور x تساوي:

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{289.6}{-7.6} = -38.1$$
$$\alpha_R = \tan^{-1}(-38.1) = 91.5^o$$
$$R = 289.7\ N \text{ at } 91.5^o$$

مسائل غير محلولة

المسألة 2-1

احسب شدة واتجاه القوة المحصلة المكافئة: $\mathbf{F_R}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$ مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور x. ثم احسب شدة واتجاه القوة المحصلة المكافئة $\mathbf{F'_R}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_3}$ مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور x.



شكل المسألة (2-1)

المسألة 2-2

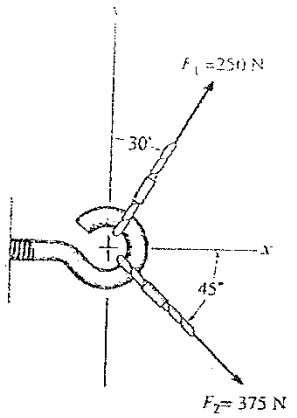
احسب شدة واتجاه القوة المحصلة:

$$\mathbf{F_R}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$$

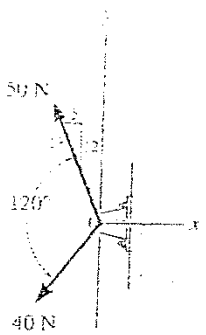
مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور x. واحسب شدة واتجاه القوة $\mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$ مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور x.

المسألة 2-3

احسب شدة واتجاه القوة المحصلة للقوتين المطبقتين على المسند المبين بالشكل مقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور x.



شكل المسألة (2-2)



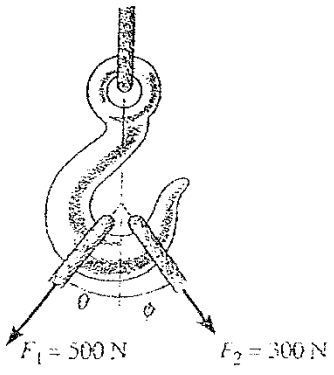
شكل المسألة (3-2)

المسألة 2-8

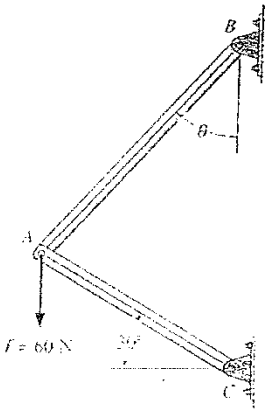
يخضع الخطاف المبين بالشكل للقوتين F_1=500N ، F_2=300N، فإذا كانت محصلة هاتين القوتين شاقولية نحو الأسفل وشدتها F_R=750N ، احسب الزاويتين θ و ϕ.

المسألة 2-9

تؤثر القوة الشاقولية **F** على النقطة A كما في الشكل، احسب شدة كل من مركبتي القوة **F** باتجاه المحورين AB و AC حيث $\theta = 45^\circ$.



شكل المسألة (8-2)



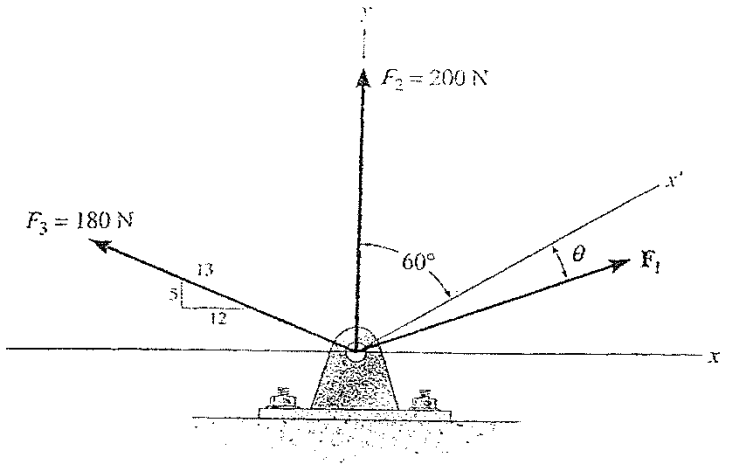
شكل المسألتين (9-2) و (10-2)

المسألة 2-10

تؤثر القوة الشاقولية $F = 60$ N على النقطة A كما في الشكل السابق، حدد الزاوية θ $\left(0^\circ \le \theta \le 90^\circ\right)$ بحيث تكون شدة مركبة القوة **F** على المحور AB تساوي: F_{AB}=80 N. وما هي شدة المركبة F_{AC}.

المسألة 2-42

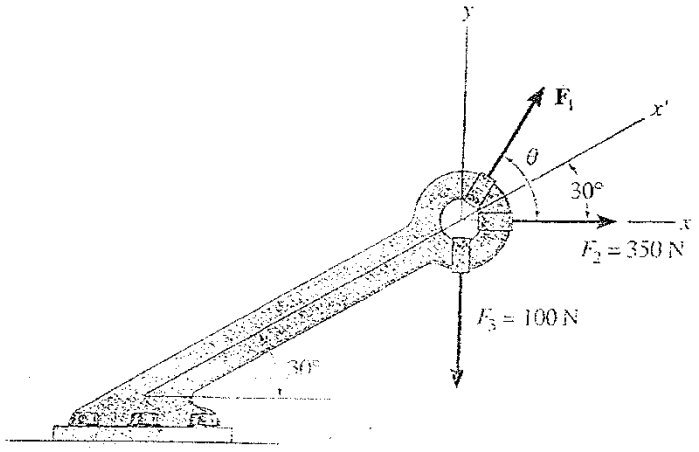
تؤثر ثلاث قوى على المسند المبين في الشكل التالي، والمطلوب حساب شدة واتجاه القوة F_1 بحيث تكون شدة القوة المحصلة 800N بالاتجاه الموجب للمحور 'x.



شكل المسألة (2-42)

المسألة 2-43

إذا كانت F_1=300N و $\theta = 10°$، احسب شدة واتجاه القوة المحصلة (المكافئة) المؤثرة على المسند مقاسة بعكس عقارب الساعة وفق الاتجاه الموجب للمحور 'x.



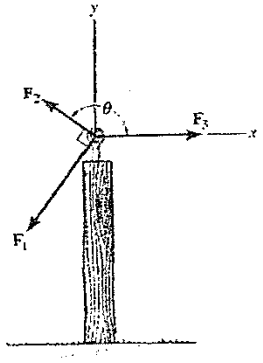
شكل المسألة (2-43)

المسألة 2-44

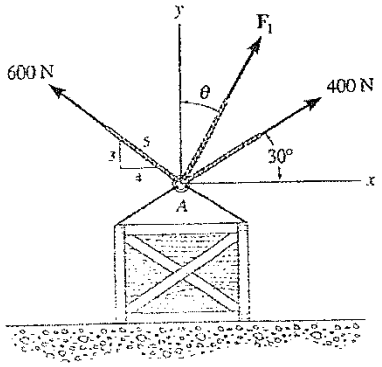
تؤثر على الوتد المبين بالشكل ثلاث قوى محصلتها معدومة. إذا كانت $F_2 = \frac{1}{2} F_1$، و F_1 عمودية على F_2، حدد القيمة المطلوبة للقوة F_3 كتابع للقوة F_1، وحدد الزاوية θ.

المسألة 2-45

حدد شدة واتجاه القوة المحصلة للقوى الثلاث المؤثرة على الحلقة A. علماً أن: $F_1 = 500N$ و $\theta = 20°$.



شكل المسألة (2-44)



شكل المسألة (2-45)

الفصل الثالث

توازن النقطة المادية

Equilibrium of a Particle

1-3 مقدمة (Introduction)

ندرس في هذا الفصل توازن النقطة المادية، وللسهولة نبدأ أولاً بدراسة توازن النقطة المادية في المستوي، ثم ننتقل لدراسة توازن النقطة المادية في الفراغ، وذلك بتحليل القوى إلى مركباتها في جملة الإحداثيات الديكارتية، وبتطبيق قانون نيوتن الأول أو قانون الحالة.

2-3 شرط توازن النقطة المادية(Condition for the Equilibrium of a Particle)

تكون النقطة المادية متوازنة إذا كانت ساكنة أو تتحرك بسرعة ثابتة على خط مستقيم، عندها تتعرض لمجموعة قوى محصلتها معدومة، أي تحقق قانون نيوتن الأول، الذي يمكن أن يصاغ رياضياً بالمعادلة الشعاعية:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

حيث $\Sigma\mathbf{F}$ هي المجموع الشعاعي لجميع القوى المؤثرة على النقطة المادية.

نلاحظ أن المعادلة (3-1) هي الشرط الوحيد واللازم و الكافي لتوازن النقطة المادية ولا يوجد أي شروط أخرى غيره. ولو نظرنا إلى قانون نيوتن الثاني أو قانون التحريك الأساسي:

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad (3\text{-}2)$$

حيث m كتلة النقطة المادية و $\mathbf{a}$ شعاع التسارع، نلاحظ ن الطرف الأول للمعادلة $\Sigma\mathbf{F}$ هو نفس الطرف الأول لمعادلة التوازن، عندها حتى تكون النقطة المادية في حالة توازن يجب أن يكون الطرف الثاني للمعادلة (3-2) يساوي الصفر، أي:

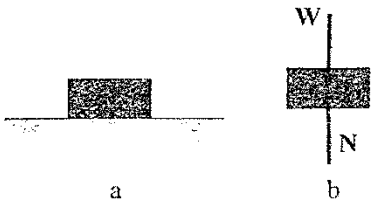
$$m\,\mathbf{a} = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

وبما أن الكتلة m لا يمكن أن تكون معدومة، فإن التسارع $\mathbf{a}$ يساوي الصفر. ونعلم أن التسارع هو معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن، وبالتالي عند انعدام التسارع فإن النقطة المادية الساكنة ستبقى ساكنة أما إذا كانت النقطة المادية متحركة لحظة انعدام التسارع

وآخذين بعين الاعتبار أن السرعة مقدار شعاعي، فإن انعدام التسارع يعني ثبات السرعة قيمة واتجاهاً، وبالتالي فالنقطة المادية المتحركة ستتابع حركتها بسرعة مستقيمة منتظمة.

3-3 مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagram)

لكي نطبق معادلة التوازن (3-1) يجب علينا جمع كل القوى المؤثرة على النقطة المادية، سواء كانت هذه القوى معلومة أو مجهولة، مركزة أو موزعة، قوى فعل أو رد فعل، .....،إلخ. وأفضل طريقة لإظهار هذه القوى هو رسم مخطط الجسم الحر للنقطة المادية. يظهر هذا المخطط النقطة المادية بعيداً عن كل ما يحيط بها من ارتباطات بحيث تتعرض فقط لمجموعة قوى تؤثر عليها. فمثلا الكتلة المستندة إلى الأرض الشكل (3-1 a)، تخضع لتأثير قوة الثقالة، أي وزنها **W**، ولرد فعل الأرض عليها N (قانون نيوتن الثالث)، فمخطط الجسم الحر لهذه الكتلة الشكل (3-1 b)، يظهر فقط الكتلة والقوى المؤثرة عليها، وهذا يسهل علينا تعويض القوى في معادلة التوازن:



الشكل (3-1)

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

قبل الخوض أكثر في دراسة مخططات الجسم الحر يجب التنويه أولاً إلى كيفية التعويض عن الارتباطات التي سوف تواجهنا في دراستنا لتوازن النقطة المادية.

3-3-1 رد الفعل

ينص قانون نيوتن الثالث على أن لكل فعل رد فعل يساويه ويعاكسه بالاتجاه، ورد الفعل يكون دائما عمودياً على سطح الاستناد سواء كان سطح الاستناد أفقياً أو شاقولياً أو مائلاً، وفي حال كان سطح الاستناد منحنياً فيكون رد الفعل عمودياً على المماس لهذا السطح المنحني عند نقطة الاستناد.

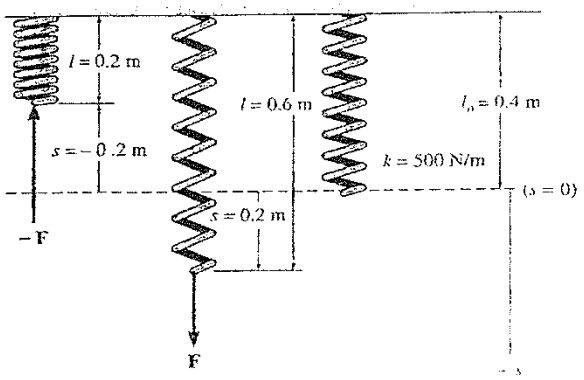
3-3-2 النابض

إذا استندت النقطة المادية أو ارتبطت مع نابض خطي مرن فإنها سوف تؤثر عليه مما يؤدي إلى تغير طول هذا النابض باتجاه القوة المؤثرة. تتميز النوابض عن

بعضها بثابت الصلابة (k) Constant of Stiffness. قيمة القوة F المؤثرة على نابض تساوي إلى جداء ثابت صلابة هذا النابض (k)، بمقدار استطالة النابض (s) مقاساً دائماً من الطول الأصلي للنابض عندما كان حراً بدون حمولة:

$$F = k.s \qquad (3\text{-}4)$$

نلاحظ في الشكل (3-2)، أن المسافة (s) هي حاصل طرح الطول الأصلي للنابض (ℓ_o) من طول النابض بعد تعرضه للقوة (ℓ) ، أي $s = \ell - \ell_o$. يتعرض النابض إلى قوة شد إذا كانت (s) موجبة، وإلى قوة ضغط إذا كانت (s) سالبة.



الشكل (3-2)

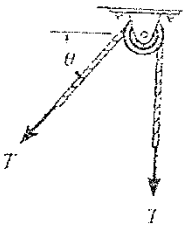
فإذا كان النابض المبين بالشكل (3-2) طوله الأصلي $(\ell_o = 0.4\text{m})$ وثابت صلابته $(k = 500\text{N/m})$، وإذا أردنا أن يتطاول النابض إلى الطول $(\ell = 0.6\text{m})$ فيجب أن نشده بقوة **F**:

$$F = ks = k\left(\ell - \ell_o\right)$$
$$F = 500(0.6 - 0.4) = 100N$$

إذاً، إذا عرضنا النابض لقوة شدة مقدارها (100N) فسوف يزيد طوله بمقدار (0.2m)، وإذا ضغط النابض بقوة مقدارها (100N) فسوف ينقص طوله بمقدار (0.2 m)

3-3-3 الكابلات والبكرات

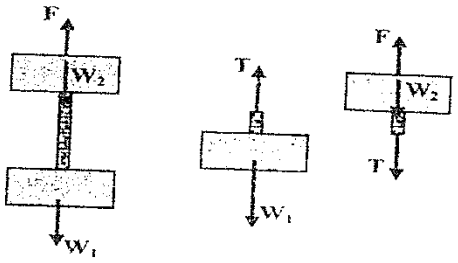
نعتبر البكرات والكابلات والحبال مهملة الكتلة، والحبال غير قابلة للإمتطاط في معظم فصول هذا الكتاب. تخضع الكبلات والحبال لحمولات شد محورية فقط، لأنها لا تقاوم حمولات الضغط، ولا الحمولات العرضية (غير المحورية).



الشكل (٣-٣)

يظهر الشكل (3-3) حبلاً مستمراً يمر حول بكرة ملساء معلقة إلى السقف. سنبرهن لاحقاً في بحث توازن الجسم الصلب في حال عدم إهمال الاحتكاك أن القوة **T** متساوية على طرفي الحبل، أياً كانت قيمة الزاوية θ.

أخيراً، إذا كان لدينا كتلة معلقة بحبل أو تجر بواسطة حبل، فإننا نعوض عن الحبل عند رسم مخطط الجسم الحر للكتلة بقوة محورية تمثل قوة الشد التي يتعرض لها هذا الحبل، وهذه القوة هي قوة داخلية ظهرت فقط لأننا قطعنا الحبل، أما إذا كنا سندرس الكتلة مع الحبل فإن هذه القوة ستصبح قوة داخلية تقابلها وتساويها قوة داخلية أخرى عند الطرف الآخر من الحبل المقطوع محصلتهما تساوي الصفر. يظهر الشكل (3-4) مخطط الجسم الحر للكتلتين W_1 وW_2 معاً، حيث نلاحظ إنه لا يوجد قطع للحبل وبالتالي لم نعوض بقوة شد للحبل، على عكس مخطط الجسم الحر لكل كتلة على حدة حيث يُعوض قطع الحبل بقوة شد **T**.



الشكل (3-4)

ملاحظة: جميع القوى المطبقة على النقطة المادية يجب أن يمر خط عملها من هذه النقطة (مركز ثقل الجسم الذي أهملنا أبعاده)، أي إن خطوط عمل القوى المطبقة على النقطة المادية تلتقي عند هذه النقطة.

لرسم مخطط الجسم الحر نتبع الخطوات التالية:

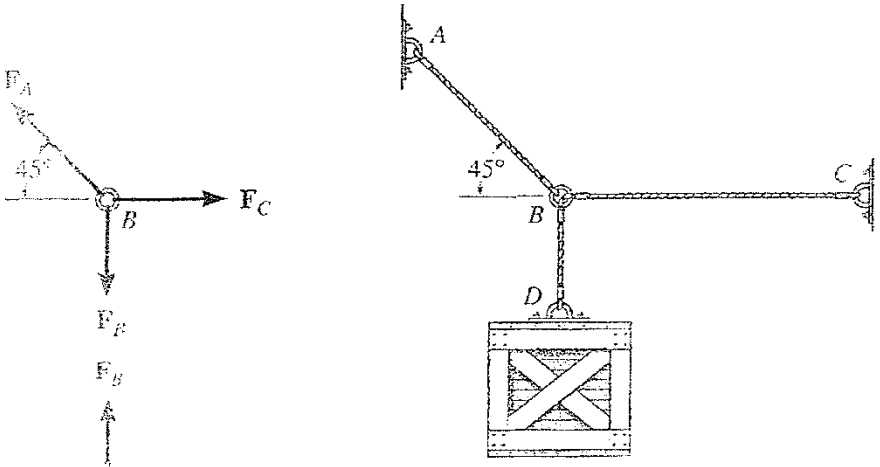
1- نرسم الجسم (الذي افترضناه نقطة مادية) فقط دون الارتباطات أوالاستنادات أو أي اتصالات أخرى مع محيطه.

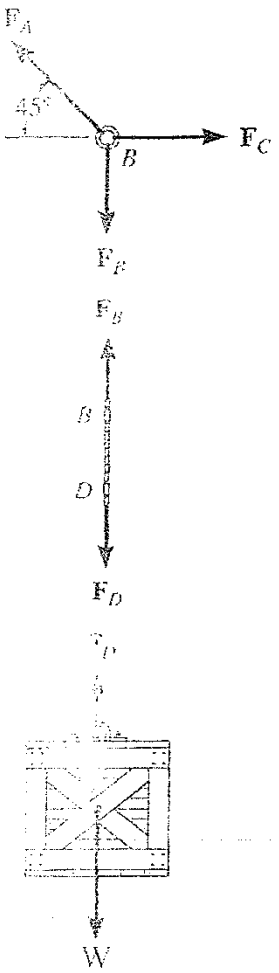
2- نرسم القوى المطبقة على الجسم ونعوض عن جميع الاتصالات والاستنادات بقوى. يعبر عن القوة بسهم باتجاه القوة، وحرف يجاور السهم يرمز إلى اسم القوة. جميع القوى يجب رسمها على المخطط سواء كانت قوة مركزة أو قوة الثقالة أو قوة رد فعل أو توتر حبل أو قوة مغنطيسية تؤثر على الجسم أو ...إلخ.

3- إذا كان حامل القوة غير معلوم نرسم القوة بزاوية افتراضية θ، ثم نقوم بحساب هذه الزاوية. أما إذا كانت قيمة و اتجاه القوة غير معلومين فإننا نفرض اتجاهاً للقوة على حاملها ونقوم بحساب قيمة القوة؛ فإذا كانت القيمة موجبة يكون الاتجاه المفروض صحيحاً، أما إذا كانت القيمة سالبة فيكون اتجاه القوة المفروض خطأ والقوة تتجه بالاتجاه المعاكس.

مثال 3-1

ارسم مخطط الجسم الحر للصندوق و الحلقة B، والحبل BD، المبين بالشكل.





الحل:

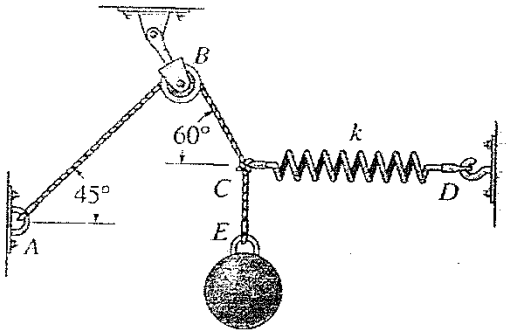
بداية نرسم الصندوق بعد عزله عن كل الارتباطات المحيطة، وهي الجاذبية الأرضية (الثقالة) والحبل، ونعوض بدلاً عنها بقوة الثقالة أو الوزن **W**، والوزن دائماً شاقولي وباتجاه الأسفل، وتؤثر على الصندوق أيضاً قوة توتر الحبل F_D، حاملها محور الحبل واتجاهها إما إلى الأعلى أو إلى الأسفل بحسب القوة المؤثرة. نلاحظ أنها هنا باتجاه الأعلى لكي يتوازن الصندوق فمن غير المعقول أن يخضع لقوتين باتجاه الأسفل ويبقى ساكن، كما أن قيمتها تساوي الوزن **W**.

بالنسبة للحبل BD، ذكرنا سابقاً إن الحبل يحمل بقوى شد محورية فقط، ومنه فالحبل يخضع للقوة $\mathbf{F_D}$ التي تساوي القوة $\mathbf{F_D}$ المطبقة على الصندوق و تعاكسها بالاتجاه، وهي قوة داخلية تعبر عن قوى الترابط بين جزيئات مادة الحبل. القوة $\mathbf{F_B}$ تساوي القوة $\mathbf{F_D}$ بالقيمة و تعاكسها بالاتجاه، أي باتجاه الأعلى لكي يتوازن الحبل.

أخيراً، نرسم الحلقة B ونعوض بدلاً عن الحبال بقوة شد (الحبل المشدود يشد الحلقة)، القوة $\mathbf{F_B}$ تساوي القوة $\mathbf{F_D}$ وبالتالي تساوي الوزن واتجاهها نحو الأسفل، والقوة $\mathbf{F_C}$ محمولة على محور الحبل BC أي أفقية ومتجهة نحو اليمين (تشد الحلقة)، وأخيراً القوة $\mathbf{F_A}$ المحمولة على محور الحبل AB أي تميل بزاوية 45° عن الأفق وتتجه باتجاه شد الحلقة. الحلقة ساكنة تحت تأثير القوى الثلاث.

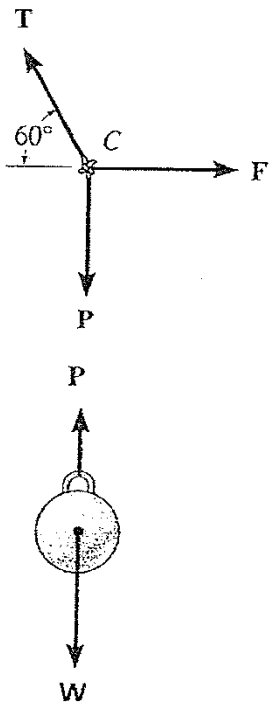
مثال 3-2

يظهر الشكل كرة معدنية معلقة بواسطة الحبل إلى ABCE، حيث العقدة C تتصل مع النابض CD، ذي ثابت الصلابة k، والحبل يمر على البكرة B بحيث يصنع الجزء BC من الحبل الزاوية 60° مع الأفق، والمطلوب رسم مخطط الجسم الحر للكرة المعدنية والعقدة C.



الحل:

نرسم الكرة بدون أي اتصالات محيطة بحيث نعوض عنها بقوتين، قوة الثقالة **W** شاقولية نحو الأسفل، وقوة توتر الحبل **P** شاقولية نحو الأعلى. بالنسبة للعقدة C لديها ثلاثة

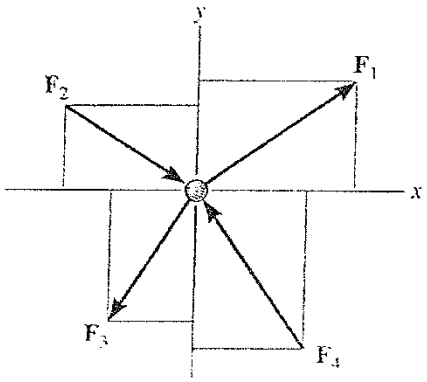


ارتباطات نعوض عنها بثلاث قوى: قوة توتر الحبل P وهي شاقولية باتجاه الأسفل.

القوة T وهي قوة توتر الحبل المحمولة على محوره أي تميل بزاوية 60° عن الأفق وباتجاه شد العقدة. وقوة شد النابض F وهي قوة شد لأن العقدة بدون النابض سوف تتحرك نحو الشمال وبالتالي النابض يتعرض لقوة شد ويشد الحلقة C، وهذه القوة محمولة على محور النابض أي أفقية باتجاه اليمين.

4-3 القوى المستوية (Coplanar Force System)

يمكن رد حالات عديدة من حالات توازن النقطة المادية إلى الحالة المستوية وذلك عندما تقع القوى المؤثرة على هذه النقطة في مستوي واحد، في هذه الحالة نحلل جميع القوى المؤثرة على النقطة المادية إلى مركباتها على المحورين x و y، انظر الشكل (3-5)، بتطبيق معادلة التوازن (3-1) نجد:



الشكل (3-5)

$$\sum \mathbf{F} = 0$$
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = 0$$

حتى تتحقق هذه المعادلة الشعاعية يجب أن ينعدم مجموع المركبات على كل من المحورين x و y، إذا لم ينعدم أحدهما فقط فإن المعادلة لن تتحقق، أي يجب أن يتحقق:

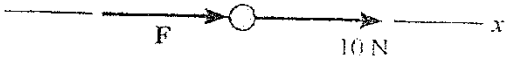
$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

نلاحظ أن العلاقتين في المعادلة (3-5) سلميتان، ومنه فهما تمثلان المجموع الجبري لمركبات أو لمساقط القوى على المحورين x و y. هذا المجموع يجب أن يساوي الصفر. يمكن إيجاد مجهولين فقط بحل هاتين المعادلتين، وبالتالي إذا كان عدد المجاهيل أكبر فيجب عندها إيجاد بعض المجاهيل بطرق أخرى، وهذه المجاهيل قد تكون قيمة القوة أو اتجاهها.

عند دراسة توازن النقطة المادية نرسم أولاً مخطط الجسم الحر لهذه النقطة ثم نطبق معادلة التوازن (5-3)، ونذكر هنا أن القوة مجهولة القيمة تعوض في المعادلات برمزها حتى يتم حسابها، فإذا كانت قيمتها المحسوبة موجبة يكون الاتجاه المفروض للقوة صحيحاً، أما إذا كانت سالبة فيجب عكس اتجاه القوة. وكمثال يبين الشكل (6-3) نقطة مادية متوازنة تتعرض لقوتين الأولى معلومة تساوي 10 N، أفقية باتجاه اليمين، والثانية حاملها أفقي وقيمتها مجهولة ففرضنا أنها تتجه نحو اليمين أيضاً. نعوض في معادلة التوازن (5-3):

$$\rightarrow \sum F_x = 0\,,\ \Rightarrow F + 10 = 0\,,\ \Rightarrow F = -10$$

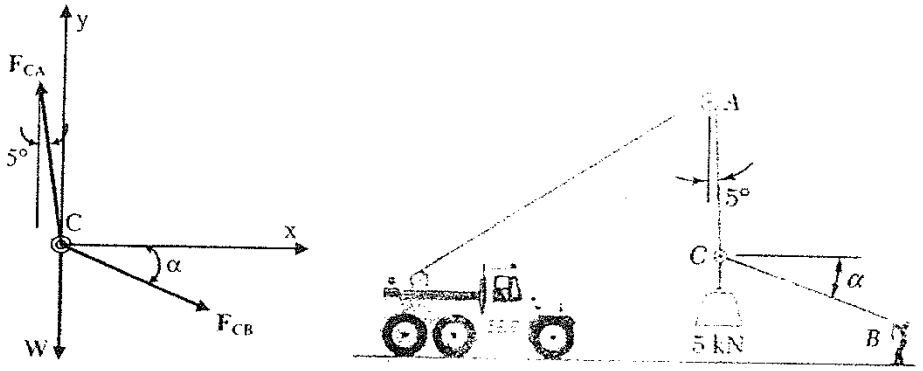
نلاحظ أن قيمة القوة **F** المحسوبة سالبة، هذا يعني أن الاتجاه المفروض خاطئ ويجب أن تتجه القوة نحو الشمال.



الشكل (6-3)

مثال 3-3

احسب قوة الشد في الحبلين AC و BC إذا علمت أن الزاوية $\alpha = 25°$.



الحل:

نرسم أولاً مخطط الجسم الحر للحلقة C التي تتعرض لثلاث قوى.

نطبق معادلة التوازن (5-3):

$$\rightarrow \sum F_x = 0,\ \Rightarrow -F_{CA}\sin 5^o + F_{CB}\cos 25^o = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \Rightarrow F_{CA}\cos 5^o - F_{CB}\sin 25^o - W = 0$$

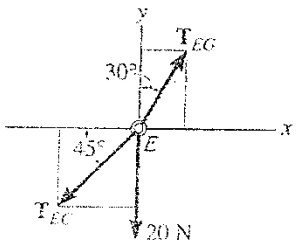
$$F_{CA}\cos 5^o - F_{CB}\sin 25^o - 5 = 0 \qquad (b)$$

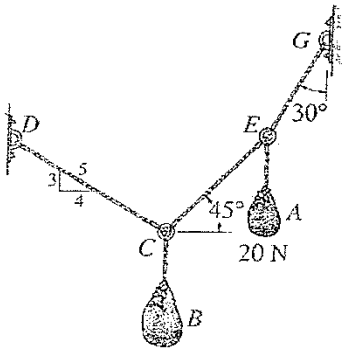
بحل جملة المعادلتين (a) و(b)، نحصل على قيمة القوتين:

$$F_{CA} = 5.23\text{kN} \quad , \quad F_{CB} = 0.503\text{kN}$$

مثال 3-4

إذا علمت إن المجموعة المشكلة من الأكياس والحبال المبينة بالشكل متوازنة وأن وزن الكيس A يساوي (W_A=20 N)، احسب وزن الكيس B وقوى الشد في جميع الحبال.





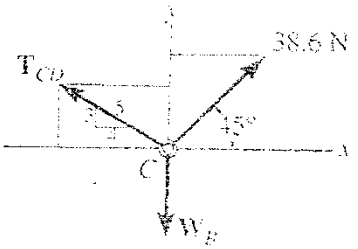
الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للحلقة E ونعوض عن الكيس A بوزنه و عن قوى شد الحبال بقوى مجهولة ثم نطبق معادلات التوازن للحلقة:

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \Rightarrow T_{EG}\sin 30^o - T_{EC}\cos 45^o = 0 \qquad (a)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \Rightarrow T_{EG}\cos 30^o - T_{eC}\sin 45^o - 20 = 0 \qquad (b)$$

بحل جملة المعادلتين (a) و(b)، وذلك بإيجاد T_{EG} من الأولى وتعويضه في الثانية والحساب نجد:



$$T_{EG} = 54.6\ N \ , T_{EC} = 38.6\ N$$

بعدما علمنا قوة شد الحبل T_{EC} نرسم مخطط الجسم الحر للحلقة C ونرسم قوى شد الحبال و وزن الكيس B، وبتطبيق معادلات

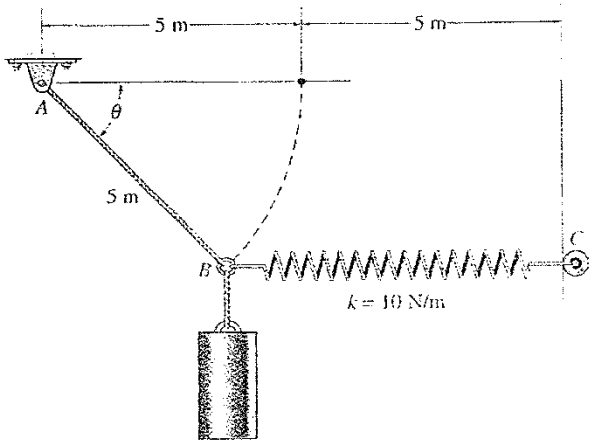
التوازن نجد:

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \Rightarrow 38.6 cos\, 45^o - \frac{4}{5} T_{CD} = 0, \Rightarrow T_{CD} = 34.2\ N$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \Rightarrow 38.6 sin\, 45^o + \frac{3}{5} T_{CD} - W_B = 0 \Rightarrow W_B = 47.8\ N$$

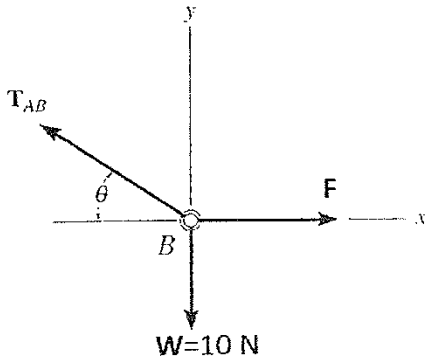
مثال 3-5

نابض طوله الأصلي $\ell_o = 5\text{m}$ وثابت صلابته $k = 10\text{N/m}$، يتصل من طرف بالحلقة B ومن الطرف الأخر بدولاب صغير يدور ضمن مجرى بحيث يبقى النابض أفقياً. تتصل الحلقة B مع الحبل AB ذي الطول 5 m والكتلة ذات الوزن $W = 10$ N. والمطلوب حساب قوة شد الحبل $\mathbf{T_{AB}}$ والزاوية θ وقوة شد النابض **F**.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للحلقة B ونعوض عن قوة شد النابض بالقوة الأفقية **F**، وعن وزن الكتلة بقوة الثقالة الشاقولية $(W = 10\ \text{N})$، وعن قوة شد الحبل مجهولة القيمة والزاوية، بالقوة $\mathbf{T_{AB}}$ والزاوية θ.



نلاحظ أنه لدينا ثلاثة مجاهيل ونحن نعلم أنه من معادلتي التوازن في المستوي يمكن

إيجاد مجهولين فقط، لذا يجب علينا إيجاد أحد المجاهيل أولا.

نلاحظ من الشكل الهندسي للجملة المدروسة أنه يمكن إيجاد مقدار تغير طول النابض بدلالة الزاوية θ بالعلاقة:

$$s = 5 - 5\cos\theta$$

وبالتالي قوة شد النابض **F** :

$$F = k.s = 10(5 - 5\cos\theta) = 50(1 - \cos\theta)$$

نكتب الآن معادلات التوازن للنقطة المادية (الحلقة) B:

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \Rightarrow F - T_{AB}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow 50(1 - \cos\theta) - T_{AB}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow T_{AB}\cos\theta = 50(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \Rightarrow T_{AB}\sin\theta - W = 0,$$

$$\Rightarrow T_{AB}\sin\theta = 10 \quad (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)، نجد:

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{5(1 - \cos\theta)}$$

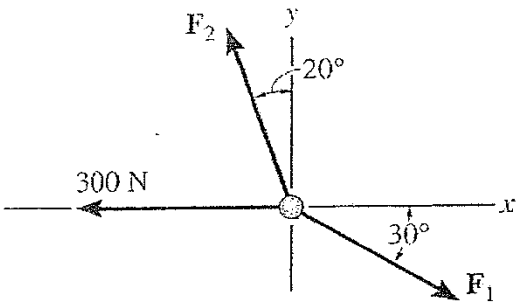
بالحل باستخدام الآلة الحاسبة نجد: ~~$\theta = 24.86^\circ \approx 25^\circ$~~

$$T_{AB} = 23.7N$$

مسائل غير محلولة

المسألة 3-1

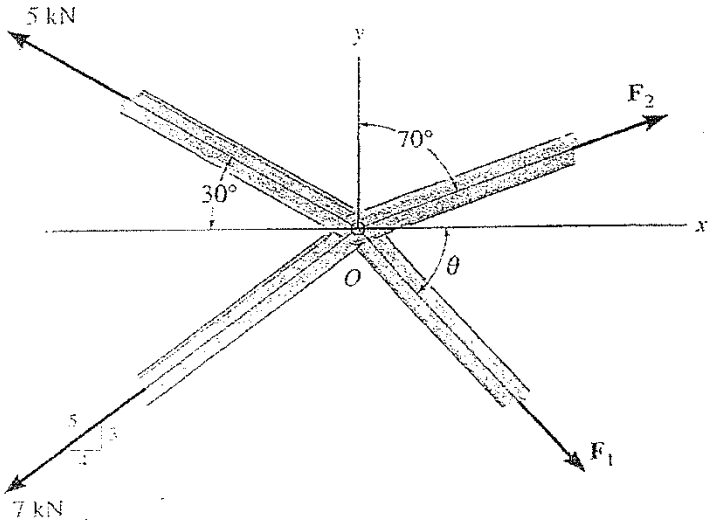
احسب شدة القوتين $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ لتتوازن النقطة المادية المبينة بالشكل.



شكل المسألة (3-1)

المسألة 3-2

إذا كنت النقطة o نقطة تمفصل أذرع العنصر الإنشائي المبين بالشكل، احسب شدة القوتين $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ ليتوازن هذا العنصر، علماً أن $\theta = 60^\circ$.



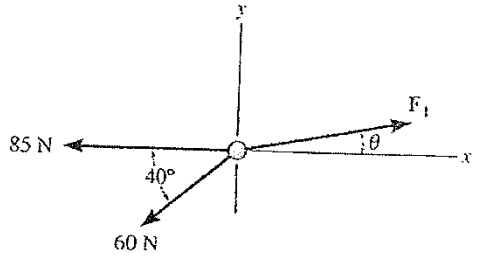
شكل المسألتين (3-2) و (3-3)

المسألة 3-3

إذا كانت النقطة o نقطة تمفصل أذرع العنصر الإنشائي المبين بالشكل السابق، احسب شدة واتجاه القوة $\mathbf{F}_1$ ليتوازن هذا العنصر، علماً أن $F_2 = 6kN$.

المسألة 3-4

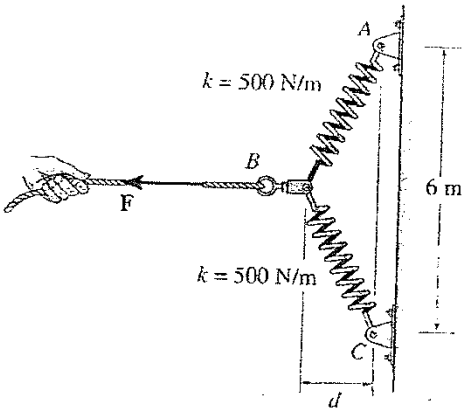
حدد قيمة واتجاه القوة $\mathbf{F}_1$ لتتوازن النقطة المادية المبينة بالشكل.



شكل المسألة (3-4)

المسألة 3-5

نابضان AB و BC مبينان بالشكل، ثابت صلابة كل منهما 500 N/m وطولاهما الأصليان 6 m، والمطلوب حساب القوة الأفقية **F** المطبقة على الحبل المتصل بالحلقة B بحيث تكون المسافة $d = 1.5$ m.



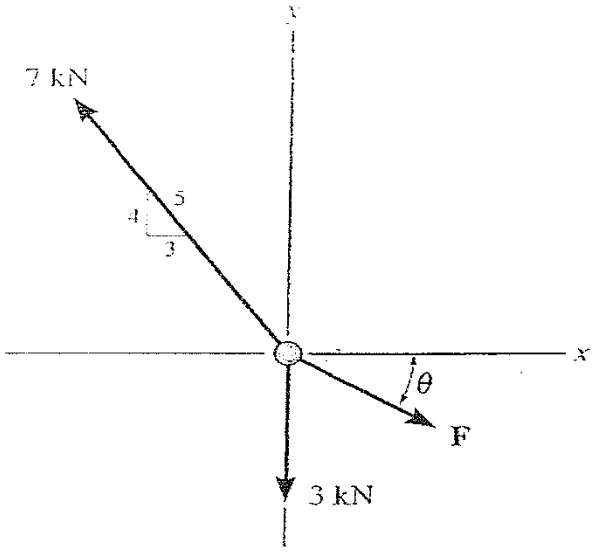
شكل المسألتين (3-5) و (3-6)

المسألة 3-6

نابضان AB و BC مبينان بالشكل أعلاه ثابت صلابة كل منهما 500 N/m وطولاهما الأصليان 6 m، والمطلوب حساب الإزاحة d عن الجدار إذا كانت القوة الأفقية $F = 175$ N.

المسألة 3-7

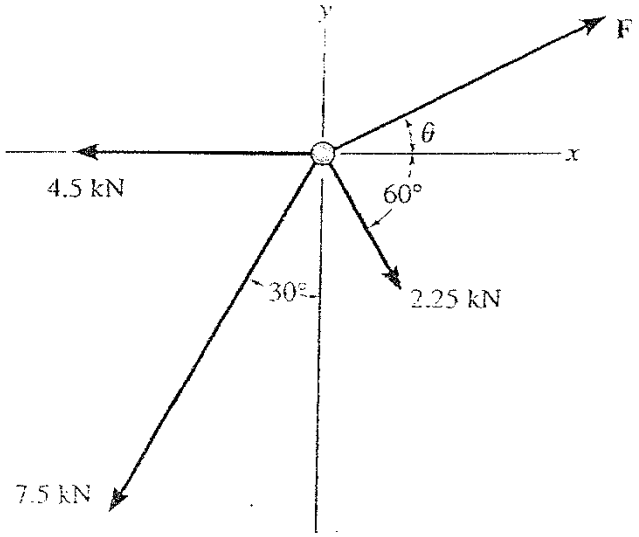
حدد قيمة واتجاه القوة **F** لتتوازن النقطة المادية المبينة بالشكل.



شكل المسألة (3-7)

المسألة 3-8

حدد قيمة واتجاه القوة **F** لتتوازن النقطة المادية المبينة بالشكل.



شكل المسألة (3-8)

الفصل الرابع

تحصيل جمل القوى والعزوم

Forces and Moments Systems Resultants

1-4 مقدمة (Introduction)

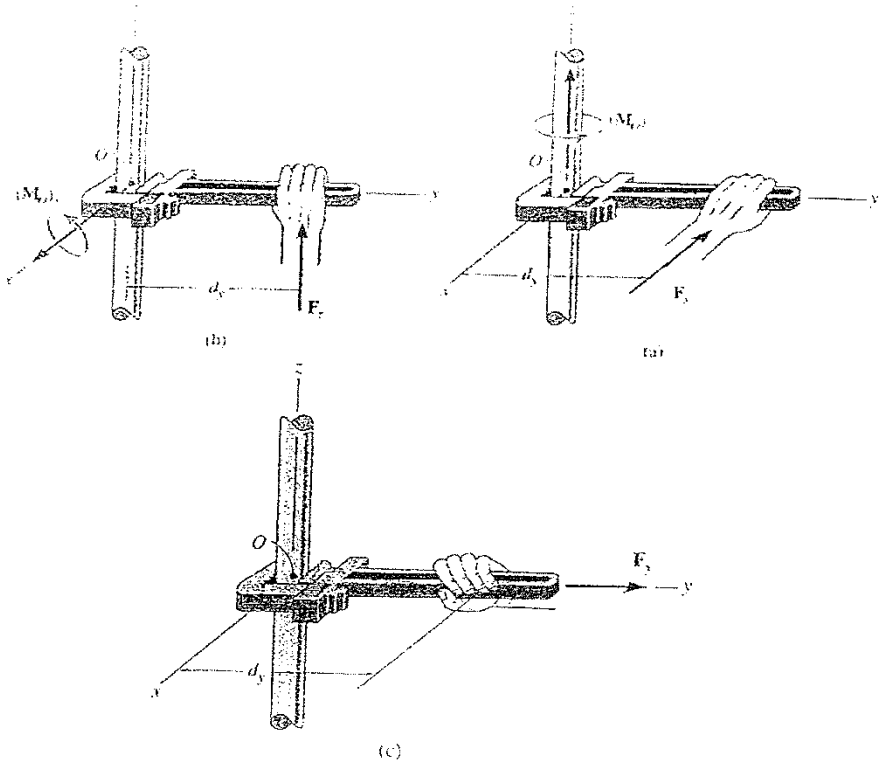
درسنا في الفصل الثالث توازن النقطة المادية أو توازن القوى المتلاقية في نقطة واحدة ولاحظنا أن الشرط اللازم والكافي لتوازن النقطة المادية هو انعدام محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها، أي: $\left(\sum \mathbf{F}=0\right)$. سندرس في هذا الفصل الخامس توازن الجسم الصلب الذي له شكل هندسي وبالتالي له أبعاد، والشرط السابق لتوازن النقطة المادية وإن كان لازماً لكنه غير كافٍ لتوازن الجسم الصلب، لأن القوى المؤثرة على هذا الجسم قد تؤدي الى دورانه، وحتى يكون الجسم ساكناً يجب أن لا يدور.

سنتعرف في هذا الفصل على مفهوم العزم، وسندرس طرق إيجاد عزم قوة حول نقطة أو محور، وسنناقش طرق تحصيل (اختزال) جملة القوى والعزوم غير المعدومة أو غير المتوازنة لتبسيطها، حيث يساعدنا ذلك لدى دراسة القوى اللازمة لتوازن الجسم الصلب الخاضع لجملة قوى وعزوم تكافئ الجملة المبسطة (المختزلة).

3-4 عزم القوة (The Force Moment)

يعبر عزم قوة حول نقطة أو حول محور عن قيمة الحمولة الدورانية (إمكانية هذه القوة لتدوير الجسم) حول النقطة أو المحور. فمثلاً يظهر الشكل (a-5-4) القوة الأفقية $\mathbf{F}_x$ المؤثرة بشكل عمودي على المفتاح المستخدم لتدوير الأنبوب حول المحور z، بحيث تبعد القوة مسافة d_y عن مركز الأنبوب O والذي يسمى ذراع العزم. كلما زادت هذه المسافة زادت الحمولة الدورانية، التي تسمى بعزم القوة أو العزم. نلاحظ أن القوة تدير الأنبوب حول المحور z وبالتالي شعاع العزم $\left(\mathbf{M}_o\right)_z$ المحمول على هذا المحور يكون عمودياً على المستوي الأفقي المظلل (x-y) المشكل من شعاع القوة $\mathbf{F}_x$ وشعاع الذراع d_y.

لو طبقنا القوة $\mathbf{F}_z$ على المفتاح كما في الشكل (b-5-4)، هذه القوة لن تدير الأنبوب حول المحور z، بل حول المحور x، وستولد هذه القوة العزم $(M_o)_x$ المحمول على المحور x العمودي على مستوي القوة $\mathbf{F}_z$ و الذراع d_z الواقعين في المستوي المظلل (y-z).



الشكل (4-5)

أخيراً, إذا طبقنا القوة $\mathbf{F}_y$ على المفتاح، الشكل (4-5-c)، فإنه لن يتولد أي عزم دوراني على الأنبوب لأن خط عمل هذه القوة يمر من النقطة O.

4-3-1 قيمة العزم

القيمة السلمية للعزم M_o، الشكل (4-6)، تساوي:

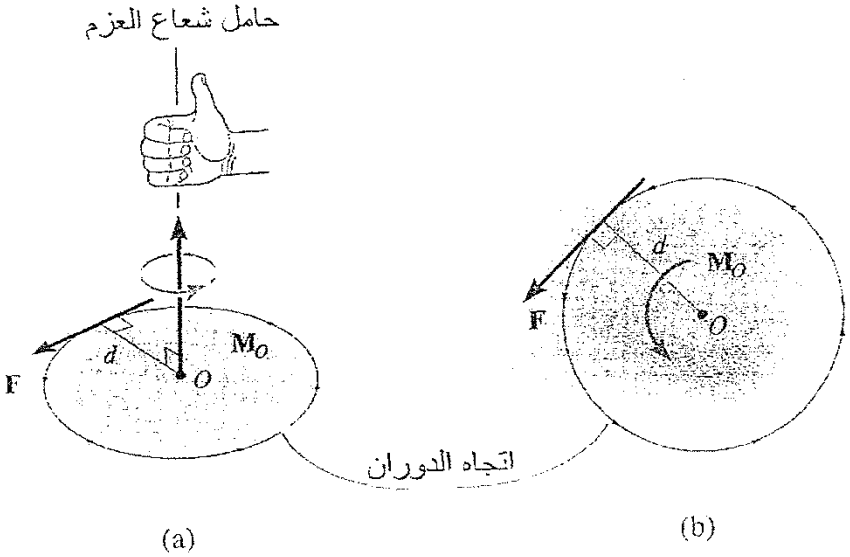
$$M_O = F.d \qquad (4\text{-}4)$$

حيث d ذراع العزم، وهو العمود النازل من النقطة O على خط عمل القوة **F**. بما أن العزم عبارة عن جداء قوة بمسافة فواحدته (N.m).

4-3-2 اتجاه شعاع العزم

يحدد اتجاه شعاع العزم $\mathbf{M_O}$ وفقاً لقاعدة اليد اليمنى، أي إذا درنا بأصابع اليد اليمنى بالاتجاه الذي تدور به القوة **F** حول النقطة O، الشكل (3-6-a)، فإن اتجاه الإبهام هو اتجاه شعاع العزم، وهو باتجاه الأعلى وعمودي على مستوي القوة والذراع d.

يعبر عن شعاع العزم في الحالات الفراغية بسهم كشعاع الموضع أو شعاع القوة، أما في الحالات المستوية والتي تمر معنا كثيراً فيعبر عن العزم بقوس بنهايته سهم يدل على اتجاه دوران العزم، الشكل (4-6-b)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن هذا العزم شعاع له حامل عمودي على مستوي F و d، واتجاه مبين في الشكل (4-6-a).



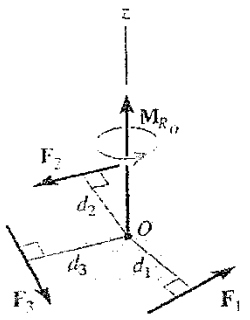
الشكل (4-6)

4-4 محصلة عزم مجموعة قوى واقعة في مستوي واحد

(Resultant Moment of a System of Coplanar Forces)

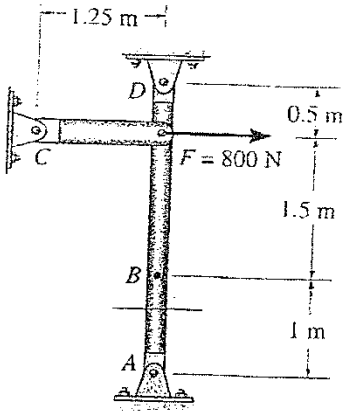
ليكن لدينا مجموعة القوى الواقعة في المستوي (x-y)، كما هو موضح في الشكل (4-7). ستولد كل قوة حول النقطة O عزماً محمولاً على المحور z العمودي على مستوي القوى (x-y)، والعزم المحصل $\mathbf{M}_{R_O}$ يساوي إلى المجموع الجبري لهذه العزوم حيث إنها تدور جميعاً باتجاه واحد. وبالتالي:

$$M_{R_O} = \sum (F.d) \qquad (4\text{-}5)$$



الشكل (4-7)

تولد جميع القوى في الشكل (4-7) عزوماً باتجاه واحد، لذلك نجمع جميع العزوم بإشارة موجبة، أما إذا كانت القوى تولد عزوماً مختلفة الاتجاه فإننا نعتمد اتجاهاً موجباً للدوران (عكس عقارب الساعة مثلاً)، بحيث تكون القوة التي تولد عزماً اتجاهه عكس عقارب الساعة ذات عزم موجب أما إذا كان دوران القوة حول O مع عقارب الساعة فعزمها سالب.



مثال 4-3

جد عزم القوة 800N المؤثرة على الإطار المبين بالشكل حول كل من النقاط A, B, C, D.

الحل:

تحسب قيمة عزم قوة حول نقطة من العلاقة:

$$M = F.d$$

حيث d ذراع العزم أو أقصر مسافة بين النقطة المطلوب حساب العزم حولها وخط عمل القوة، وهو العمود النازل من النقطة على خط العمل.

$$M_A = 800 \times 2.5 = 2000 \text{ N.m} \curvearrowleft$$

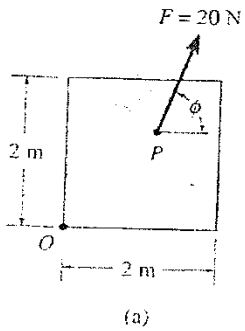
$$M_B = 800 \times 1.5 = 1200 \text{ N.m} \curvearrowleft$$

$$M_C = 800 \times 0 = 0 \text{ N.m}$$

(خط عمل القوة F يمر من النقطة C)

$$M_D = 800 \times 0.5 = 400 \text{ N.m} \curvearrowleft$$

يشير السهم بجانب قيمة العزم إلى جهة دورانه والذي يحدد باتجاه دوران القوة حول كل نقطة من النقاط



(a)

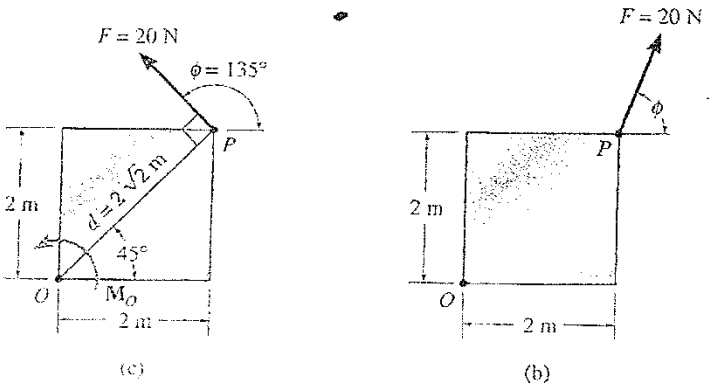
مثال 4-4

صفيحة مربعة خاضعة لتأثير القوة **F** في النقطة **P** والمطلوب تحديد موقع وزاوية القوة **F** بحيث يكون عزمها حول النقطة O أعظمياً وباتجاه عكس عقارب الساعة. ما هي قيمة هذا العزم؟

الحل:

حتى يكون عزم القوة **F** أعظمياً يجب أن تطبق القوة على نقطة من الصفيحة بحيث تكون أبعد ما يمكن عن النقطة O، وهذه النقطة هي عند الزاوية المقابلة للنقطة O قطرياً. كما أن القوة ستولد عزماً عكس عقارب الساعة إذا كانت الزاوية ϕ في المجال $\left(45^{\circ} < \phi < 225^{\circ}\right)$ ويكون هذا العزم أعظمياً إذا كانت الزاوية (ϕ=135°)، حيث d عمودية على القوة **F**. وقيمة هذا العزم تساوي:

$$M_0 = F\,d = 20 \times 2\sqrt{2} = 56.6\,\text{N.m}$$



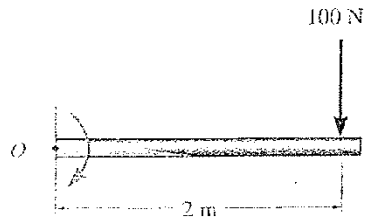
بتطبيق قاعة اليد اليمنى فإن شعاع العزم يتجه نحو خارج الورقة.

مثال 4-5

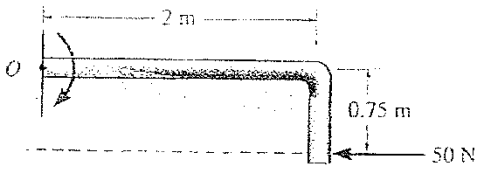
حدد عزم القوة حول النقطة O للحالات المبينة في الأشكال التالية.

الحل:

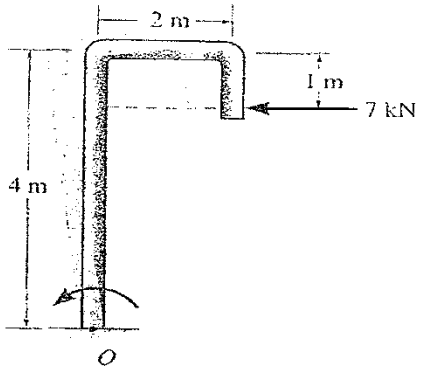
لقد قمنا بتمديد خط عمل أو حامل القوة بخط منقط ليسهل تحديد ذراع العزم d . أيضاً لتحديد اتجاه دوران هذا العزم.



$$M_O = 100 \times 2 = 200\ N.m \quad -$$

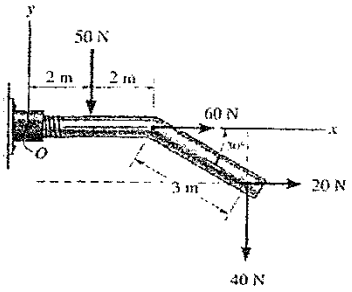


$$M_O = 50 \times 0.75 = 37.5 N.m \quad -$$



$$M_o = 7 \times (4-1) = 21 \text{kN.m} \quad -$$

مثال 4-6



أوجد محصلة العزوم الناتجة عن تأثير القوى الأربع على القضيب المبين بالشكل حول النقطة O.

الحل:

هنا لا بد من تحديد اتجاه موجب لدوران العزم وليكن عكس عقارب الساعة، وشعاع العزم المفروض بالاتجاه الموجب للمحور z.

$$\curvearrowleft \; M_{R_O} = \sum F d$$

$$M_{R_o} = -50(2) + 60(0) + 20(3\sin 30) - 40\left(4 + 3\cos 30^o\right)$$

$$M_{R_O} = -334 \; N.m = 334 \text{ N.m} \curvearrowright$$

5-4 شعاع عزم القوة (The Force Moment Vector)

عزم القوة **F** حول نقطة O هو عبارة عن عزم هذه القوة حول المحور المار من O والعمودي على مستوي **F** وO. من الجداء الشعاعي يمكن كتابة المعادلة الشعاعية التالية:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (6\text{-}4)$$

حيث r هو شعاع الموضع المنطلق من النقطة O إلى أي نقطة من خط عمل القوة F. لنثبت الآن أن هذا الجداء الشعاعي يعطي حامل وقيمة واتجاه العزم M_O.

4-5-1 القيمة أو الطويلة

تحسب طويلة الجداء الشعاعي السابق من المعادلة:

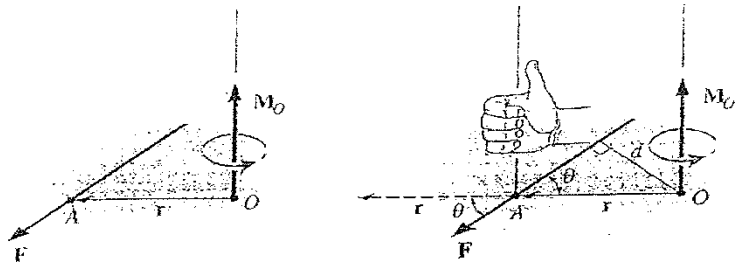
$$M_O = r.F.\sin\theta$$

حيث الزاوية θ هي الواقعة بين شعاع الموضع **r** وشعاع القوة **F**. إذا كانت هذه الزاوية غير واضحة نقوم بزلق شعاع الموضع **r** على حامله كما في الشكل (4-8). بما أن ذراع العزم يساوي $(d = r \sin\theta)$ عندها:

$$M_O = r.F.sin\,\theta = F\left(r.sin\,\theta\right) = F.d$$

وهي قيمة العزم في المعادلة (4-4)

ذكرنا سابقاً أن عزم قوة حول نقطة O مثلاً، الشكل (4-8)، هو الجداء الشعاعي لشعاع الموضع المنطلق من النقطة O إلى أي نقطة من حامل القوة بالقوة F. وهنا النقطة A قد تكون أي نقطة من حامل القوة **F** ودائماً: $d = (r.\sin\theta)$.



الشكل (4-8)

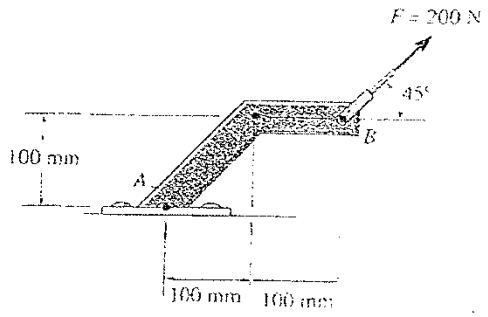
4-5-2 الحامل والاتجاه

حامل الجداء الشعاعي عمودي على مستوي الشعاعين أي عمودي على مستوي القوة F وشعاع الموضع **r** وهو نفسه حامل العزم العمودي على مستوي القوة F بالشكل

أما اتجاه شعاع العزم فيحدد باستخدام قاعدة اليد اليمنى، فإذا أشرنا من A، نقطة تقاطع شعاع القوة F وشعاع الموضع r، محوراً عمودياً على المستوي المظلل، ودرنا بأصابع اليد اليمنى حول هذا المحور من شعاع الموضع **r** إلى القوة **F** (باتجاه الزاوية الأصغر)، عندها يكون اتجاه شعاع العزم باتجاه الإبهام، انظر الشكل (4-8).

مثال 4-9

احسب عزم القوة F المؤثرة في النقطة B من المسند المبين بالشكل حول النقطة A.



الحل:

يمكن إيجاد عزم القوة F حول A بطريقتين:

الطريقة الأولى:

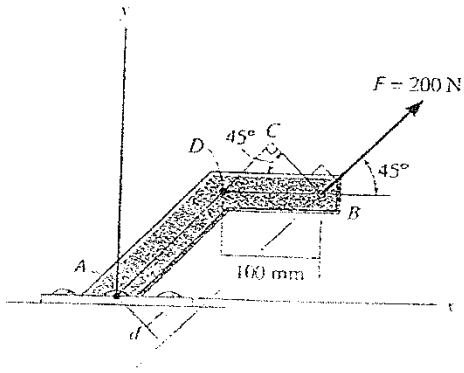
نحسب قيمة ذراع العزم d هندسياً من المثلث BCD القائم في C:

$$BC = d = 100\cos 45^\circ = 70.71\,\text{mm}$$

ومنه العزم: $M_A = F.d$

بالتعويض نجد:

$$M_A = 200\times 70.71 = 14100\,N.mm = 14.1\,\text{N.m}\ \curvearrowleft$$



نلاحظ أن القوة F ستولد عزماً M_A حول النقطة A بعكس اتجاه عقارب الساعة، أو باستخدام قاعدة اليد اليمنى فشعاع العزم يتجه باتجاه خارج الورقة وهو اتجاه المحور z، وبالتالي الصيغة الشعاعية للعزم M_A هي:

$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\}\,\text{N.m}$$

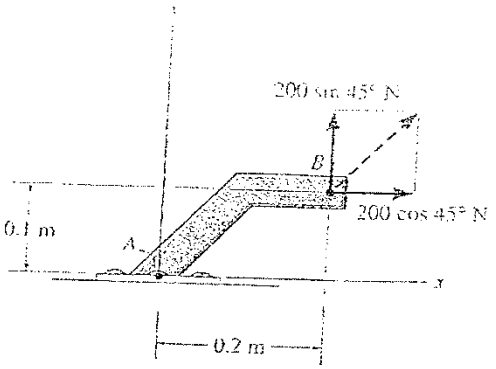
الطريقة الثانية:

يمكن تحليل القوة F إلى مركبتيها على المحورين الإحداثيين x و y، كما هو مبين بالشكل. وفقاً لنظرية العزم أو نظرية فارينون فإن عزم القوة F حول النقطة A يساوي مجموع عزوم مركباتها حول نفس النقطة. بفرض الدوران الموجب للعزم عكس عقارب الساعة (شعاع العزم بالاتجاه الموجب للمحور z) نجد:

$$\curvearrowleft M_A = F_x B_y - F_y B_x$$

$$\curvearrowleft M_A = 200\cos 45^\circ (0.1) + 200\sin 45^\circ (0.2) = 14.1\,\text{N.m}\ \curvearrowleft$$

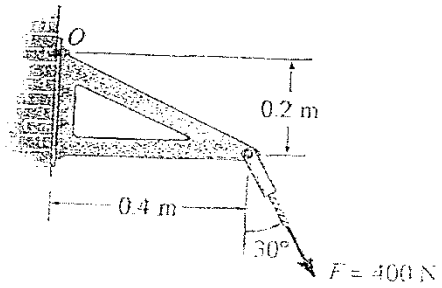
$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\}\,\text{N.m}$$



بالمقارنة نجد أن $\mathbf{M}_A$ بالطريقتين متساوية قيمة واتجاهاً.

مثال 4-10

احسب عزم القوة $\mathbf{F}$ المؤثرة على الحامل المثلثي المبين بالشكل حول النقطة O.



الحل:

سنجد عزم القوة $\mathbf{F}$ حول النقطة O بطريقتين تحليلياً وشعاعياً.

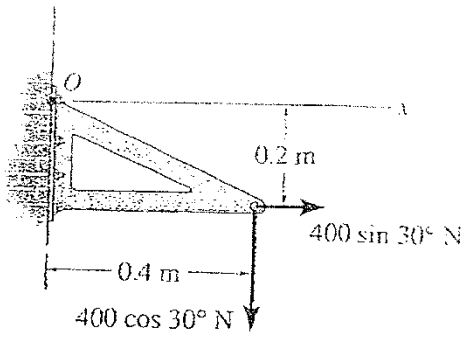
الطريقة التحليلية:

نحلل القوة $\mathbf{F}$ إلى مركبتين الأولى محمولة على المحور x، والثانية على المحور y، ونحسب عزم هاتين المركبتين حول النقطة O. بفرض الاتجاه الموجب للدوران بعكس عقارب الساعة أي باتجاه المحور z، نجد:

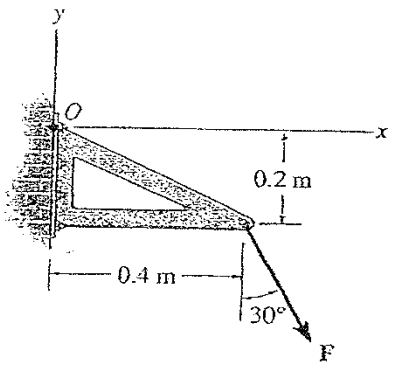
$$\curvearrowleft \; M_O = 400\sin 30^\circ (0.2) - 400\cos 30^\circ (0.4)$$

$$\curvearrowleft \; M_O = -98.6\,N.m \qquad = 98.6\,\text{N.m} \curvearrowleft$$

$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\}\,N.m$$



الطريقة الشعاعية:



باستخدام جملة محاور ديكارتية يمكن كتابة القوة **F** وشعاع الموضع **r** على الشكل:

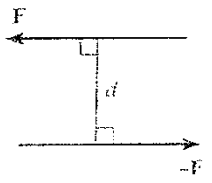
$$\mathbf{F} = 400\sin 30^\circ\,\mathbf{i} - 400\cos 30^\circ\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} - 346.4\,\mathbf{j}\}\ \text{N}$$
$$\mathbf{r} = \{0.4\mathbf{i} - 0.2\,\mathbf{j}\}\ \text{m}$$

والعزم يكون:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200 & -346.4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\mathbf{M}_O = 0\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + \left[0.4(-346.4) - (-0.2)(200)\right]\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\}\ \text{N.m}$$

نلاحظ أن الحل التحليلي أبسط من الشعاعي وذلك لسهولة إيجاد مركبات القوة وذراع العزم. لذلك في الحالات المستوية من الأفضل استخدام الحل التحليلي، بينما نستخدم الطريقة الشعاعية في الحالات الفراغية.

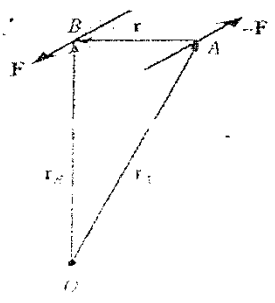
12-4 عزم المزدوجة (Moment of a Couple)



الشكل (15-4)

المزدوجة بالتعريف عبارة عن قوتين متوازيتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه تفصل بينهما المسافة العمودية d، الشكل (15-4). بما أن القوتين متساويتان بالقيمة ومتوازيتان ومتعاكستان بالاتجاه فإن محصلتهما معدومة. وبالتالي للمزدوجة عزم فقط يؤدي إلى دوران الجسم باتجاه معين.

العزم الناتج عن المزدوجة يسمى عزم المزدوجة ويساوي مجموع عزمي القوتين حول نقطة ما من الفراغ. لنأخذ مثلاً المزدوجة الموضحة بالشكل (16-4)، حيث شعاعا الموضع $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$، مبدأهما النقطة O وراساهما النقطتان A و B، الواقعتان على حامل القوتين F و -F على الترتيب. عزم المزدوجة حول



الشكل (16-4)

النقطة O يساوي:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

ومن قانون المثلث لجمع الأشعة:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

وبالتالي:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-15}$$

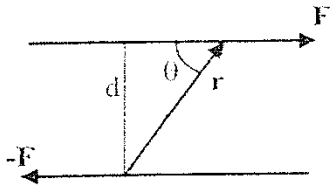
هذه النتيجة تبين أن شعاع عزم المزدوجة **M** شعاع طليق يمكن تطبيقه على أي نقطة من الفراغ، حيث يعتمد فقط على شعاع القوة **F** و شعاع الانتقال **r** الواصل بين أي نقطتين من خطي القوتين، ولا يعتمد على شعاعي الموضع $\mathbf{r}_A$ و$\mathbf{r}_B$، المنطلقين من النقطة O. إذاً، عزم المزدوجة يختلف عن عزم القوة الذي لا بد من أخذه حول نقطة معينة، وبالتالي يوجد لشعاع عزم القوة نقطة تطبيق.

1-12-4 عزم المزدوجة سلمياً

من المعادلة (4-15) نجد أن القيمة السلمية لعزم المزدوجة تساوي قيمة الجداء الشعاعي (**r**×**F**)، وتساوي:

$$M = r.F.\sin 0 = F\left(r \sin\theta\right) = F.d \tag{4-16}$$

حيث F قيمة إحدى القوتين و d المسافة العمودية بين القوتين وتسمى أيضاً ذراع المزدوجة، الشكل (4-17). نلاحظ من الشكل أن ($d=r\sin\theta$) مهما كانت قيمة r والزاوية θ.

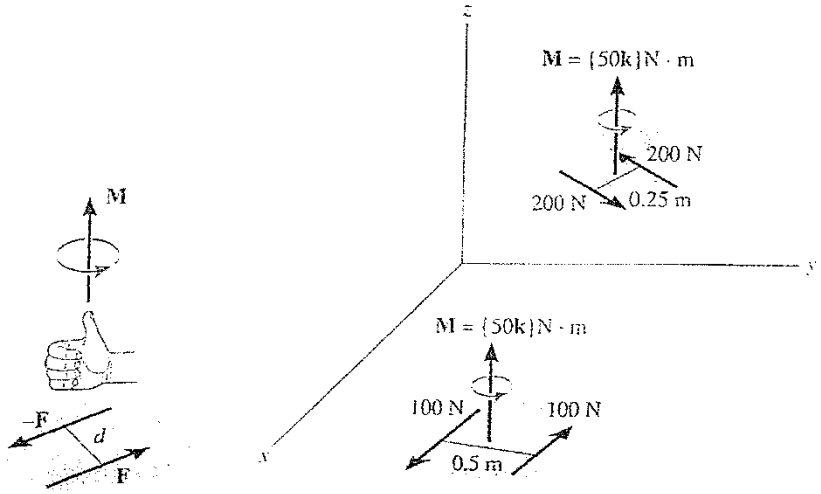


الشكل (4-17)

بما أن شعاع الانتقال **r** يقع في مستوي المزدوجة، فشعاع العزم محمول على العمود على مستوي المزدوجة (ناظم السطح). بالنسبة لاتجاه شعاع العزم فيحدد بقاعدة اليد اليمنى بحيث تدور أصابع اليد اليمنى مع دوران قوتي المزدوجة حول المحور العمودي على مستوي المزدوجة، عندها الإبهام يشير إلى اتجاه شعاع عزم المزدوجة. انظر الشكل (4-18).

2-12-4 المزدوجات المتكافئة

نقول عن مزدوجتين أنهما متكافئتان إذا أنتجتا نفس العزم قيمة واتجاهاً. بما أن حامل العزم الناتج عن المزدوجة عمودي على مستوي المزدوجة، فإن المزدوجتين المتكافئتين يجب أن تقعا بنفس المستوي أو في مستويين متوازيين. ولنأخذ على سبيل المثال المزدوجتين المتكافئتين في الشكل (4-19)، في الأولى قيمة كل من القوتين (200 N)، والمسافة العمودية بينهما (0.25 m)، والقوتان في الثانية قيمتهما (100 N) والمسافة بينهما (0.5 m)، إذاً, العزم الناتج عن كل من المزدوجتين متساوٍ ويساوي (50 N.m)، والمزدوجتان واقعتان في مستويين أفقيين موازيين للمستوي x-y أي أن شعاعي العزم الطليقين لهما حامل موازي للمحور z.



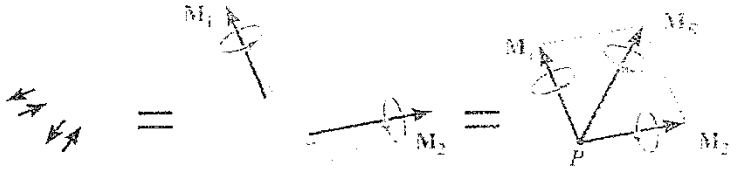
الشكل (4-19)

الشكل (4-18)

3-12-4. محصلة عزم مزدوجتين

بما أن عزم المزدوجات عبارة عن أشعة طليقة، إذاً يمكن تطبيقها في أي نقطة P من الجسم وجمعها جمعاً شعاعياً. مثلاً لدينا مزدوجتان واقعتان في مستويين غير متوازيين تؤثران على الجسم المبين بالشكل (4-20)، عزم هاتين المزدوجتين هو الشعاعان $\mathbf{M}_1$ و$\mathbf{M}_2$. لننقل هذين الشعاعين إلى نقطة ما من الجسم P، وبالجمع الشعاعي نحصل على العزم المحصل:

$$\mathbf{M}_R=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$$



الشكل (4-20)

إذا كان لدينا أكثر من مزدوجتين فالعزم المحصل لها يحسب من العلاقة:

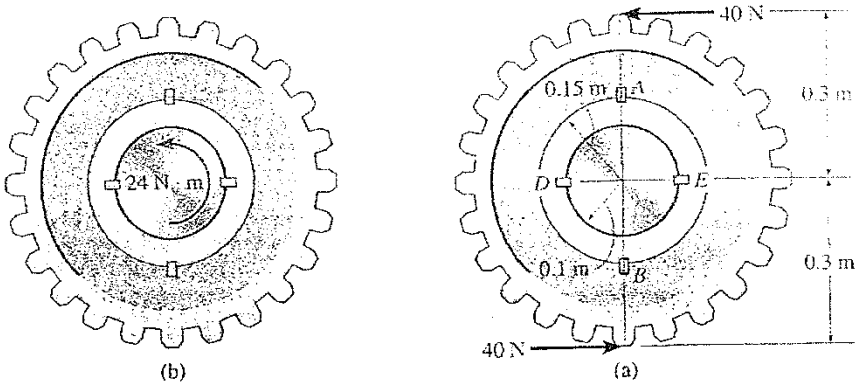
$$\mathbf{M}_R = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \qquad (4\text{-}17)$$

مثال 4-14

تؤثر على المسنن المزدوجة المبينة بالشكل (a) والمطلوب حساب قيمة قوى المزدوجة المكافئة إذا طبقت في:

1- النقطتين A و B.

2- النقطتين D و E.



الحل:

قيمة عزم المزدوجة تحسب من العلاقة (4-16):

$$M = Fd = 40(0.6) = 24\ \text{N.m}$$

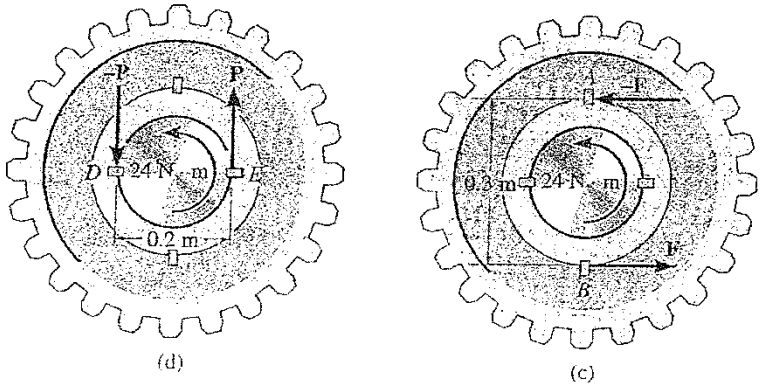
واتجاه دوران هذا العزم عكس عقارب الساعة، وشعاعه حسب قاعدة اليد اليمنى باتجاه خارج الورقة وهذا الشعاع طليق يمكن تطبيقه في أي نقطة من المسنن، الشكل (b).

لحساب قيمة كل قوة F من قوتي المزدوجة المكافئة في النقطتين A وB، الموضحتين بالشكل (c) نكتب:

$$M = F\,d \;;\Rightarrow F = \frac{M}{d} = \frac{24}{0.3} = 80\,\text{N}$$

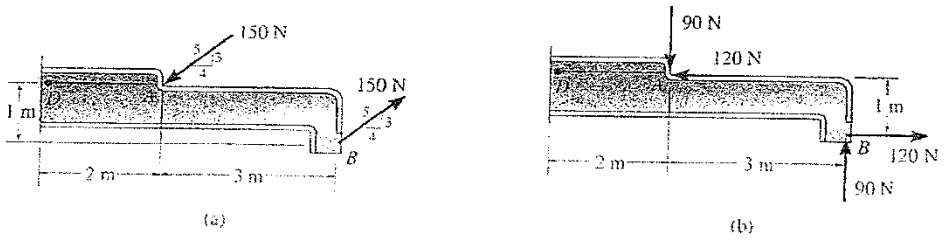
أما إذا أردنا تطبيق مزدوجة مكافئة عند النقطتين D وE، فالقوة P الموضحة في الشكل (d) تساوي:

$$M = P\,d \;;\Rightarrow P = \frac{M}{d} = \frac{24}{0.2} = 120\text{N}$$



مثال 4-15

احسب عزم المزدوجة المطبقة على عنصر الآلية المبينة بالشكل (a).



الحل:

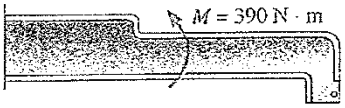
يمكن في هذه المسألة حساب ذراع عزم المزدوجة d، ولكن يمكن بشكل أبسط من ذلك تحليل المزدوجة إلى مزدوجتين، وذلك بتحليل كل من قوتي المزدوجة إلى مركبتين، الأولى محمولة على المحور x:

$$F_x = \frac{4}{5}150 = 120\,\text{N}$$

والثانية محمولة على المحور y :

$$F_y = \frac{3}{5}150 = 90\,\text{N}$$

انظر الشكل (b).



(c)

لحساب عزم المزدوجتين يمكن إتباع عدة طرائق، كأن نأخذ عزم جميع القوى حول نقطة ما من الجسم ولتكن D مثلاً وليكن الدوران عكس عقارب الساعة موجباً فيكون:

$$\curvearrowleft\ M_D = 120(0) - 9(2) + 90(5) + 120(1) = 390\,\text{N.m}\ \curvearrowright$$

ولكن الأسهل أن نأخذ عزوم هذه القوى حول النقطة A أو النقطة B، لأن ذراع العزم في هاتين النقطتين يصبح معدوماً، أي:

$$\curvearrowleft\ M_A = 900(3) + 120(1) = 390\,\text{N.m}\ \curvearrowright$$

كما يمكن حساب هذا العزم أيضاً عن طريق حساب عزم المزدوجتين مباشرة وجمعهما باعتبار عكس عقارب الساعة اتجاهاً موجباً، فعزم المزدوجة الأولى:

$$M_1 = F_x\, d_1 = 120(1) = 120\,\text{N.m}\ \curvearrowleft$$

وعزم المزدوجة الثانية:

$$M_2 = F_y\, d_2 = 90(1) = 270\,\text{N.m}\ \curvearrowleft$$

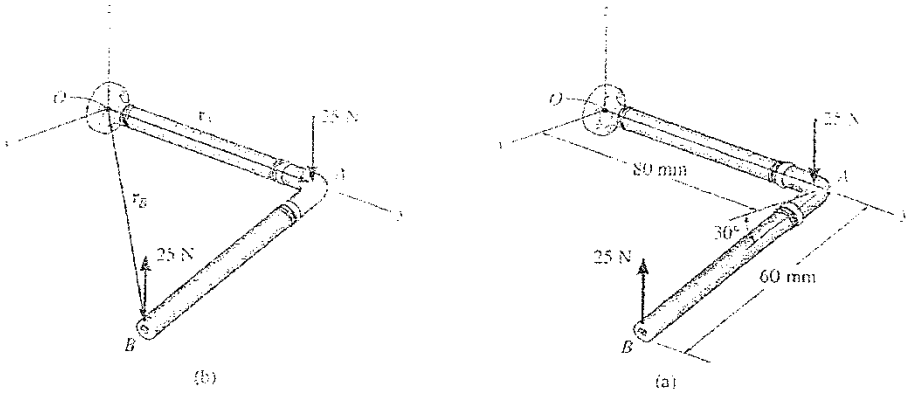
وبما أن دوران المزدوجتين عكس عقارب الساعة، فالعزم الكلي:

$$M = M_1 + M_2 = 120 + 270 = 390\,\text{N.m}\ \curvearrowleft$$

وشعاع العزم طليق يمكن تطبيقه في أي نقطة من نقاط الجسم.

مثال 4-16

احسب عزم المزدوجة المؤثرة على الأنبوب المبين بالشكل علماً أن الجزء AB من الأنبوب يميل عن الأفق بزاوية 30° نحو الأسفل.



الحل:

شعاعياً:

عزم المزدوجة يساوي مجموع عزمي قوتي المزدوجة حول أي نقطة من الجسم ولتكن النقطة O، الشكل (b)، حيث $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ شعاعا الموضع للنقطتين A و B، على التوالي.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M} = (60\cos 30^\circ \mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 60\sin 30^\circ \mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) + (80\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M} = -1299\mathbf{j} - 2000\mathbf{i} + 2000\mathbf{i}$$
$$\mathbf{M} = \{-1299\mathbf{j}\}\ \text{N.mm}$$

يمكن إيجاد العزم بطريقة أسهل إذا قمنا بحسابه حول النقطة A، حيث شعاع الانتقال $\mathbf{r}_{AB}$، الشكل (c)، أي:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M} = (60\cos 30^\circ \mathbf{i} - 60\sin 30^\circ \mathbf{k}) \times (25\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M} = \{-1299\mathbf{j}\}\ \text{N.mm}$$

سلمياً:

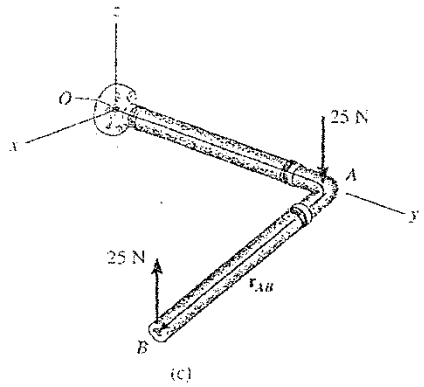
على الرغم من أننا ندرس جسماً في الفراغ، إلا أنه يمكن بسهولة إيجاد ذراع العزم d، فمن الشكل (d) نلاحظ أن الذراع d عبارة عن ضلع في مثلث قائم، ومنه يمكن تطبيق المعادلة السلمية:

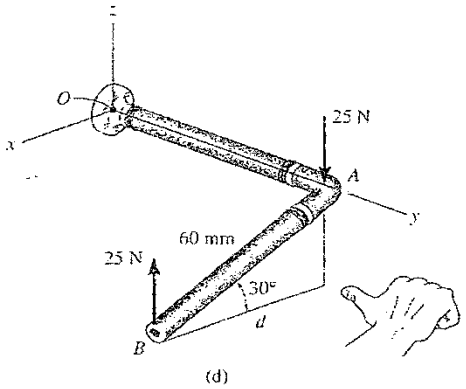
$$M = F\,d = 25\left(60\cos 30^{o}\right) = 25(51.96)$$

$$M = 1299\,\text{N.mm}$$

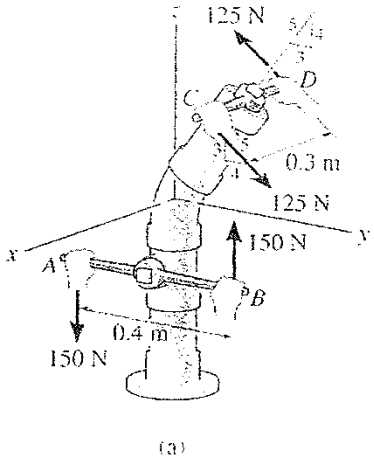
بتطبيق قاعدة اليد اليمنى نجد أن شعاع العزم يتجه بالاتجاه السالب للمحور y، أي:

$$\mathbf{M} = \{-1299\,\mathbf{j}\}\,\text{N.m}$$





مثال 4-17



حدد العزم المحصل لعزمي المزدوجتين المطبقتين على الصمامين المبينين بالشكل (a).

الحل:

عزم المزدوجة المطبقة على النقطتين A و B، سلمياً يساوي:

$$M_1 = F.d = 150(0.4) = 60\,\text{N.m}$$

وحسب قاعدة اليد اليمنى فإن شعاع عزم هذه القوة محمول على المحور x بالاتجاه الموجب، ومنه:

$$\mathbf{M}_1 = \{60\,\mathbf{i}\}\,\text{N.m}$$

لحساب العزم $\mathbf{M}_2$ للمزدوجة المطبقة في النقطتين C و D، نحسب عزم هذه المزدوجة حول النقطة D حيث:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C = (0.3\mathbf{i}) \times \left(125\frac{4}{5}\mathbf{j} - 125\frac{3}{5}\mathbf{k}\right)$$

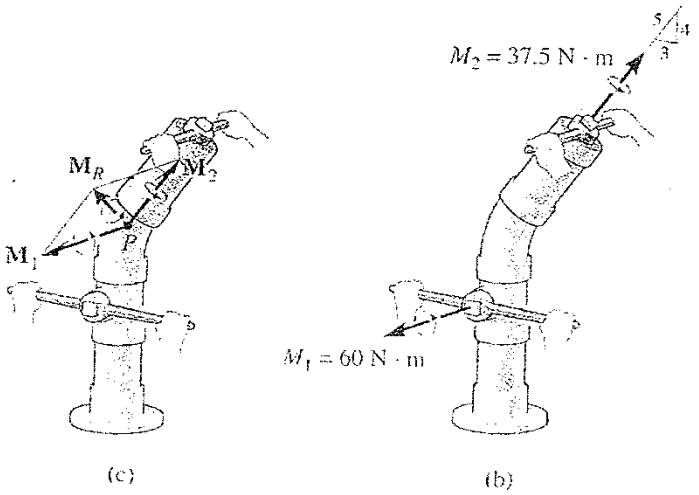
$$\mathbf{M}_2 = = (0.3\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j} - 75\mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_2 = \{22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}\ \text{N.m}$$

بما أن الشعاعين $\mathbf{M}_1$ و$\mathbf{M}_2$ طليقان فيمكن تطبيقهما على أي نقطة من نقاط الجسم ولتكن P مثلاً، الشكل (c)، وجمعهما جمعاً شعاعياً:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = (60\mathbf{i}) + (22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k})$$

$$\mathbf{M} = \{60\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}\ \text{N.m}$$



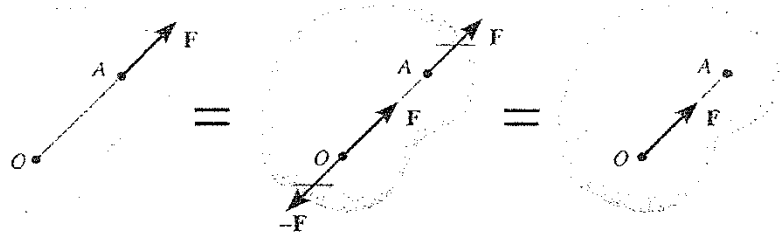
13-4 نقل قوة على جسم صلب (Movement of a Force on a Rigid Body)

تحتاج دراسة توازن الأجسام في كثير من الأحيان إلى تحصيل أو اختزال جملة القوى إلى أبسط شكل ممكن، وهذا لا يتم إلا إذا نقلنا القوى من نقطة من الجسم الصلب إلى نقطة أخرى لتلتقي جميع القوى في نقطة واحدة فنجمعها جمعاً شعاعياً، وذلك للحصول على جملة مكافئة للجملة الأصلية. ويتم نقل القوة من نقطة إلى أخرى بإحدى حالتين، إما على حاملها أو على حامل آخر، وسندرس الحالتين بالتفصيل.

1-13-4 نقل قوة على حاملها

لدينا الجسم الصلب المبين بالشكل (4-21)، الخاضع لتأثير القوة **F** المطبقة على النقطة A. لنقل هذه القوة إلى النقطة O دون تغيير في حالة الجسم، سوف نضيف مبدئياً

في النقطة O القوتين $\mathbf{F}$ و$(-\mathbf{F})$، بما أن القوتين المؤثر عليهما بخط متساويتان ومتعاكستان بالاتجاه وعلى نفس الحامل فمجموعهما يساوي الصفر، ويمكن حذفهما، هكذا تبقى لدينا القوة $\mathbf{F}$ المطبقة على النقطة O، وهو المطلوب.



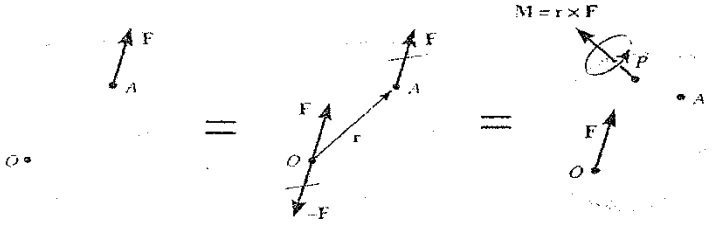
الشكل (4-21)

منه نستنتج أننا نستطيع نقل القوة على حاملها إلى أي نقطة من هذا الحامل دون أن يؤثر ذلك على حالة الجسم، أي توازنه أو حركته وقوى استناده. يسمى شعاع القوة في هذه الحالة بالشعاع المنزلق.

4-13-2 نقل قوة إلى نقطة ليست على حاملها

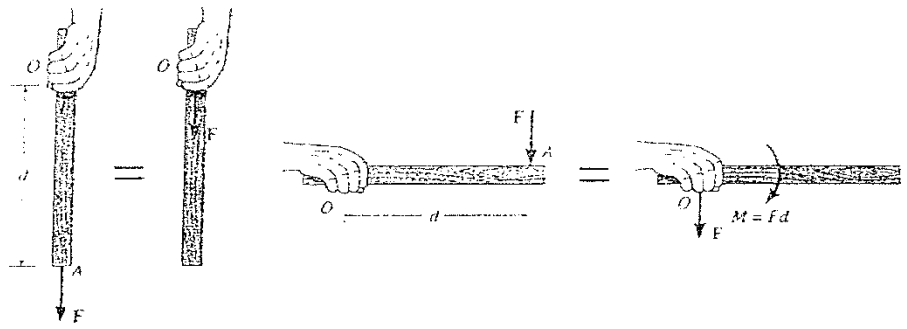
يبين الشكل (4-22) جسماً صلباً خاضعاً لتأثير القوة $\mathbf{F}$ في النقطة A، والمطلوب نقل هذه القوة إلى النقطة O، دون أن يؤثر ذلك على حالة الجسم. بنفس الطريقة السابقة نطبق على النقطة O القوتين $\mathbf{F}$ و$(-\mathbf{F})$، عندها القوتان المؤثر عليهما بخط تشكلان مزدوجة عزمها $\mathbf{M}$ عمودي على مستوي القوتين، ويحسب هذا العزم من الجداء الشعاعي لشعاع الموضع $\mathbf{r}$ والقوة $\mathbf{F}$، $(\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F})$. عزم هذه المزدوجة يمكن تطبيقه على أي نقطة P من الجسم حيث يتم نقل القوة $\mathbf{F}$ إلى النقطة O، حيث ينتج عن هذا النقل عزم.

نتيجة: أنه لنقل قوة من نقطة الى أخرى، نضيف للقوة في موضعها الجديد مزدوجة عزمها يساوي عزم القوة في موضعها القديم حول النقطة الجديدة. مع ملاحظة الحفاظ على توازي حامل القوة بعد النقل.



الشكل (4-22)

يمكن إثبات الحالتين السابقتين فيزيائياً، فلو طبقنا قوة F على قطعة الخشب الشاقولية المبينة بالشكل (4-23)، سواء طبقنا هذه القوة على النقطة A أو النقطة O لن يغير ذلك من القوة المطبقة على المسند (اليد الممسكة بالقطعة الخشبية)، أو من توازن هذه القطعة الخشبية. وبالتالي إذا أثرت هذه القوة الشاقولية على أي نقطة من نقاط الشاقول (خط عمل القوة)، لن تتغير في الوضع الخارجي للقطعة الخشبية. بينما في القطعة الخشبية الأفقية المبينة في نفس الشكل (4-23)، فإن القوة F المؤثرة في النقطة A تؤثر على المسند في النقطة O بقوة نحو الأسفل والعزم يحاول تدوير الجسم باتجاه عقارب الساعة، وبالتالي لنقل القوة F إلى النقطة O يجب أن نضيف معها عزماً يساوي ($M=F.d$)، باتجاه عقارب الساعة.



الشكل (4-23)

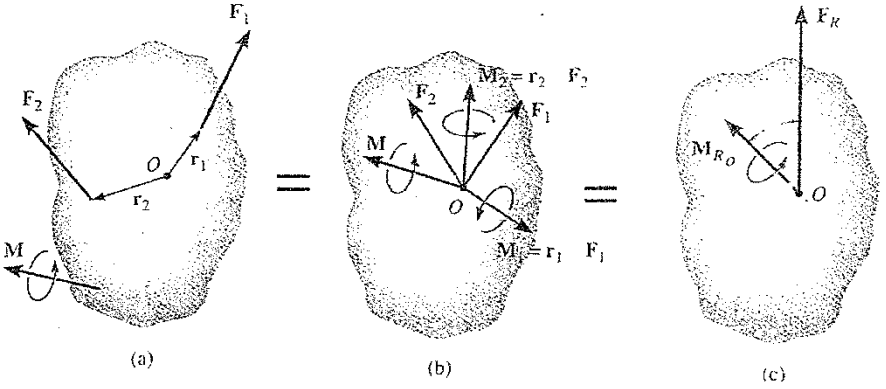
4-4 المحصلة لمجموعة قوى ومزدوجات

(Resultants of Forces and Couples)

يفضل عند دراسة الأجسام الخاضعة لمجموعة من القوى والعزوم أن نستبدل هذه الجملة بجملة قوة محصلة وحيدة (محصلة عامة) $\mathbf{F_R}$، ومحصلة عزم وحيد $\mathbf{M_R}$. فمثلاً لاستبدال جملة القوى $\mathbf{F_1}$، و$\mathbf{F_2}$، والعزم $\mathbf{M}$، المطبقة على الجسم المبين بالشكل (4-24)، إلى قوة محصلة وحيدة وعزم محصلة وحيد عند النقطة O، بداية ننقل القوة $\mathbf{F_1}$ إلى النقطة O، مع إضافة عزم مضلق عند O، يساوي: ($\mathbf{M_1} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{F_1}$). وبنفس الطريقة ننقل القوة $\mathbf{F_2}$ إلى النقطة O مع عزم ($\mathbf{M_2} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{F_2}$)، طبعاً شعاع عزم المزدوجة $\mathbf{M}$

شعاع طليق و بالتالي يمكن أن ننقله إلى أي نقطة من الجسم بشرط أن يبقى شعاع العزم موازياً لنفسه. أصبح لدينا الآن قوتان $\mathbf{F}_1$، و$\mathbf{F}_2$، مطبقتان في النقطة O وبالتالي محصلة القوتين $\mathbf{F}_R$ هي المجموع الشعاعي لشعاعي القوتين الذي يمكن الحصول عليه بسهولة باستخدام طريقة متوازي الأضلاع أو أي طريقة أخرى، أي:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \sum \mathbf{F} \qquad (4\text{-}18)$$



الشكل (4-24)

وكذلك العزم المحصل للعزوم الثلاثة $\mathbf{M}$، و $\mathbf{M}_1$، و $\mathbf{M}_2$، هو المجموع الشعاعي لأشعة هذه العزوم، أي:

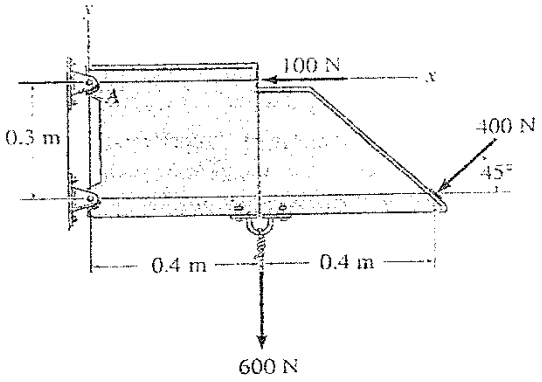
$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \qquad (4\text{-}19)$$

وبذلك حصلنا على جملة مؤلفة من قوة محصلة (محصلة عامة) $\mathbf{F}_R$ وعزم محصل $\mathbf{M}_{Ro}$ في النقطة O مكافئة لجملة القوتين $\mathbf{F}_1$، و $\mathbf{F}_2$ والعزم $\mathbf{M}$، المطبقة على الجسم. إذا كانت القوى أكثر من اثنتين فإننا نقوم بنقل القوى واحدة تلو الأخرى إلى النقطة O مع إضافة عزم لكل قوة يساوي الجداء الشعاعي لشعاع الموضع بشعاع القوة، ثم نقوم بجمع أشعة القوى وأشعة العزوم.

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} \; , \; \mathbf{M}_{R_O} = \sum \mathbf{M}_O \qquad (4\text{-}20)$$

مثال 4-19

استبدل القوى المؤثرة على الدعامة المبينة بالشكل بقوة وعزم عند النقطة A.



الحل:

بما أن الحالة مستوية فسنعتمد على الحل السلمي ولتطبيق نظرية العزم سنحلل القوة 400 N إلى مركبتين على المحورين x و y.

محصلة القوى:

$$\rightarrow F_{R_x} = \sum F_x = -100 - 400\cos 45^o = -382.8\text{N}$$

$$F_{R_x} = 382.8N \leftarrow$$

$$\uparrow F_{R_y} = \sum F_y = -600 - 400\sin 45^o = -882.8\text{N}$$

$$F_{R_y} = 882.8N \downarrow$$

المحصلة العامة F_R:

$$F_R = \sqrt{\left(F_{R_x}\right)^2 + \left(F_{R_y}\right)^2} = \sqrt{(382.8)^2 + (882.8)^2} = 962\text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}} = \tan^{-1}\frac{-882.8}{-382.8} = 246.6^o$$

العزم المحصل:

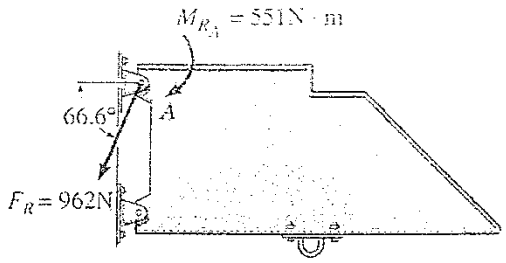
بفرض الدوران الموجب حول A عكس عقارب الساعة، كون العزم المحصل (محصلة العزوم) عبارة عن المجموع الجبري لعزوم القوى:

$$\circlearrowleft M_{R_A} = \sum M_A$$

$$M_{R_A} = 100(0) - 600(0.4) - \left(400sin\,45^o\right)(0.8) - \left(400cos\,45^o\right)(0.3)$$

$$M_{R_A} = -551\,\text{N.m} = 551\,\text{N.m}\circlearrowright$$

بالنتيجة إذا طبقنا القوة $\mathbf{F}_R$ والعزم $\mathbf{M}_{R_A}$ عند النقطة A فإن ردود الأفعال في المساند لن تختلف عن حالة تطبيق القوى الثلاث الفعلية.



15-4 تحصيل جملة قوة و عزم متعامدين إلى قوة وحيدة

(Simplification of System of Moment and Force to a Single Resultant Force)

ليكن لدينا الحالة الخاصة المبينة بالشكل (4-25-a)، حيث الجسم خاضع لتأثير جملة قوى وعزوم، ولتكن محصلة هذه القوى في النقطة O، هي $\left(\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}\right)$، ومحصلة جملة العزوم:

$$\left(\mathbf{M}_{R_O} = \sum \mathbf{M}_O\right)$$

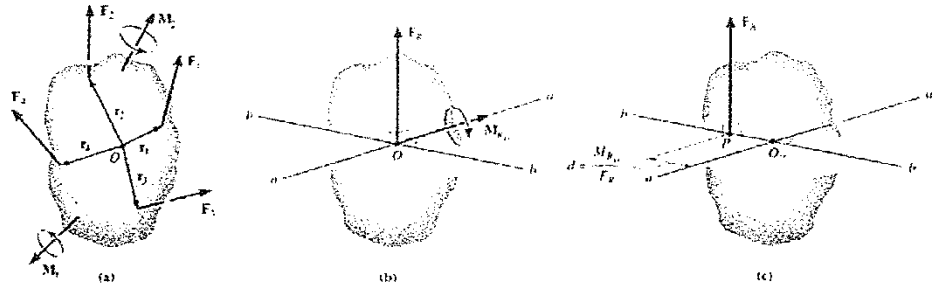
وليكن شعاعا محصلة القوى $\mathbf{F}_R$ ومحصلة العزوم $\mathbf{M}_{R_O}$ متعامدين، الشكل (4-25-b)، في هذه الحالة يمكن تبسيط الجملة إلى قوة محصلة وحيدة وذلك بنقل المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ إلى نقطة P، كما في الشكل (4-25-c)، سواءً أكانت النقطة P داخل الجسم أم خارجه، بحيث ينعدم العزم المحصل المطبق على الجسم ويصبح الجسم خاضعاً لقوة وحيدة $\mathbf{F}_R$ تكافئ جملة القوى والعزوم المبينة بالشكل (4-25-a)، التي يخضع لها فعلياً. أو بطريقة أخرى إذا نقلنا جميع القوى المؤثرة على الجسم، إلى النقطة P وحصلنا جملة هذه القوى و العزوم فإننا سنحصل على محصلة عزوم تساوي الصفر، وتبقى فقط المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ مطبقة عند النقطة P، الشكل (2-25-c).

لتحديد موقع النقطة P مقاسة من النقطة O، يجب أولاً حساب كل من المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ والعزم المحصل $\mathbf{M}_{R_O}$. نختار النقطة P واقعة على المحور bb العمودي على كل من شعاع المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ الشاقولي، وشعاع محصلة العزوم $\mathbf{M}_{R_O}$ ،

المحمول على المحور aa، وبالتالي عمودي على مستوي الشعاعين. تحسب المسافة d بين النقطة P والنقطة O على المحور bb من العلاقة:

$$M_{R_O} = F_R.d \Rightarrow d = \frac{M_{R_O}}{F_R} \qquad (4\text{-}21)$$

المسافة d موضحة في الشكل (c).



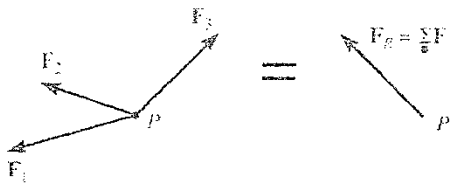
الشكل (4-25)

إذا كان الجسم خاضعاً لجملة قوى متلاقية في نقطة أو متوازية أو كانت القوى واقعة في مستوٍ واحد. يمكن تبسيط هذه الحالات إلى جملة قوة وحيدة (محصلة عامة)، لأن:

- القوى المتلاقية في نقطة محصلتها قوة فقط مطبقة على نقطة تلاقي هذه القوى، وبما أننا لم ننقل القوى، لا يوجد عزوم والجملة قوة وحيدة.
- القوى الواقعة في مستوٍ واحد أو المتوازية، فنقل هذه القوى إلى نقطة ما من الجسم لتحصيلها تنتج عزوماً محصلتها (شعاع العزم المحصل) عمودي على شعاع محصلة القوة (المحصلة العامة).

4-15-1 جملة قوى متقاطعة في نقطة

تم دراسة تحصيل (اختزال) جملة القوى المتلاقية في نقطة بالتفصيل في الفصل الثاني، حيث محصلة القوى المتلاقية في نقطة عبارة عن قوة فقط مطبقة على نقطة تلاقي القوى، والنقطة P تحقق المطلوب بتبسيط الجملة إلى محصلة قوة وحيدة (محصلة عامة). الشكل (4-26).



الشكل (4-26)

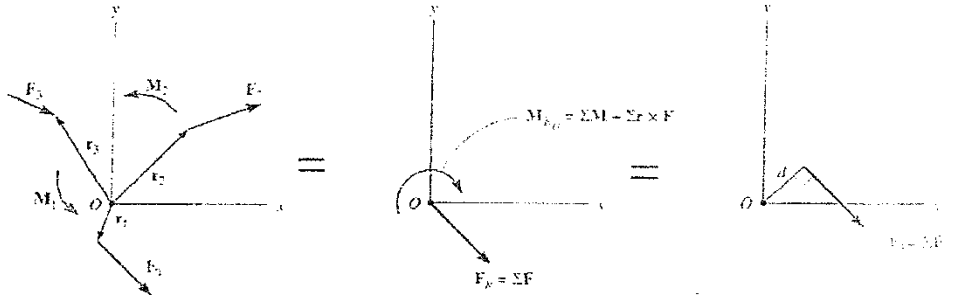
4-15-2 جملة قوى واقعة في مستوي واحد

إذا كان لدينا جملة قوى واقعة في المستوي (x-y)، بالإضافة إلى إمكانية أن يوجد في الجملة عزوم بشرط أن تكون عمودية على مستوي القوى أي موازية للمحور z، الشكل (4-27)، لاستبدال هذه الجملة بجملة قوة وحيدة، ننقل القوى إلى نقطة ما O واقعة في المستوي (x-y)، بحيث ينتج عن نقل كل قوة عزم عمودي على مستوي القوى أي محمول على المحور z، وبالتالي العزم المحصل لهذه العزوم المتوازية عمودي على المستوي (x-y)، ويحسب من العلاقة:

$$\mathbf{M}_{R_O} = \sum \mathbf{M} + \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4\text{-}22)$$

وبما أن شعاع العزم المحصل عمودي على شعاع محصلة القوى العامة ($F_R=\Sigma F$)، الشكل (4-27b)، فيمكن نقل المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ إلى نقطة على المحور الواقع في المستوي (x-y)، والعمودي على حامل المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$، وتبعد هذه النقطة مسافة مقدارها d عن النقطة O، الشكل (4-27c). حيث تحسب d من العلاقة:

$$d = \frac{M_{R_O}}{F_R}$$



(a) (b) (c)

الشكل (4-27)

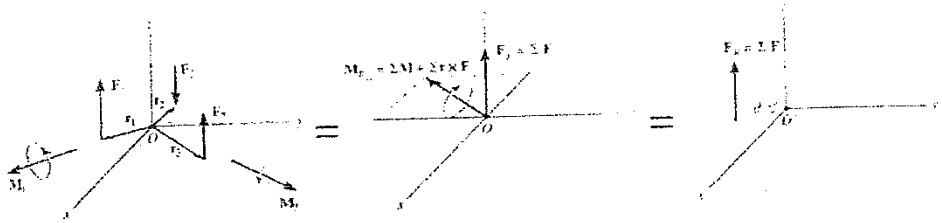
3-15-4 جملة قوى متوازية

ليكن لدينا جملة قوى متوازية، والتي قد تحتوي على عزوم عمودية على هذه القوى (بما أن القوى متوازية فالعمودي على أي منها عمودي عليها جميعاً)، كما في الشكل (4-28–a). يمكن استبدال هذه الجملة بجملة قوة وحيدة. عند نقل قوة من قوى الجملة إلى نقطة ما O، يضاف للجملة عزم له مركبتان على المحورين x و y، بينما ليس للقوة عزم حول المحور z لأن القوى موازية لهذا المحور. العزم المحصل الناتج عن النقل واقع في المستوي x-y، ويعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{M}_{R_O} = \sum \mathbf{M} + \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

وبما أن هذا العزم المحصل عمودي على المحصلة العامة $(\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F})$ المحمولة على المحور z، الشكل (4-28–b)، فيمكن نقل المحصلة $\mathbf{F}_R$ إلى نقطة على محور واقع في المستوي (x-y)، وعمودي على حامل الشعاع $\mathbf{M}_{R_O}$ وتبعد نقطة تطبيق القوة $\mathbf{F}_R$ عن النقطة O مسافة d، الشكل (4-28–c). تحسب d من العلاقة:

$$d = \frac{M_{R_O}}{F_R}$$



(a) (b) (c)

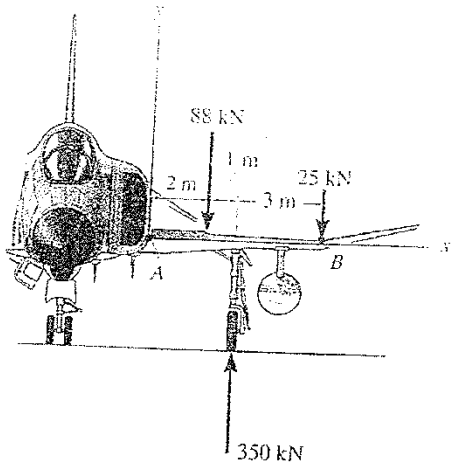
الشكل (4-28)

مثال 4-20

استبدل جملة القوى المؤثرة على جناح الطائرة المبينة بالشكل بقوة وحيدة وحدد نقطة تطبيقها على الجناح نسبة للنقطة A.

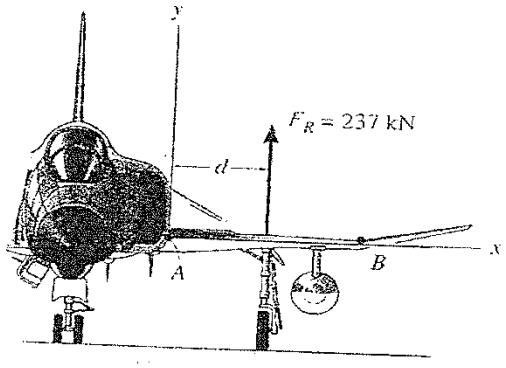
الحل:

يمكن استبدال جملة قوى مستوية مؤثرة على جسم بقوة وحيدة لأن العزم المحصل لهذه القوى حول نقطة يقع في مستوي القوى العمودية على المحصلة العامة. بفرض جملة المحاور الديكارتية x-y.



الآن لنجد محصلة القوى:

$$\uparrow F_R = \sum F_y = -88 + 350 - 25 = 237\,kN \uparrow$$



محصلة العزوم:

سنقوم بجمع العزوم حول النقطة A جمعاً جبرياً باعتبار أن الدوران عكس عقارب الساعة موجب، قيمة العزم المحصل يجب أن تساوي عزم المحصلة العامة $\mathbf{F_R}$ حول النقطة A عند تطبيقها في نقطة تبعد عنها بمقدار d ، وبالتالي:

$$\circlearrowleft M_{R_A} = \sum M_A \;;$$

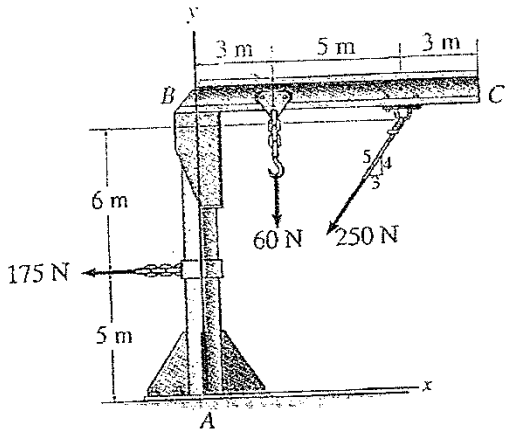
$$237(d) = -88(2) + 350(3) - 25(6) = 724$$

$$\Rightarrow d = 3.05\,\text{m}$$

إذا طبقنا قوة وحيدة شاقولية قيمتها 237 kN باتجاه الأعلى في نقطة من الجناح تبعد عن النقطة A بمقدار 3.05 m، هذه القوة تكافئ القوى الثلاث المطبقة على الجناح وهو المطلوب.

مثال 4-21

تخضع الرافعة المبينة بالشكل إلى ثلاث قوى واقعة في مستوي واحد. بسط هذه الجملة إلى قوة وحيدة وحدد نقطة تقاطع خط عملها مع الرافعة.



الحل:

محصلة القوى:

$$\rightarrow F_{R_x} = \sum F_x = -250\frac{3}{5} - 175 = -325N = 325\,\text{N} \leftarrow$$

$$\uparrow F_{R_y} = \sum F_y = -250\frac{4}{5} - 60 = -260N = 260\,\text{N} \downarrow$$

وقيمة القوة المحصلة:

$$F_R = \sqrt{\left(F_{R_x}\right)^2 + \left(F_{R_y}\right)^2} = \sqrt{(325)^2 + (260)^2} = 416\,\text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}} = \tan^{-1}\frac{-260}{-325} = 218.7^o$$

محصلة العزوم:

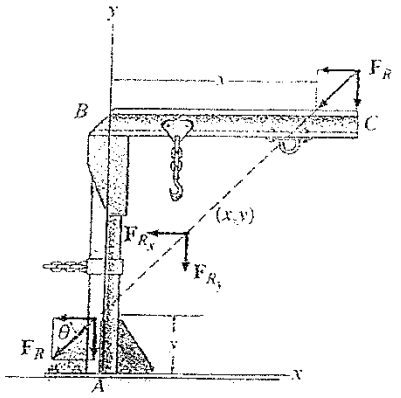
لنأخذ عزوم القوى حول النقطة A ولنجد نقطة تقاطع خط عمل القوة مع ذراع الرافعة AB حيث (x=0)، بحيث إذا طبقنا القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$ في هذه النقطة تولد عزماً يساوي عزوم جملة القوى المطبقة على الرافعة. أي:

$$\circlearrowleft M_{R_A} = \sum M_A :$$

$$325(y) + 260(0) = 175(5) - 60(3) + 250\frac{3}{5}(11) - 250\frac{4}{5}(8)$$

$$\Rightarrow y = 2.29m$$

وبما أنه يمكن زلق القوة $\mathbf{F_R}$ على حاملها يمكن إيجاد نقطة تقاطع خط عملها مع ذراع الرافعة BC بنفس الطريقة حيث (y=11 m)، نجد:



$$\circlearrowleft M_{R_A} = \sum M_A :$$

$$325(11) + 260(x) = 175(5)$$

$$-60(3) + 250\frac{3}{5}(11) - 250\frac{4}{5}(8)$$

$$\Rightarrow x = 10.9\text{m}$$

كما يمكن إيجاد إحداثيات نقطة (x,y) من خط عمل القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$، بأخذ العزوم أيضاً حول النقطة A:

$$\circlearrowleft M_{R_A} = \sum M_A :$$

$$325(y) + 260(x) = 175(5) - 60(3) + 250\frac{3}{5}(11) - 250\frac{4}{5}(8)$$

$$325(y) + 260(x) = 745$$

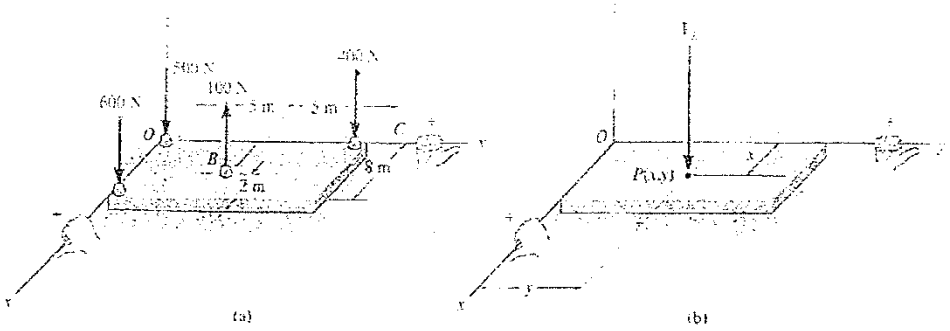
وهي معادلة مستقيم يمثل حامل القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$، لإيجاد تقاطع خط العمل مع AB نعوض (x=0)، نجد:

$$325(y) + 260(0) = 745 \Rightarrow y = 2.29\,\text{m}$$

وكذلك عندما (y=11 m) فإن (x=10.9 m).

مثال 4-22

تؤثر القوى الأربع الشاقولية على البلاطة المبينة بالشكل (a)، والمطلوب استبدال جملة القوى بقوة وحيدة مكافئة، حدد نقطة تطبيقها.



الحل:

يمكن حل المسألة سلمياً كما يلي:

محصلة القوى:

من الشكل نلاحظ أن القوى متوازية ومحصلتها تساوي مجموعها الجبري، أي:

$$\uparrow F_R = \sum F \; ; \Rightarrow F_R = -600 + 100 - 400 - 500$$

$$F_R = -1400N = 1400\text{N} \downarrow$$

محصلة العزم:

يجب أن نختار نقطة تطبيق القوة بحيث يكون عزم القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$ حول المحور x يساوي مجموع عزوم القوى حول المحور x. بفرض أن ذراع العزم y هو البعد العمودي بين خط عمل القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$ والمحور x، وباستخدام قاعدة اليد اليمنى لتحديد عزوم القوى حيث يتجه شعاع العزم الموجب بالاتجاه الموجب للمحور x، نكتب:

$$\circlearrowleft M_{R_x} = \sum M_x ;$$

$$-1400(y) = -600(0) + 100(5) - 400(10) - 500(0)$$

$$-1400(y) = -(3500) \Rightarrow y = 2.5\text{m}$$

وبنفس الطريقة عزم القوة المحصلة حول المحور y يساوي مجموع عزوم القوى حول y. حيث ذراع العزم x هو البعد العمودي بين خط عمل القوة المحصلة $\mathbf{F_R}$ والمحور y. نكتب:

$$\circlearrowleft M_{R_y} = \sum M_y ;$$

$$1400(x) = 600(8) - 100(6) - 400(0) - 500(0)$$

$$1400(x) = 4200 \Rightarrow x = 3\text{m}$$

إذاً، القوة المحصلة (F_R =1400 N) المطبقة على البلاطة في النقطة P(3 m,2.5 m)، الشكل (b)، تكافئ القوى الثاقولية المطبقة على نفس البلاطة المبينة بالشكل (a).

17-4 محصلة حمولة موزعة (Reduction of a Distribution Load)

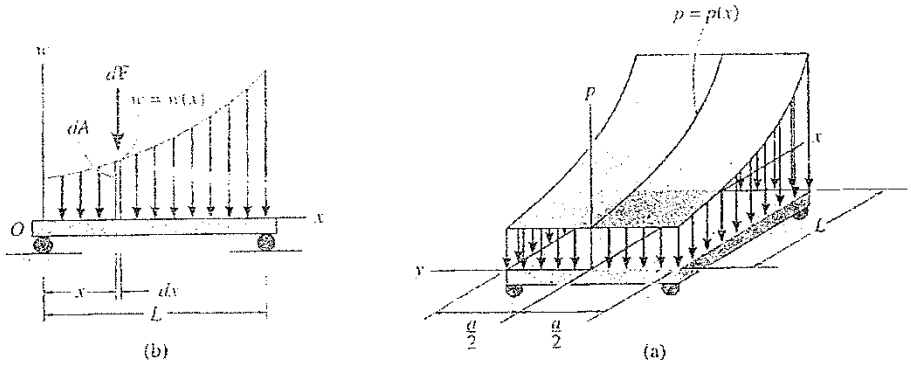
جميع الحمولات المركزة التي مرت معنا سابقا غير موجودة واقعياً، فالقوى بشكل عام تكون موزعة على سطح التماس بين الجسم المطبق القوة والجسم الخاضع للقوة، والقوة المركزة F التي نطبقها على نقطة من الجسم عبارة عن محصلة هذه الحمولة الموزعة. يوجد عدة أنواع للحمولات الموزعة نذكر منها:

- **الحمولة الموزعة على الطول:** كمثال عليها حمولة قضبان القطار على الأرض، وتقدر بوحدة (N/m أو kN/m).
- **الحمولة الموزعة على سطح:** فتأثير الريح على سطح مبنى أو منشأة عبارة عن حمولة موزعة على هذا السطح، وضغط ماء المسبح على الأرضية حمولة موزعة بانتظام على سطح أرضية هذا المسبح لأن قيمة ضغط الماء على الأرضية ثابتة، بينما ضغط الماء على جدار المسبح متغير مع تغير الارتفاع وبالتالي فالجدار يتعرض لحمولة موزعة على السطح غير منتظمة. واحدة الحمولة الموزعة على السطح كواحدة الضغط (N/m^2 أو kN/m^2 أو N/mm^2). جدير أن نذكر هنا أن واحدة الباسكال (Pascal) هي واحدة ضغط وهي من الواحدات الدولية وتساوي: ($1\ Pa=1\ N/m^2$) وبالتالي ($1\ MPa=1\ N/mm^2$).
- **الحمولات الموزعة على الحجم:** كقوة الثقالة فكل جزء من الجسم له كتلة و بالتالي له وزن، محصلة هذه الأوزان تمثل الوزن الكلي للجسم مطبقاً عند نقطة مركز الثقل، كذلك قوة الجذب المغنطيسية للأجسام الحديدية هي قوة موزعة على الحجم. واحدة القوة الموزعة على الحجم (kN/m^3 أو N/mm^3).

لندرس على سبيل المثال تعيين الحمولات الموزعة على السطح المبين في الشكل (4-30-a). حمولة الضغط المطبقة عليه على سطح الصفيحة مبينة بالأسهم الشاقولية العمودية على هذه الصفيحة وقيمة الضغط يحددها طول السهم، نلاحظ أن طول السهم يزداد كلما زاد الاحداثي x، بينما يكون ثابتا باتجاه y من أجل قيمة x معينة. والحمولة أو الضغط في هذا المثال تابع لـ x أي: ($p=p(x)$). إذا ضربنا طرفي معادلة الضغط بعرض الصفيحة (a) نحصل على:

$$w = p(x).a = w(x)$$

حيث w الحمولة المتغيرة على طول الصفيحة. يبين الشكل (4-30b) علاقة تغير w على طول المحور x حيث (y=0)، وطول السهم في هذا الشكل يمثل محصلة القوى الموزعة على عرض الصفيحة ضمن طول يساوي dx .



الشكل (4-30)

كما يمكن تحصيل هذه القوى الموزعة على الطول بقوة وحيدة $\mathbf{F_R}$ مركزة في النقطة التي فاصلتها $\bar{x}$ كما بينا بالفقرة (4-15).

4-17-1 قيمة القوة المحصلة للحمولة الموزعة

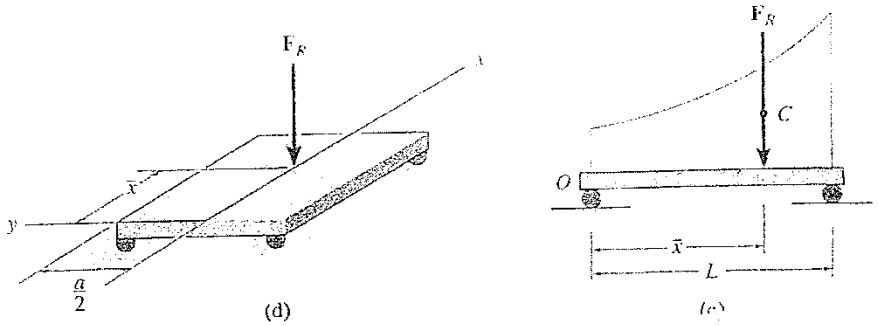
من العلاقة $\mathbf{F_R} = \sum \mathbf{F}$، القوة المحصلة تساوي مجموع القوى المطبقة على الصفيحة، بما أن القوة الموزعة على الطول تتغير مع أي تغير صغير لـ x، فسيكون هناك عدد غير محدود من القوى, لذا سنستخدم التكامل لجمع القوى المتغيرة المطبقة على الصفيحة. بما أن $w(x)$ الحمولة الموزعة على الطول العنصري dx عند النقطة التي تبعد بمقدار x عن المبدأ، فإن القوة العنصرية dF المركزة عند النقطة x ، الشكل (4-30c)، تساوي:

$$dF = w(x)dx = dA$$

أو بمعنى آخر القوة العنصرية dF تساوي المساحة التفاضلية تحت منحني التحميل. بالتكامل على طول الصفيحة نجد:

$$\downarrow F_R = \sum F = \int_l w(x)dx = \int_A dA = A \qquad (4\text{-}26)$$

إذا قيمة القوة المحصلة للحمولة الموزعة تساوي المساحة تحت منحني التحميل، $(w = w(x))$.



الشكل (4-30)

2-17-4 نقطة تطبيق القوة المحصلة

بالعودة للمعادلة (4-20)، $\mathbf{M}_{R_O} = \sum \mathbf{M}_O$، يتم تحديد نقطة تطبيق القوة المحصلة $\mathbf{F}_R$ بحيث يكون عزم المحصلة حول نقطة ما، O مثلاً، الشكل (4-30c)، يساوي عزم الحمولة الموزعة حول نفس النقطة O.

$$\bar{x}\, dF = x\, w(x)\, dx$$

عزم المحصلة يساوي تكامل هذه العلاقة أي:

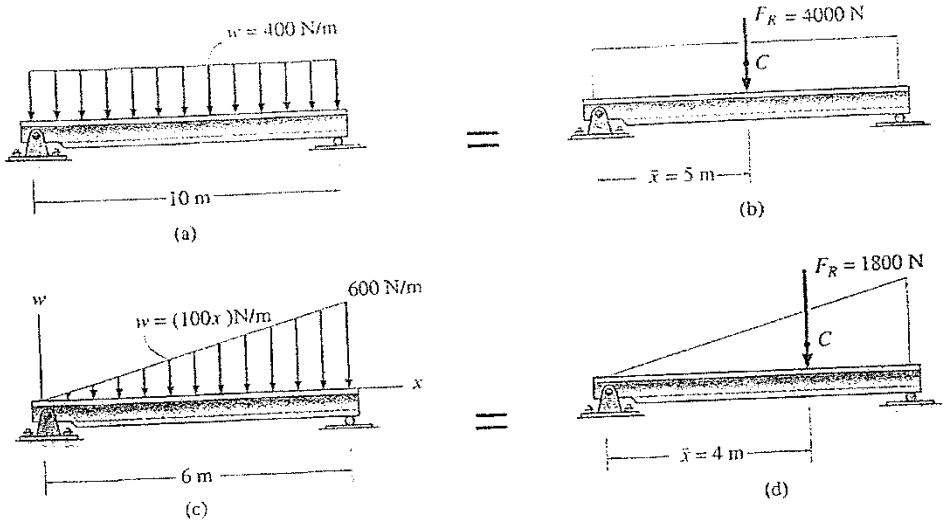
$$\bar{x}F = \int_L x\, w(x)\, dx \;, \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\, w(x)\, dx}{F} = \frac{\int_L x\, w(x)\, dx}{\int_L w(x)\, dx} \qquad (4\text{-}27)$$

تعبر المسافة $(\bar{x})$ عن بعد مركز ثقل السطح C (السطح تحت منحني الحمولة الموزعة) عن المحور y. ومنه نستنتج أن خط عمل محصلة القوة الموزعة يمر من المركز الهندسي لسطح هذه الحمولة. كما يسمى التكامل في بسط المعادلة (4-27)، بالعزم الستاتيكي للمساحة حول المحور y، ويرمز له بـ (S_y).

مثال 4-25

أوجد شدة ونقطة تطبيق القوة المكافئة للحمولة الموزعة على كل من الجائزين المبينين بالشكلين (a)، و(c).



الحل:

الحمولة الموزعة بانتظام في الشكل (a):

من الشكل نجد أن الحمولة الموزعة تساوي (w=400 N/m)، وقيمتها ثابتة على طول الجائز. تشكل هذه الحمولة الموزعة مستطيلاً. والقوة المكافئة F_R للقوة الموزعة تساوي مساحة هذا المستطيل كما هو في الشكل (b)، ومنه:

$$F_R = (400)(10) = 4000\,\text{N}$$

حامل هذه القوة شاقولي ويمر من مركز ثقل المستطيل المشكل للقوة الموزعة، ومركز ثقل المستطيل هو نقطة تلاقي القطرين. أي نقطة تطبيق هذه القوة في منتصف الجائز ،الشكل (b)، أي:

$$\bar{x} = 5\,m$$

الحمولة المثلثية في الشكل (c):

نلاحظ أن الحمولة الموزعة غير متساوية على طول الجائز ولكنها تتغير بانتظام بشكل خطي من الصفر إلى 600 N/m. العلاقة الخطية للحمولة الموزعة تتبع المعادلة:

$$w = 100x \; N/m \; ; \; 6 \geq x \geq 0$$

تشكل هذه الحمولة الموزعة مثلثاً والقوة المكافئة F_R للقوة الموزعة تساوي مساحة هذا المثلث المبين في الشكل (d)، ومنه:

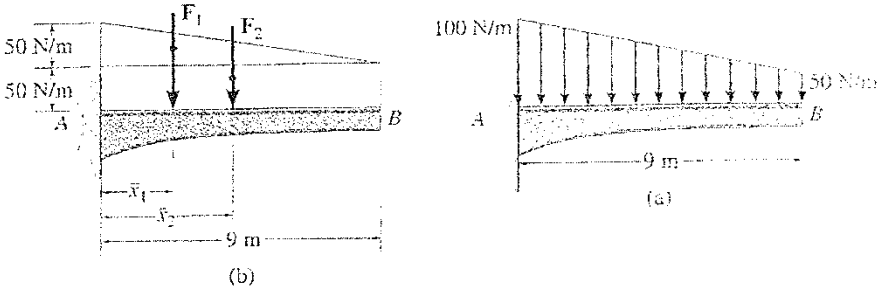
$$F_R = \frac{1}{2}(6)(600) = 1800\,\text{N}$$

حامل هذه القوة شاقولي ويمر من مركز ثقل المثلث المشكل للقوة الموزعة، ومركز ثقل هذا المثلث يبعد بمقدار ثلثي طول الجائز عن رأس المثلث، الشكل (d)، أي:

$$\bar{x} = \frac{2}{3}6 = 4m$$

مثال 4-26

احسب القوة المحصلة المكافئة للقوة الموزعة المطبقة على الجائز المبين بالشكل (a)، وحدد نقطة تطبيقها.



الحل:

مساحة سطح الحمولة هي على شكل شبه منحرف. كما نعلم يمكن بسهولة حساب مساحة شبه المنحرف، ولكن الصعوبة بتحديد مركز ثقل شبه المنحرف. لذا سنعالج هذه المسألة بتقسيم الحمولة الموزعة إلى حمولتين مستطيلة ومثلثية، الشكل (b). شدة القوة المحصلة للحمولتين تساوي مساحة كل منهما، أي:

$$F_1 = \frac{1}{2}(9)(50) = 225\,\text{N}$$

$$F_2 = (9)(50) = 450\,\text{N}$$

خط عمل القوتين $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ شاقولي ويمر من المركز الهندسي للساحة كل حمولة موزعة، الشكل (b)، نجد:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}9 = 3\text{m}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}9 = 4.5\text{m}$$

هاتان القوتان $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ يمكن استبدالهما بقوة محصلة مكافئة (محصلة عامة) تساوي:

$$F_R = F_1 + F_2 = 225 + 450 = 675\text{N}$$

لتحديد نقطة تطبيق هذه المحصلة العامة $\mathbf{F_R}$، الشكل (c)، نجمع عزوم القوى حول النقطة A مثلاً:

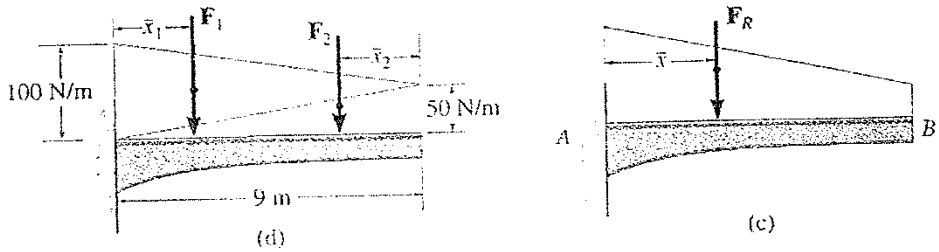
$$\curvearrowleft_{+} M_R = \sum M\,; \Rightarrow \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$$

$$\bar{x} = 4\text{m}$$

كما يمكن تقسيم شبه منحرف القوة الموزعة إلى مثلثين، كما في الشكل (d). في هذه الحالة:

$$F_1 = \frac{1}{2}(9)(100) = 450\text{N}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(9)(50) = 225\text{N}$$



ونقطتا التطبيق:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}9 = 3\text{m}$$

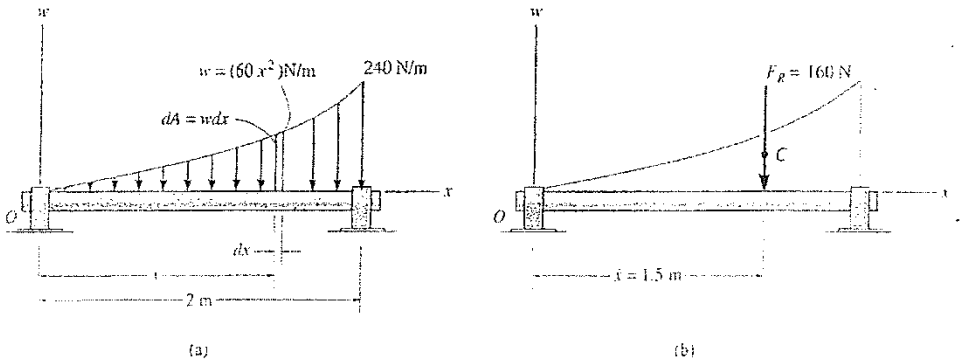
$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}9 = 3\text{m}$$

بنفس الطريقة السابقة، وباستخدام القيم الناتجة نستطيع الوصول إلى شدة المحصلة العامة ونقطة تطبيقها:

$$F_R = 675N \; ; \bar{x} = 4\text{m}$$

مثال 4-27

احسب محصلة الحمولة الموزعة على المحور المبين بالشكل (a)، وحدد نقطة تطبيقها.



الحل:

بما أن مساحة الحمولة الموزعة متغيرة لذلك فإننا سنعالج هذه المسألة بالتكامل ابتداءً من المساحة التفاضلية dA المبينة بالشكل (a) والمعطاة بالعلاقة:

$$dA = w\,dx = 60x^2 dx\,;$$

بتكامل العلاقة من (x = 0) حتى (x = 2 m)، نحصل على محصلة الحمولة الموزعة:

$$F_R = \int_A dA = \int_0^2 60x^2 dx = 60\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow F_R = 160\text{N};$$

نجد بعد ذلك المركز الهندسي لمساحة الحمولة الموزعة عن المحور y، بقسمة العزم الستاتيكي لهذه المساحة حول المحور y، على المساحة:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 x\left(60x^2\right)dx}{160} = \frac{60\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2}{160} = \frac{60\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)}{160}$$

$$\bar{x} = 1.5\,\text{m}$$

يمكن بطريقة أخرى، بما أن الحمولة الموزعة عبارة عن جزء من قطع مكافئ ونحن نعلم أن القطع المكافئ أو أي جزء منه يقسم المستطيل الذي يحتويه والذي طوله a وعرضه b، إلى قسمين: مساحة القسم المحصور تحت القطع المكافئ، كما في مثالنا، تساوي ثلث مساحة المستطيل الذي يحوي القطع المكافئ، والقسم الثاني (مساحة بطن القطع المكافئ)، يساوي ثلثي مساحة المستطيل. ومنه:

$$F_R = A = \frac{ab}{3} = \frac{2(240)}{3} = 140\,\text{N}$$

ومركز ثقل المساحة المحصورة تحت منحني القطع المكافئ يبعد بمقدار:

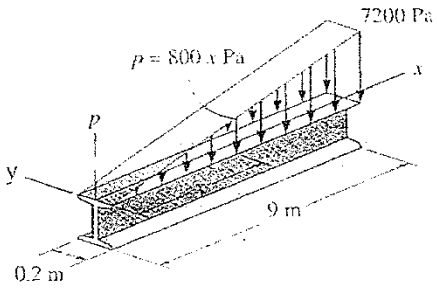
$$\bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2) = 1.5\text{m}$$

مثال 4-28

يخضع الجائز لحمولة ضغط موزعة على سطحه، الشكل (a)، معادلة تغير هذه الحمولة الموزعة:

$$p = 800x\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

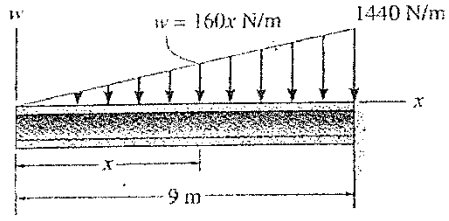
والمطلوب إيجاد محصلة هذه الحمولة ونقطة تطبيقها.



(a)

الحل:

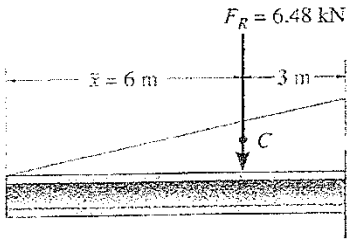
معادلة الحمولة هي $(p = 800x)$، وتبين تغير الحمولة بشكل منتظم من p=0 عند بداية الجائز $(x=0)$ إلى $p=7200$ Pa في نهايته $(x=9$ m$)$. شدة هذه الحمولة الموزعة ثابتة على عرض الجائز أي في الاتجاه y، بينما تتغير بشكل خطي على طول الجائز أي تتناسب طرداً مع x. وبالتالي يمكن اعتبار هذه الحمولة الموزعة متغيرة على طول الجائز وفق المعادلة:



(b)

$$w = (800x)(0.2) = 160x \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

شدة أو قيمة محصلة الحمولة الموزعة هي مساحة المثلث المبين بالشكل (b)، علماً أن $(w=1440$ N/m$)$ عندما $(x = 9$ m$)$:



(c)

$$F_R = \frac{1}{2}(9)(1400) = 6480N = 6.48\text{kN};$$

يمر خط عمل القوة من مركز الهندسي لمساحة المثلث، الشكل (c)، وبالتالي:

$$\overline{x} = \frac{2}{3}9 = 6\,\text{m}$$

يمكن إيجاد محصلة الحمولة الموزعة بحساب حجم الحمولة الموزعة ((p=p(x))، الشكل (a)، المؤثرة على السطح x-y ونقطة تطبيقها هي النقطة (6 m,0)، وحجم هذه الحمولة الموزعة يساوي:

$$F_R = V = \frac{1}{2}(7200)(9)(0.2) = 6480N = 6.48\text{kN};$$

المسألة 4-8

حدد طويلة واتجاه العزم المحصل للقوى حول:

1- النقطة O.

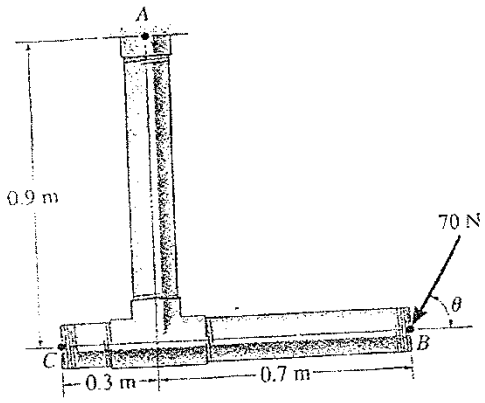
2- النقطة P.

المسألة 4-9

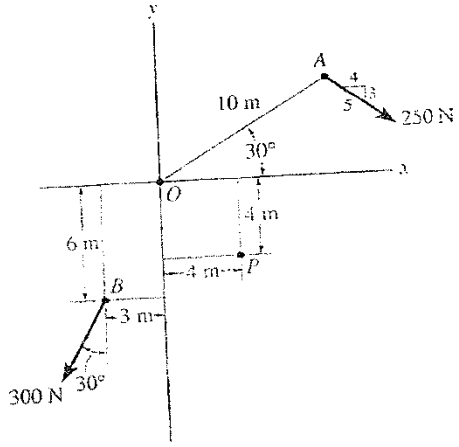
تؤثر القوة (70 N)على نهاية الأنبوب B. إذا علمت أن الزاوية $\theta = 60°$ ، احسب:

1- عزم هذه القوة حول النقطة A.

2- طويلة واتجاه قوة أفقية، مطبقة عند C، والتي تسبب نفس العزم.



شكل المسألتين (4-9) و (4-10)



شكل المسألة (4-8)

المسألة 4-10

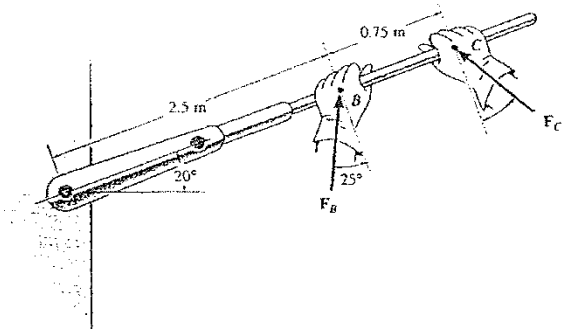
تؤثر القوة (70 N) على نهاية الأنبوب B المبين في الشكل السابق. حدد الزوايا θ $(0° \le \theta \le 180°)$ للقوة التي تولد عزوماً أعظمية وأصغرية حول النقطة A. ما هي قيمة هذه العزوم؟

المسألة 4-11

حدد عزم كل قوة حول البرغي المبينة في الشكل التالي في النقطة A، إذا علمت أن:

1- $F_B = 40$ N ، $F_C = 60$ N.

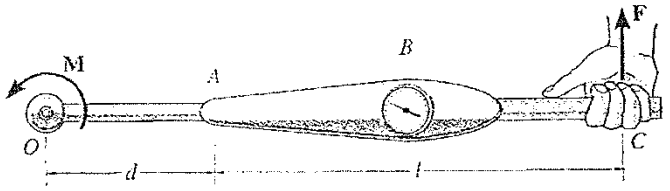
-2 $F_B = 30$ N، $F_C = 45$ N.



شكل المسألة (4-11)

المسألة 4-12

يستخدم مفتاح الربط ABC لقياس العزم المطبق على البرغي. عندما يتوضع البرغي عند A ويتم تطبيق قوة **F** على المقبض عند C، تتم قراءة القياس عند B. إذا تم استخدام امتداد AO ذي طول d على المفتاح، حدد قراءة المقياس اللازمة إذا كان العزم المطلوب على البرغي عند O هو **M**.



شكل المسألة (4-12)

المسألة 4-13

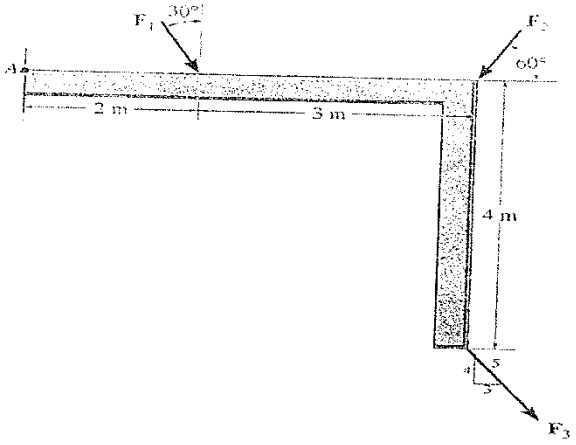
حدد عزم القوى المبينة في الشكل التالي حول النقطة A إذا علمت أن:

$F_3 = 500$ N ، $F_2 = 300$ N ،$F_1 = 250$ N

المسألة 4-14

إذا كان العزم المحصل للقوى حول النقطة A المبينة في الشكل التالي مساوياً 4800 N.m مع اتجاه عقارب الساعة، حدد شدة القوة F_3 إذا كانت:

$F_2 = 400$ N ،$F_1 = 300$ N



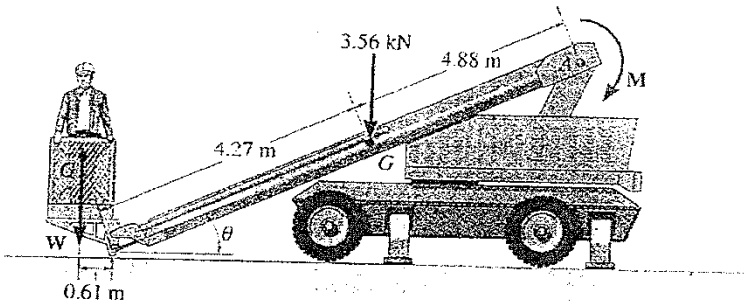
شكل المسألتين (4-13) و (4-14)

المسألة 4-15

ذراع رافعة طوله 9.15 m، وزنه 3.56 kN، ومركز ثقله G. إذا كانت السلة مصممة لحمل رجل وزنه W=1.56 kN، ومركز ثقله 'G، حدد العزم **M** الذي يجب أن يولده المحرك A لكي يتغلب عل العزم الناتج عن القوتين3.56 kN ، W=1.56 kN. الزاوية مع الأفق θ=30°.

المسألة 4-16

ذراع رافعة مبين في الشكل طوله 9.15 m، وزنه 3.56 kN، ومركز ثقله G. إذا كانت قيمة العزم الأعظمي الذي يمكن للمحرك A أن يولده M = 27.1 kN.m، حدد الحمولة الأعظمية **W**، والتي مركز ثقلها 'G، التي يمكن رفعها. إذا علمت أن الزاوية θ=30°.



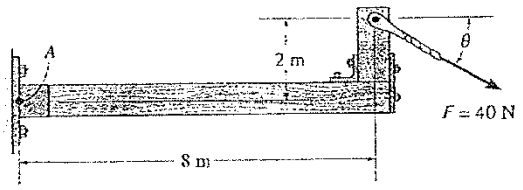
شكل المسألتين (4-15) و (4-16)

المسألة 4-17

حدد الزاوية θ ($0° \le \theta \le 180°$)، واحسب عزم القوة $F = 40$ N بحيث تسبب:

1- العزم الأعظمي حول النقطة A.

2- العزم الأصغري حول النقطة A.



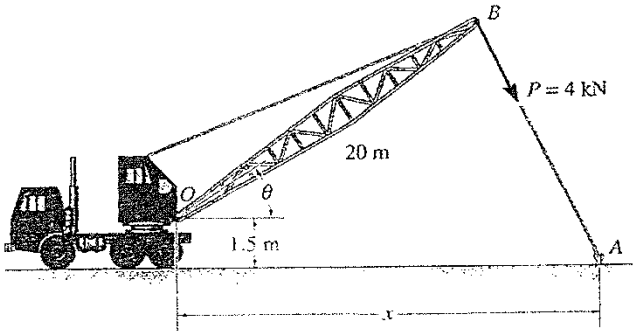
شكل المسألة (4-17)

المسألة 4-18

إذا علمت أن قوة سحب الحبل، $P = 4$ kN عند نهاية ذراع الرافعة المبينة في الشكل السابق ذي الطول 20 m. وكانت $\theta = 30°$، حدد بعد الخطاف x عن A اللازم كي تنتج هذه القوة عزماً أعظمياً حول النقطة O. ما هي قيمة هذا العزم؟

المسألة 4-19

إذا علمت أن قوة سحب الحبل، $P = 4$ kN عند نهاية ذراع الرافعة المبينة في الشكل ذي الطول 20 m، وأن $x = 25$ m، حدد الزاوية θ للذراع بحيث تنتج هذه القوة عزماً أعظمياً حول النقطة O. ما هو هذا العزم؟



شكل المسألتين (4-18) و (4-19)

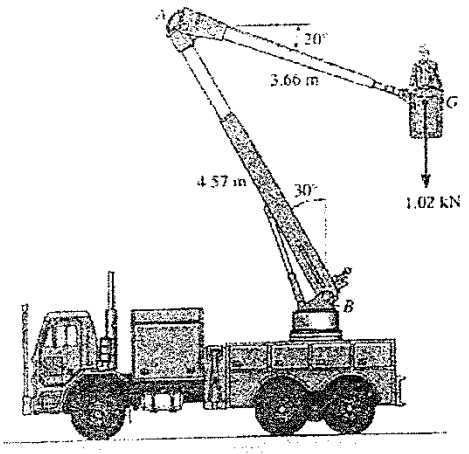
المسألة 4-20

تستخدم الأداة عند A لتثبيت شفرة آلية تشذيب العشب عند ربط الصامولة بالمفتاح المبين في الشكل التالي. إذا تم تطبيق قوة 50 N على مفتاح الربط عند B في الاتجاه

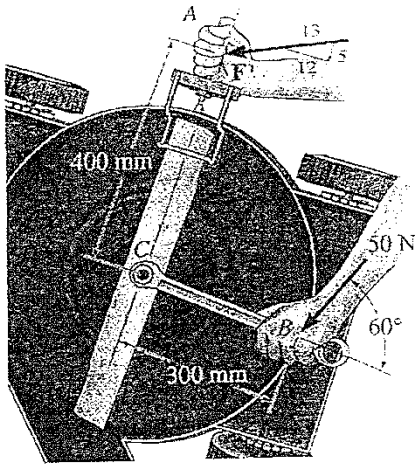
المبين في الشكل، حدد العزم الذي تسببه الصامولة حول C. ما هي شدة القوة F عند A بحيث تسبب عزماً معاكساً حول C مساوياً لعزم القوة المطبقة على مفتاح الربط؟

المسألة 4-21

يقوم ذراع الحمالة برفع عامل وزنه 1.02 kN ومركز ثقله G. حدد عزم هذه القوة حول النقطة A والنقطة B.



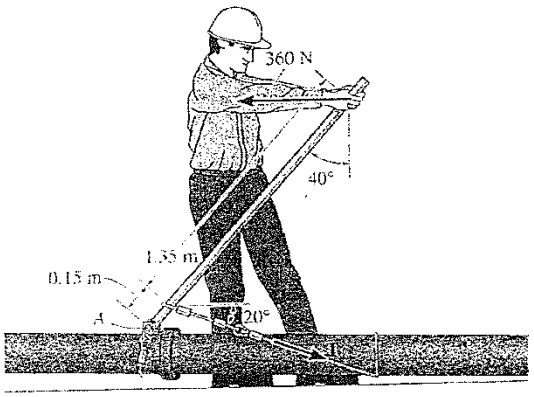
شكل المسألة (4-21)



شكل المسألة (4-20)

المسألة 4-22

يستخدم العامل القضيب لسحب أنبوبين معاً لإتمام عملية الربط. إذا قام العامل بتطبيق قوة أفقية 360 N على مقبض الذراع، احسب عزم هذه القوة حول النهاية A. ما هي قوة الشد في الكبل T اللازمة لتوليد عزم معاكس حول A ؟



شكل المسألة (4-22)

الفصل الخامس

توازن الجسم الصلب

Equilibrium of a Rigid Body

5-1 مقدمة

يعتبر الجسم الواقع تحت تأثير جملة قوى خارجية متوازناً إذا لم يغير هذا الجسم من حالته الحركية أثناء تأثير تلك القوى عليه، فإذا كان ساكناً فإنه يبقى كذلك وإن كان متحركاً حركة مستقيمة منتظمة فإنه يبقى متحركاً بنفس السرعة وذات الاتجاه.

بالعودة إلى نص قانون نيوتن الأول نجد أن المحافظة على الحالة الحركية لجسم ما واقع تحت تأثير جملة قوى خارجية يتطلب انعدام تلك الجملة، أي أن تكون هذه الجملة مكافئة للصفر.

رأينا سابقاً أنه إذا أثرت جملة قوى على جسم صلب فإن اختزال هذه الجملة يكون بإيجاد محصلتها العامة $\mathbf{F}_R$ وعزمها المحصل $\mathbf{M}_R$، وبالتالي فإن توازن الجسم الصلب يتطلب انعدام المحصلة العامة $\mathbf{F}_R$ والعزم المحصل $\mathbf{M}_R$ لجملة القوى المؤثرة عليه.

يمكن كتابة هذين الشرطين بشكل شعاعي كما يلي:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{M}_R = \Sigma \mathbf{M} = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = 0$$

وبشكل سلمي:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

عندما تؤثر جملة من القوى على الجسم الصلب يكون بعض هذه القوى معلوماً وبعضها الآخر مجهولاً، ويكون المطلوب عند دراسة توازن الجسم الصلب تعيين القوى المجهولة كي تتحقق شروط التوازن، وتؤدي شروط انعدام جملة القوى (انعدام مركبات وعزمها المحصل) في الحلول التحليلية إلى عدد من المعادلات الجبرية التي تحتوي على عدد من المجاهيل، ويعتمد عدد المعادلات الناتجة عن تحقيق شروط التوازن على نوعية

[illegible]

[illegible] المؤثرة على الجسم من قوى فعالة كالوزن وقوى الرياح وقوى [illegible] تؤثر فعل للتتبع من تأثير القوى الفعالة وتتركز ردود الأفعال هذه عند [illegible] توصيفها على طريقة استناد الجسم على ما يحيط به من سطوح. [illegible] الخارجية المؤثرة على الجسم وتعاكس اتجاه المحصلة العامة والعزم [illegible] الخارجية الفعالة وردود الأفعال.

[illegible] المحصلة

[illegible] المؤثرة على جسم صلب واقعة في مستوٍ واحد فإن [illegible] فقط وذلك إذا اخترنا جملة المحاور [illegible] واقع محوران منها في مستوي القوى فيكون المحور الثالث [illegible] المستوي. وعندئذ فإن شرط انعدام المسقط المحصلة العامة [illegible] مجموع القوى. عمل أية نقطة من المستوي تكون عمودية على [illegible] فقط على العزم المحصل [illegible] مسقط

[illegible] تحقيق الشروط التالية:

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma [illegible] = 0$$

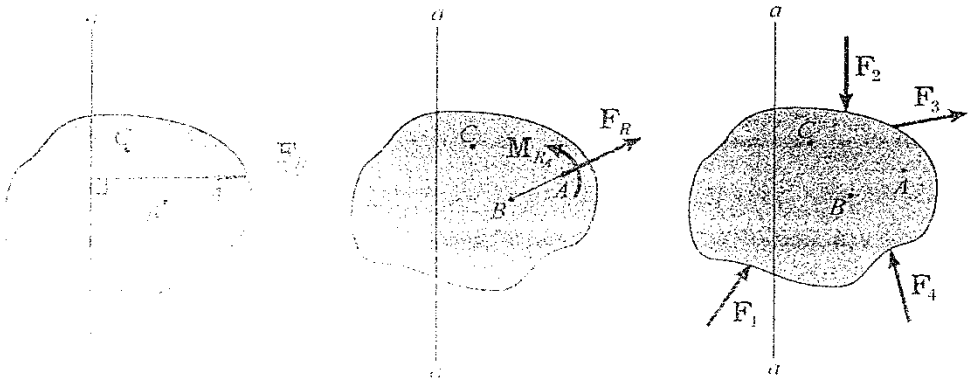
[illegible] توازن الجسم الصلب في المستوي لا يجب [illegible] المؤثرة على الجسم الصلب متلاقية في نقطة [illegible]

5-2-2 معادلات التوازن للمستوى

على الرغم من أن المعادلات السابقة [illegible]
الجسم الصلب في المستوي، فإنه يوجد [illegible]
التي يمكن استخدامهما، المجموعة الأولى من المعادلات [illegible]

$$\Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_{B'} = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

بشرط أن لا يكون الخط الواصل بين النقطتين [illegible]
صحة هذه المعادلات ندرس مخطط الجسم الحر لجسم ما [illegible]
القوى $(F_1, F_2, \ldots)$، (شكل 5-1 أ).



شكل (5-1)

كما نعلم سابقاً يمكن اختزال مجموعة القوى هذه في نقطة ما [illegible]
محصلة عامة $R = \Sigma F$ وعزم محصل $M_R = \Sigma M_A$ (شكل [illegible]
العلاقة $\Sigma M_A = 0$ فهذا يعني أن $M_R = 0$ [illegible]
لمجموعة القوى المؤثرة على الجسم يكون معدوماً [illegible]
أن تكون المحصلة العامة معدومة أو أن شعاع المحصلة [illegible]
(شكل 5-1 جـ)، لذلك نحتاج إلى المعادلة الثالثة $\Sigma M_B = 0$ [illegible]
خط عمل المحصلة العامة R، وهذه المعادلة لا تتحقق إلا [illegible]
أي $R = 0$، وبما أننا أثبتنا أنه باستخدام جملة [illegible]

الجسم الموضح في الشكل (5-1 أ) والواقع تحت تأثير مجموعة من
في حالة توازن ستاتيكي.

الثانية من معادلات التوازن البديلة فهي:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

لا تكون النقاط الثلاث A و B و C واقعة على استقامة واحدة. لإثبات
أن الجسم يكون في حالة توازن ستاتيكي إذا تحققت هذه المعادلات الثلاثة ندرس
الحر لجسم ما واقع تحت تأثير مجموعة من القوى (شكل 5-1 أ) حيث
المجموعة القوى هذه في نقطة A إلى محصلة عامة $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ وعزم محصل
(شكل 5-1 ب)، إذا تحققت العلاقة $\Sigma M_A = 0$ فهذا يعني أن
أن العزم المحصل في النقطة A لمجموعة القوى المؤثرة على الجسم يكون
تحقق المعادلة $\Sigma M_B = 0$ إذا كانت المحصلة العامة معدومة أو إذا كانت
النقطة واقعة على خط عمل شعاع المحصلة العامة، لذلك نحتاج إلى المعادلة الثالثة
حيث أن C لا تقع على خط AB، فإذا تحققت هذه المعادلة فذلك يعني أن
معدومة $\Sigma\mathbf{F} = 0$ والجسم إذاً في حالة توازن ستاتيكي.

الجسم الحر

الصحيحة في دراسة توازن جسم ما تتضمن أولاً رسم مخطط الجسم
الحر. لقد شرحنا في الفصل الثالث مفهوم مخطط الجسم الحر عند معالجة
المسائل التي يمكن أن يؤول فيها الجسم الصلب إلى نقطة مادية إذا كانت القوى المؤثرة
على الجسم الصلب متلاقية في نقطة واحدة، أما إذا كانت القوى المؤثرة على الجسم
الصلب غير متلاقية في نقطة فإن رسم مخطط الجسم الحر يكون أكثر تعقيداً ولكن
الخطوة تبقى نفسها. إن رسم مخطط الجسم الحر هو رسم الجسم معزولاً عن كافة
الأجسام المرتبطة به وعلى هذا الرسم توضع جميع القوى والعزوم الخارجية المؤثرة
على الجسم والتي تشمل القوى المعلومة والأخرى المجهولة التي يجب إيجادها.
القوى المعلومة وتحدد قيمتها واتجاهها على المخطط، أما القوى المجهولة
فهي ردود الأفعال التي ظهرت نتيجة عزل الجسم وأصبحت قوى خارجية

فتمثل بأحرف واتجاه افتراضي إذا لم يكن اتجاهها معروفاً، إذ نفترض اتجاهاً ما لهذه القوى وبعد إيجاد قيمتها نتأكد من صحة الاتجاه فإذا كانت القيمة موجبة فالاتجاه المفروض صحيح وإذا كانت سالبة فالاتجاه الصحيح هو عكس الاتجاه المفروض.

يسمى هذا الرسم بمخطط الجسم الحر لأن الجسم تحرر من كافة الاستنادات وتمت الاستعاضة عن تأثيرها بقوى وعزوم تمثل القوى والعزوم التي تؤثر بها الأجسام المتصلة بذلك الجسم عليه. إن رسم مخطط الجسم الحر هو أهم خطوة في حل مسائل توازن الجسم الصلب، ويمكن اتباع الخطوات التالية:

1- تحديد الجسم أو مجموعة الأجسام التي سيتم عزلها عما يتصل بها.

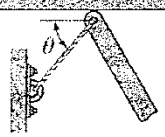
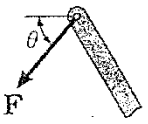
2- رسم الجملة المعزولة بخطوط خارجية رئيسية.

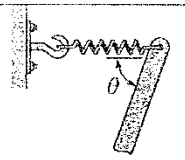
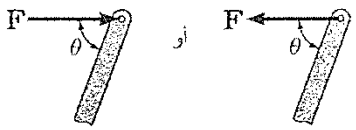
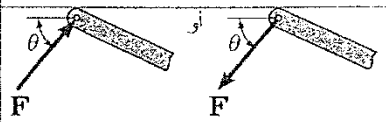
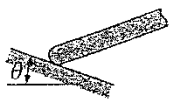
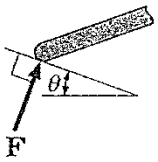
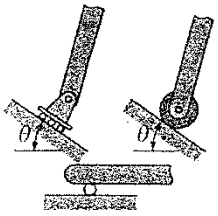
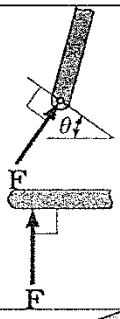
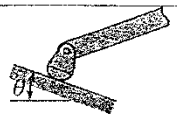
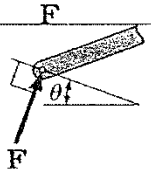
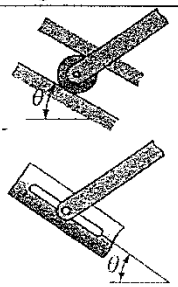
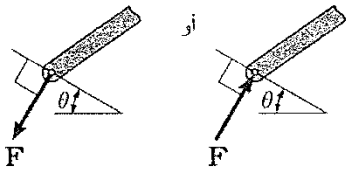
3- تحديد كافة القوى والعزوم الخارجية المؤثرة على الجسم المعلومة والأخرى المجهولة التي يجب إيجادها. يجب أن توضح القوى المعلومة وتحدد قيمتها واتجاهها على المخطط، أما القوى المجهولة فتمثل بأحرف واتجاه افتراضي إذا لم يكن الاتجاه معروفاً.

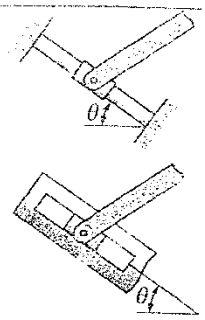
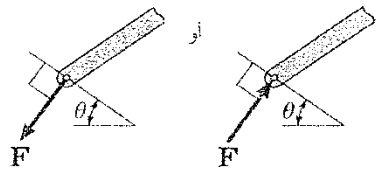
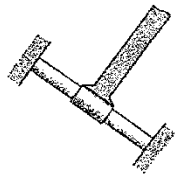
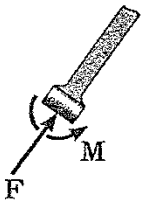
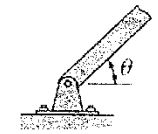
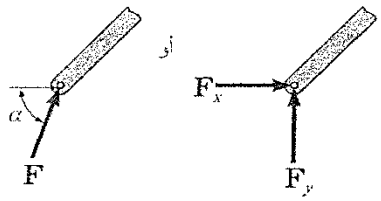
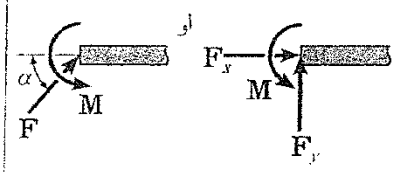
4- اختيار جملة محاور إحداثية لاستخدامها عند كتابة معادلات التوازن.

4-2-5 ردود الأفعال في المساند والاتصالات للمنشآت في المستوي

تستخدم في الحياة العملية عدة أنواع من وسائل الاستناد وفقاً لمتطلبات التصميم، وعند إزالة الاتصالات والاستنادات لعزل الجسم المدروس ورسم مخطط الجسم الحر له فإن ردود أفعالها يجب أن توضح على مخطط الجسم الحر، ويبين الشكل التالي هذه الأنواع وردود الأفعال الناتجة عنها.

نوع الاستناد	ردود الأفعال	عدد المجاهيل	ملاحظات
 كبل		1	تكون القوة المطبقة من الكبل بصورة شد دائماً وعلى منحى الكبل.

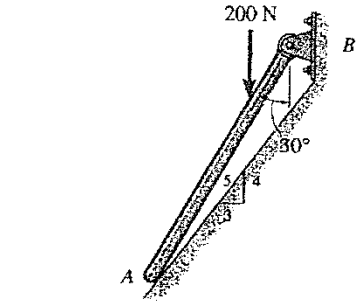
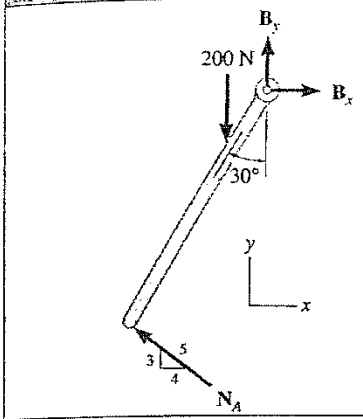
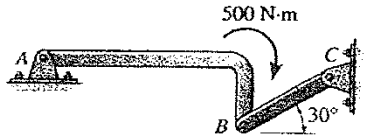
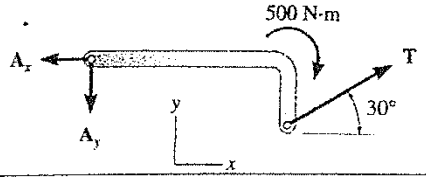
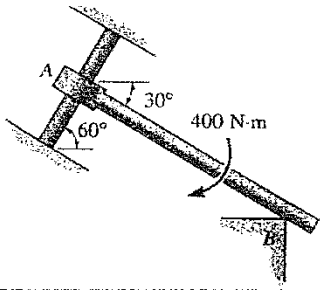
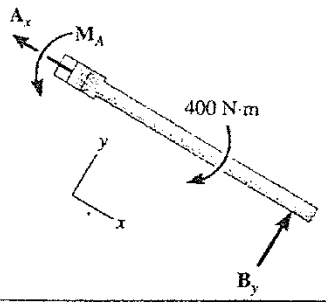
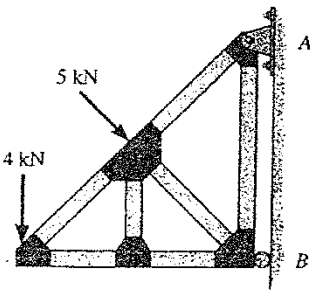
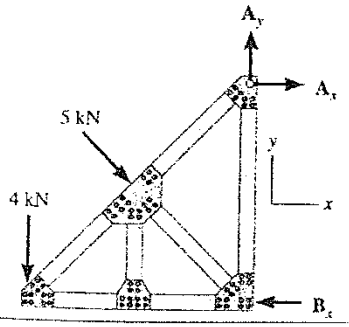
نابض		 أو	تكون القوة المطبقة من النابض إما شداً أو ضغطاً وعلى منحى النابض.	1
وصلة مهملة الوزن		 أو	يؤثر على القضيب رد فعل وحيد وفق محور الوصلة.	1
استناد مستوي			في الاستناد المستوي تمنع الإزاحة فقط في الاتجاه العمودي على مستوي الاستناد، لذلك ينشأ رد فعل وحيد عمودي على مستوي الاستناد.	1
مسند متدحرج (بسيط)			كما في الاستناد المستوي تمنع الإزاحة فقط في الاتجاه العمودي على مستوي الاستناد، لذلك ينشأ رد فعل وحيد عمودي على مستوي الاستناد.	1
مسند متأرجح			أيضاً في الاستناد المتأرجح ينشأ رد فعل وحيد عمودي على مستوي الاستناد.	1
متدحرج (أو مسمار) ضمن مجرى		 أو	يسمح هذا الارتباط بالحركة فقط في اتجاه المجرى ويمنعها في الاتجاه العمودي عليه، لذلك ينشأ رد فعل وحيد عمودي على اتجاه الحركة.	1

 منزلقة بدون احتكاك (ارتباط مفصلي)		1	تمنع المنزلقة ذات الارتباط المفصلي الحركة فقط في الاتجاه العمودي على منحى الانزلاق، لذلك ينشأ رد فعل وحيد عمودي على اتجاه الانزلاق.
 منزلقة بدون احتكاك (ارتباط ثابت)		2	يمنع هذا النوع من الارتباط الحركة في الاتجاه العمودي على اتجاه الانزلاق كما يمنع الدوران حول المحور z، لذلك ينشأ رد فعل عمودي على منحى الانزلاق وعزم حول المحور z.
 مسند ثابت (مفصل)		2	يمنع المفصل القضيب من الحركة ولكن يسمح له بالدوران حول المفصل، يعبر عن رد الفعل عادة بمركبتين وفق x و y أو بقوة وحيدة ذات قيمة واتجاه مجهولين.
وثاقة (تثبيت)		3	يمنع التثبيت الحركة في أي اتجاه كما يمنع الدوران حول المحور z وبالتالي يتألف رد الفعل من مركبتين وفق x و y وعزم حول المحور z.

شكل (5-2)

مثال 5-1

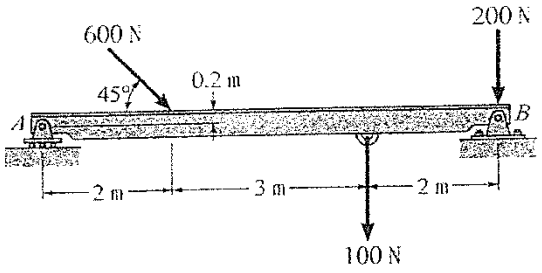
يبين الشكل (5-3) مخطط الجسم الحر لعدد من الأجسام الصلبة.

الشكل	مخطط الجسم الحر
	
	
	
	

شكل (5-3)

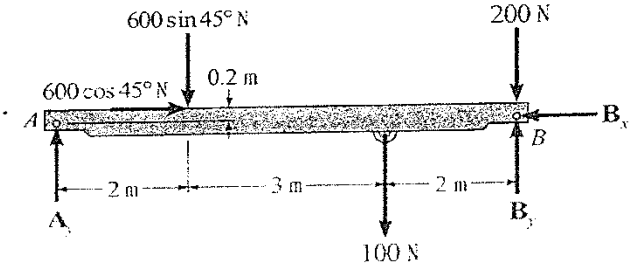
مثال 5-2

احسب ردود الأفعال عند المساند للجائز المبين في الشكل وذلك بإهمال وزن الجائز.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للجائز وذلك بعزله عن المساند والتعويض عن تأثيرها بردود الأفعال، إذ يؤثر عند المسند المتدحرج A رد فعل نحو الأعلى أما رد الفعل في المسند الثابت B فهو مجهول الاتجاه ولذلك فسوف نعبر عنه بدلالة مركبتيه المتعامدتين حيث نفترض اتجاهاً ما لهاتين المركبتين وبعد إيجاد قيمتيهما نتأكد من صحة الاتجاه فإذا كانت القيمة موجبة فالاتجاه المفروض صحيح وإذا كانت سالبة فالاتجاه الصحيح هو عكس الاتجاه المفروض. نلاحظ من مخطط الجسم الحر أن هناك ثلاثة مجاهيل $\mathbf{A}_y$ و $\mathbf{B}_x$ و $\mathbf{B}_y$ وبالتالي يمكن إيجادها من معادلات التوازن الثلاث. لاحظ أيضاً أننا مثلنا القوة المائلة بمركبتيها على المحاور الإحداثية وذلك لتبسيط الحل.



نكتب معادلات التوازن للجائز ثم نحل هذه المعادلات ونحسب ردود الأفعال المجهولة.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad 600\cos 45° - B_x = 0$$

$$B_x = 424 \text{ N}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad 100(2) + 600\sin 45°(5) - 600\cos 45°(0.2) - A_y(7) = 0$$

$$A_y = 319 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad 319 - 600\sin 45° - 100 - 200 + B_y = 0$$
$$B_y = 405 \text{ N}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} : B = \sqrt{(424)^2 + (405)^2}$$
$$B = 586 \text{ N}$$

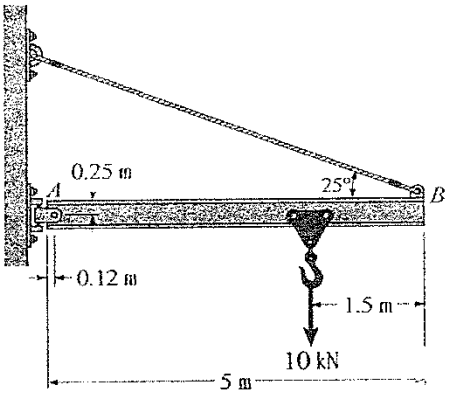
يمكننا التأكد من قيمة $\mathbf{B}_y$ بحساب مجموع العزوم حول النقطة A:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -600\sin 45°(2) - 600\cos 45°(0.2)$$
$$-100(5) - 200(7) + B_y(7) = 0$$
$$B_y = 405 \text{ N}$$

إن قيم ردي الفعل $\mathbf{B}_x$ و $\mathbf{B}_y$ الناتجة موجبة وهذا يعني أن الاتجاه المفروض صحيح.

مثال 5-3

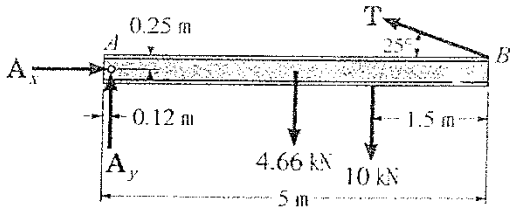
احسب قيمة قوة الشد $\mathbf{T}$ في الكبل وقيمة رد الفعل في المفصل A لجهاز الرفع المبين في الشكل علماً أن العارضة AB متجانسة وكتلتها 95 kg/m.



نحسب وزن العارضة W.

$$W = 95 \times 5 \times 9.81 \times 10^{-3} = 4.66 \text{ kN}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للعارضة، وكما في المثال السابق نلاحظ من مخطط الجسم الحر أن هناك ثلاثة مجاهيل A_x و A_y و T وبالتالي يمكن إيجادها من معادلات التوازن الثلاث.



نبدأ بمعادلة العزوم حول النقطة A من أجل إيجاد قوة الشد T في الكبل.

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad T\cos 25°(0.25) + T\sin 25°(5-0.12) - 10(5-1.5-0.12) - 4.66(2.5-0.12) = 0$$

$$T = 19.61\,\text{kN}$$

نكتب معادلات التوازن للعارضة $(\Sigma F_x = 0)$ و $(\Sigma F_y = 0)$، ثم نحل هذه المعادلات ونحسب ردود الأفعال المجهولة.

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x - 19.61\cos 25° = 0$$

$$A_x = 17.77\,\text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 19.61\sin 25° - 4.66 - 10 = 0$$

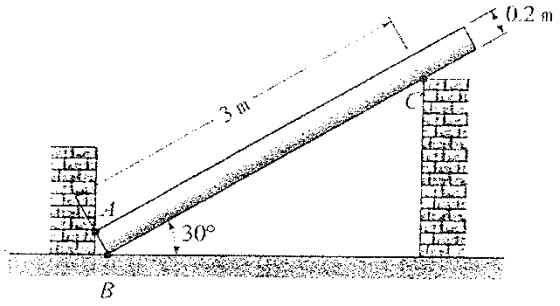
$$A_y = 6.37\,\text{kN}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}: \quad A = \sqrt{(17.77)^2 + (6.37)^2}$$

$$A = 18.88\,\text{kN}$$

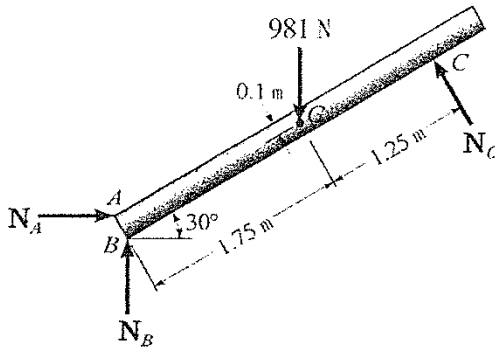
مثال 5-4

يستند قضيب متجانس كتلته 100 kg وطوله 3.5 m على أرض وجدارين كما هو مبين في الشكل. احسب ردود الأفعال عند نقاط التماس A و B و C، علماً أن كافة سطوح التلامس ملساء.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب.



نكتب معادلات التوازن ونحسب ردود الأفعال.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad N_A - N_C \sin 30° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad N_B - 981 + N_C \cos 30° = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -981\cos 30°(1.75) - 981\sin 30°(0.1)$$
$$+ N_B \sin 30°(0.2) + N_C\,(3) = 0$$

$$N_A = 247 \text{ N}$$

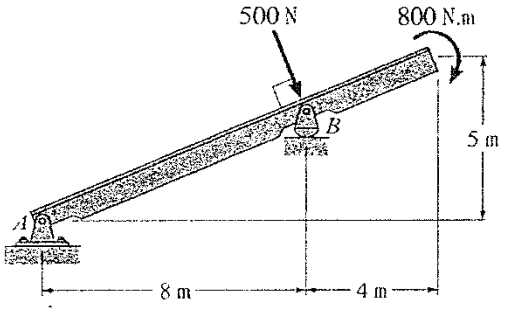
$$N_B = 554 \text{ N}$$

$$N_C = 493 \text{ N}$$

مثال 5-5

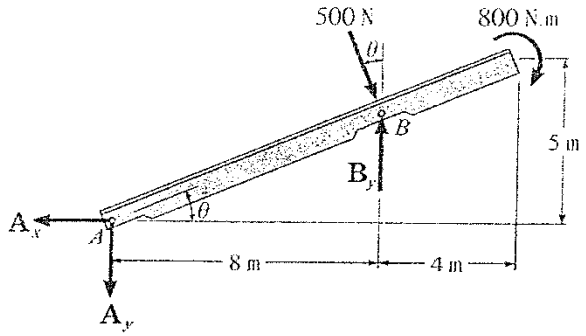
يرتبط القضيب المبين في الشكل بمسند ثابت عند A ومسند متأرجح عند B.

احسب ردي الفعل في A و B.



الحل:

ترسم مخطط الجسم الحر للقضيب ثم نكتب معادلات التوازن ونحسب ردي الفعل.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8+4}\right) = 22.6°$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -500\left(\frac{8}{\cos 22.6°}\right) - 800 + B_y\,(8) = 0$$

$$B_y = 642 \text{ N}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -A_x + 500\sin 22.6° = 0$$

$$A_x = 192 \text{ N}$$

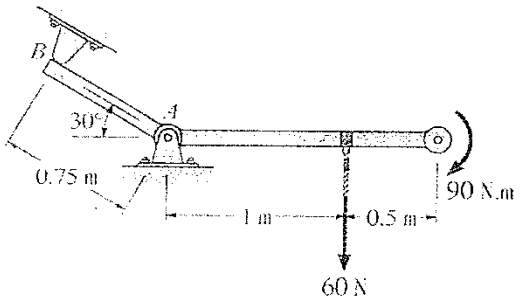
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -A_y - 500\cos 22.6° + B_y = 0$$

$$A_y = 180 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{(192)^2 + (180)^2} = 263 \text{ N}$$

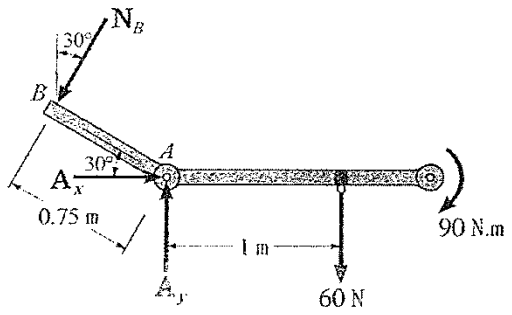
مثال 5-6

ترتبط الوصلة المبينة في الشكل بمسند ثابت عند A وتستند على سطح أملس عند B. احسب رد الفعل في A.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب.



نكتب معادلات التوازن ونحسب رد الفعل.

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -90 - 60(1) + N_B(0.75) = 0$$

$$N_B = 200 \text{ N}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x - 200\sin 30° = 0$$

$$A_x = 100 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 200\cos 30° - 60 = 0$$

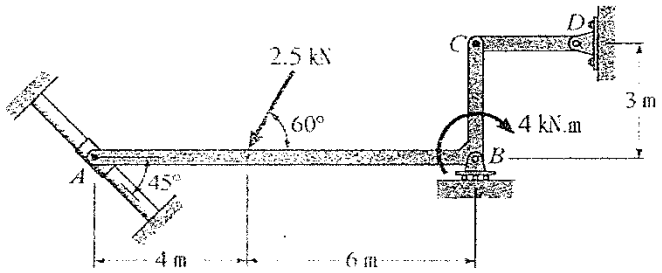
$$A_y = 233 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{(100)^2 + (233)^2}$$

$$A = 254 \text{ N}$$

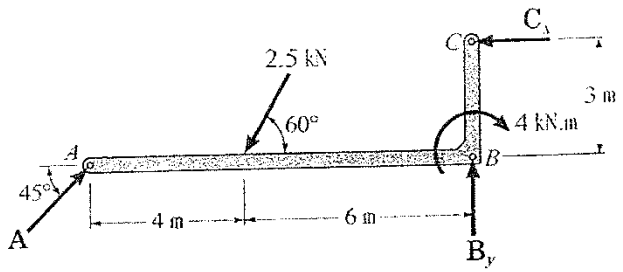
مثال 5-7

يرتبط القضيب ABC بمنزلقة في A ومسند متدحرج في B ووصلة قصيرة في C. يؤثر على القضيب قوة مقدارها 2.5kN وعزم مقداره 4kN·m كما هو مبين في الشكل. احسب ردود الأفعال المؤثرة على القضيب ABC.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب.



نكتب معادلات التوازن ونحسب ردود الأفعال.

$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad A\cos 45°(3) - A\sin 45°(10) - 2.5\cos 60°(3) + 2.5\sin 60°(6) - 4 = 0$$

$$A = 1.06 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A\cos 45° - 2.5\cos 60° - C_x = 0$$

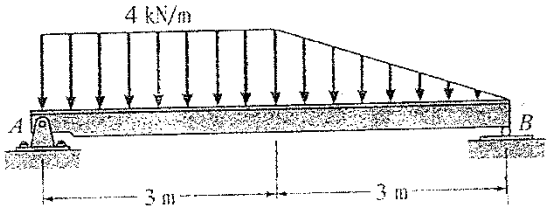
$$C_x = 0.5 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A\sin 45° - 2.5\sin 60° + B_y = 0$$

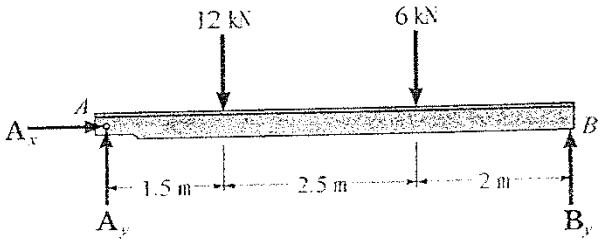
$$B_y = 1.42 \text{ kN}$$

مثال 5-8

احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.



الحل:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

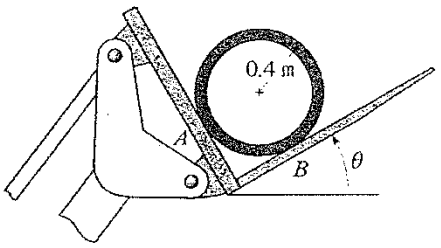
$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -12(1.5) - 6(4) + B_y(6) = 0$$

$$B_y = 7 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - 400\cos 15° + B_y - 600 = 0$$

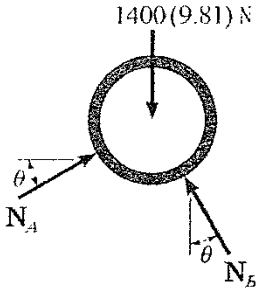
$$A_y = 11 \text{ kN}$$

مثال 5-9



تحمل رافعة شوكية أنبوباً كتلته 1.4 Mg كما هو مبين في الشكل. بفرض أن الاحتكاك مهمل احسب القوى المؤثرة على الأنبوب في A و B بدلالة الزاوية θ وارسم النتيجة في مخطط بياني من أجل $0 \le \theta \le 90$.

الحل:



نرسم مخطط الجسم الحر للأنبوب وندرس توازنه.

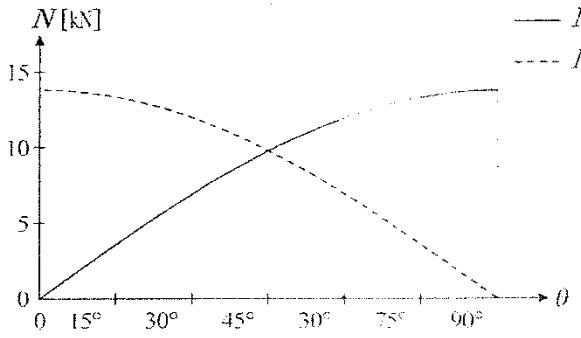
$$\nearrow \Sigma F_x = 0: \qquad N_A - 1.4(9.81)\sin\theta = 0$$

$$N_A = 13.7\sin\theta \text{ kN}$$

$$\nwarrow \Sigma F_y = 0: \qquad N_B - 1.4(9.81)\cos\theta = 0$$

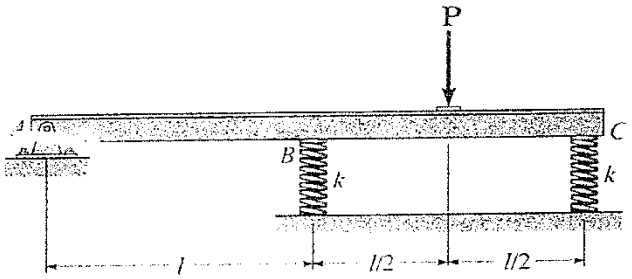
$$N_B = 13.7\cos\theta \text{ kN}$$

نحسب قيم N_A و N_B بدلالة الزاوية θ ونرسم النتائج.

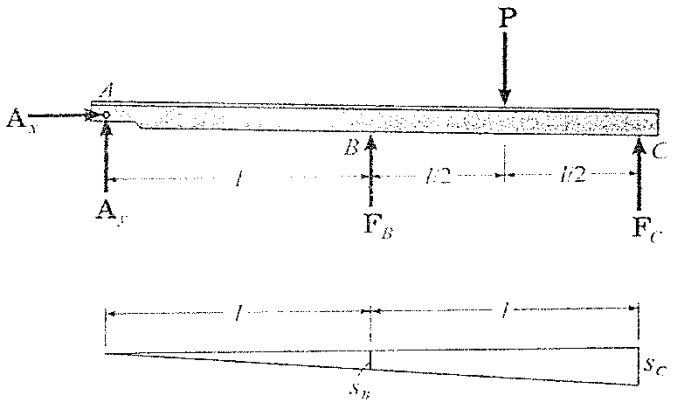


مثال 5-10

يستند قضيب مهمل الوزن على نابضين ومسند ثابت. يكون النابضان بطولهما الأصلي والقضيب بوضع أفقي عند عدم وجود الحمولة P. عند تطبيق الحمولة P احسب مقدار القوة المؤثرة في كل نابض ومقدار انضغاط النابض عند C. افترض أن صلابة النابض k كبيرة بشكل كاف بحيث يكون انضغاط النابض صغيراً.



الحل:



$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad F_B(l) + F_C(2l) - P(1.5l) = 0$$

$$F_B + 2F_C = 1.5P$$

$$s_C = 2s_B$$

$$\frac{F_C}{k} = \frac{2F_B}{k}$$

$$F_C = 2F_B$$

$$5F_B = 1.5P$$

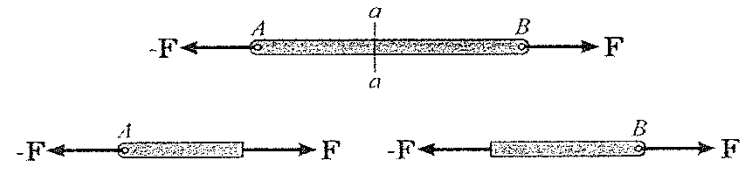
$$F_B = 0.3P$$

$$F_C = 0.6P$$

$$s_C = \frac{0.6P}{k}$$

5-2-5 القوى الداخلية

عندما تؤثر جملة قوى على جسم ما تتولد عند نقاط استناد الجسم ردود فعل نتيجة لانتقال القوى الفعالة عبر البنية الداخلية للجسم، وتنشأ بذلك داخل الجسم قوى تدعى بالقوى الداخلية ولا علاقة لهذه القوى بشرط التوازن وهو انعدام جملة القوى المؤثرة على الجسم لأن جملة القوى المعدومة هي القوى الخارجية، أما القوى الداخلية فإنها تعدم بعضها بعضاً ولا تظهر في مخططات الجسم الحر إلا إذا جزئ الجسم. فالقضيب AB المبين في الشكل (5-4) يقع تحت تأثير قوتي الشد $\mathbf{F}$ و $\mathbf{-F}$ من طرفيه وهو في حالة توازن، إذا جزئ القضيب إلى جزأين فإن كل جزء سيكون أيضاً في حالة توازن وليتحقق ذلك لا بد من إضافة القوتين $\mathbf{F}$ و $\mathbf{-F}$ عند سطح القطع، وهاتان القوتان عند سطح القطع هما القوى الداخلية.



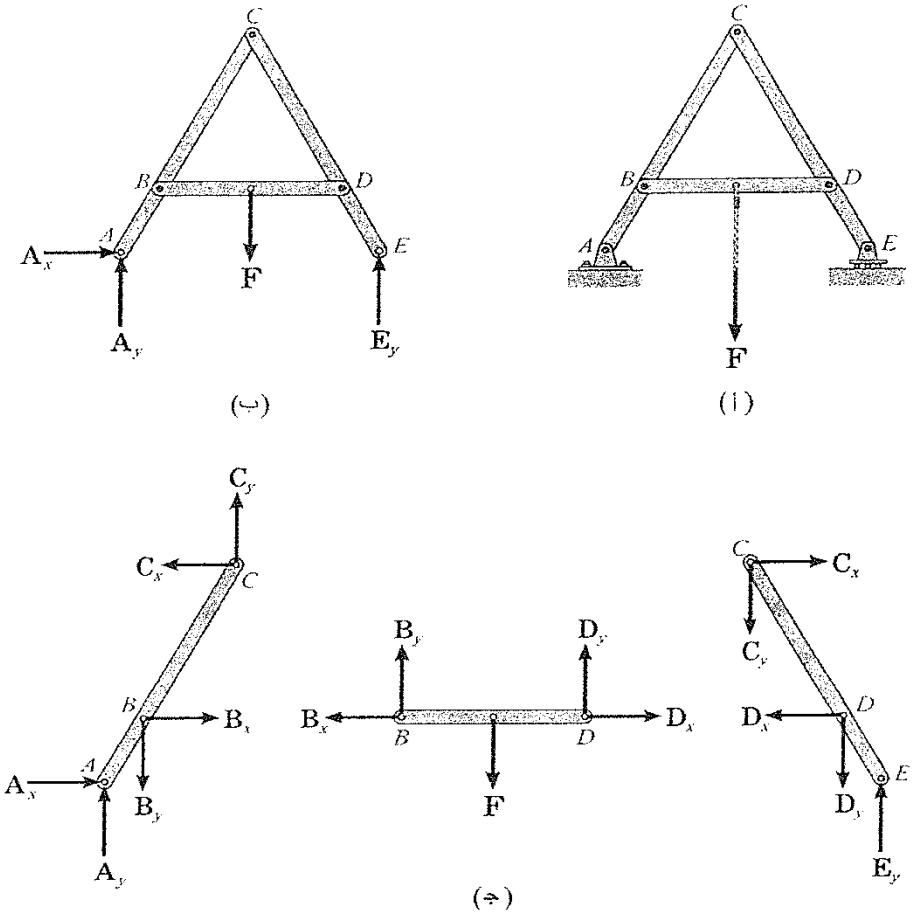
شكل (5-4)

عند إعادة تجميع القضيب AB تعدم القوى الداخلية بعضها بعضاً ولا علاقة لها حينئذ بشرط انعدام جملة القوى المؤثرة على الجسم، ولكن حين دراسة توازن كل جزء من الجسم على حدة فإن القوى الداخلية المذكورة تصبح خارجية ويجب أخذها بالاعتبار.

لا يشترط في القوى الداخلية أن توجد داخل بنية الجسم بل توجد أيضاً عند نقاط ترابط أو تلامس الأجسام مع بعضها. ففي الشكل (5-5 أ) نرى هيكلاً مؤلفاً من ثلاثة قضبان متفصلة مع بعضها وواقعة تحت تأثير القوة $\mathbf{F}$، وتستند المجموعة في A على مسند ثابت وفي E على مسند متدحرج.

يمثل الشكل (5-5 ب) مخطط الجسم الحر للهيكل حيث تظهر جميع القوى الفعالة وهي القوة $\mathbf{F}$ إضافة إلى ردود الأفعال عند المساند A و E. أما الشكل (5-5 جـ) فيبين

مخططات الجسم الحر لأجزاء الهيكل مفككة حيث تظهر القوى المتبادلة بين القضبان في المفاصل وهي في الواقع فعل ورد فعل إحدى الوصلتين على الأخرى.

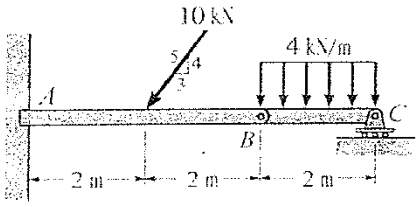


(جـ)

شكل (5-5)

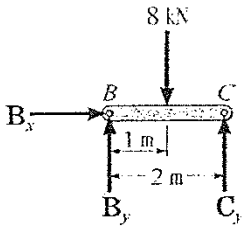
مثال 5-11

يتألف الجائز المبين في الشكل من القضيبين AB و BC المتمفصلين مع بعضهما في B، يوثق هذا الجائز في الجدار عند A ويستند على مسند متدحرج عند C . احسب ردود الأفعال في A و C والقوة المتبادلة بين القضيبين.



نستبدل الحمولة الموزعة المؤثرة على القضيب BC بحمولة مركزة:

$$F = 4(2) = 8\ \text{kN}$$



نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب BC ونكتب معادلات التوازن.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0$$

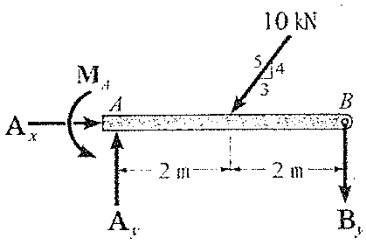
$$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -8(1) + C_y(2) = 0$$

$$C_y = 4\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad B_y + C_y - 8 = 0$$

$$B_y = 4\ \text{kN}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب AB (لاحظ أننا لم نرسم رد الفعل $\mathbf{B}_x$ لأنه معدوم) ونكتب معادلات التوازن.



$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad A_x - 10 \times 0.6 = 0$$

$$A_x = 6\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 10 \times 0.8 - B_y = 0$$

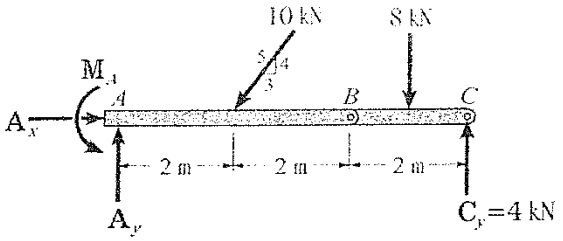
$$A_y = 12\ \text{kN}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - 10 \times 0.8(2) - B_y(4) = 0$$

$$M_A = 32\ \text{kN.m}$$

ملاحظة:

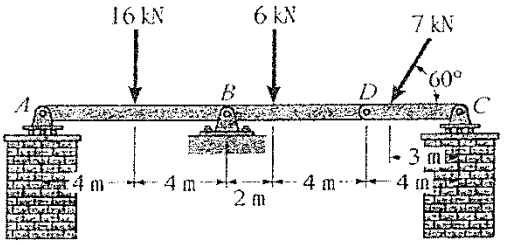
يمكن أيضاً دراسة توازن القضيبين معاً بعد حساب رد الفعل $\mathbf{C}_y$. نرسم مخطط الجسم الحر للقضيبين بدون فصل، لاحظ أن القوى المتبادلة بين القضيبين AB و BC لا تظهر في مخطط الجسم الحر لأنها تفني بعضها (فعل ورد فعل).



$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad A_x - 10\times 0.6 = 0$$
$$A_x = 6\,\text{kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 10\times 0.8 - 8 + 4 = 0$$
$$A_y = 12\,\text{kN}$$
$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - 10\times 0.8(2) - 8(5) + 4(6) = 0$$
$$M_A = 32\,\text{kN.m}$$

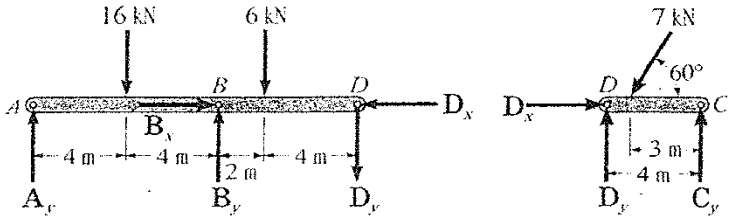
مثال 5-12

يتألف الجائز المبين في الشكل من القضيبين AD و DC المتفصلين مع بعضهما في D، ويرتبط هذا الجائز مع مسند ثابت في B ومسندين متدحرجين في A و C. احسب ردود الأفعال في المساند الثلاثة.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر لكل من القضيبين.



نكتب معادلات التوازن للقضيب DC.

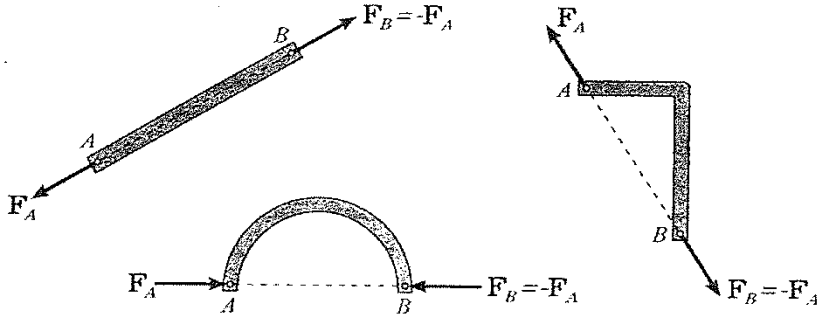
$$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad -7\sin 60°(1) + C_y(4) = 0$$
$$C_y = 1.52 \text{ kN}$$
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad D_x - 7\cos 60° = 0$$
$$D_x = 3.5 \text{ kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad D_y - 7\sin 60° + 1.52 = 0$$
$$D_y = 4.55 \text{ kN}$$

نكتب معادلات التوازن للقضيب AD.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B_x - 3.5 = 0$$
$$B_x = 3.5 \text{ kN}$$
$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -16(4) - 6(10) + B_y(8) - 4.55(14) = 0$$
$$B_y = 23.46 \text{ kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 16 + 23.46 - 6 - 4.55 = 0$$
$$A_y = 3.09 \text{ kN}$$

6-2-5 توازن جسم واقع تحت تأثير قوتين

إن الشرط اللازم والكافي لتوازن جسم صلب واقع تحت تأثير قوتين فقط هو أن تكون هاتان القوتان متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه $(\Sigma F = 0)$ وواقعتين على خط عمل واحد $(\Sigma M = 0)$ كما هو موضح في الشكل (5-6).



شكل (5-6)

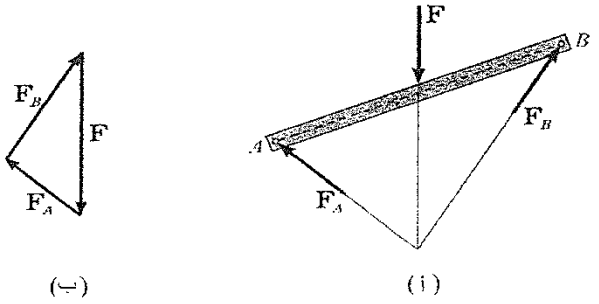
ملاحظة:

عندما يكون الجسم الصلب واقعاً تحت تأثير قوتين فقط فإننا نعلم خط عمل القوتين وهو الخط الواصل بين نقطتي تأثير القوتين أما اتجاههما (شد أو ضغط) فهو

مجهول وتتم معرفة الاتجاه الصحيح بعد حل معادلات التوازن. لهذه القاعدة أهميتها الكبرى عند دراسة توازن الجسم الصلب وخاصة عند دراسة الهياكل والآلات كما سنرى لاحقاً إذ أن تمييز العناصر الواقعة تحت تأثير قوتين يجنبنا حل معادلات توازن غير ضرورية.

5-2-7 توازن جسم واقع تحت تأثير ثلاث قوى

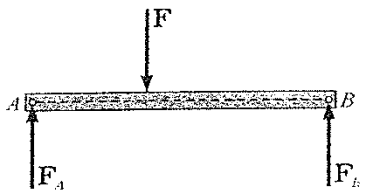
لكي يتوازن جسم واقع تحت تأثير ثلاث قوى يجب أن تكون خطوط عمل هذه القوى متلاقية في نقطة واحدة (شكل 5-7 أ) وأن يكون مضلع القوى التابع لها مثلثاً مغلقاً باتجاه دوري واحد أي أن شعاع كل قوة في مثلث القوى يبدأ من نهاية الشعاع السابق (شكل 5-7 ب). إن لهذا القانون أهمية كبرى في الحلول التخطيطية.



شكل (5-7)

تتشابه دراسة الجسم الصلب مع دراسة توازن النقطة المادية إذا كانت جملة القوى المستوية المؤثرة على الجسم متلاقية في نقطة واحدة، أي أنه عند حل المسائل باستخدام الطريقة التحليلية يمكن كتابة معادلتي توازن فقط $\left(\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0\right)$.

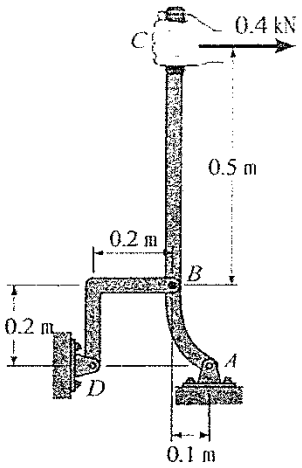
هناك حالة أخرى لتوازن جسم واقع تحت تأثير ثلاث قوى وهي عندما تكون خطوط عمل هذه القوى متوازية، فإذا كان الجسم واقعاً تحت تأثير ثلاث قوى وكانت قوتان منها متوازيتين فالقوة الثالثة يجب أن توازيهما (شكل 5-8)، ويعتبر في هذه الحالة أن نقطة تلاقي القوى الثلاث تقع في اللانهاية.



شكل 5-8

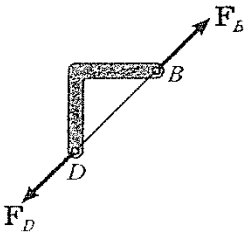
مثال 5-13

يرتبط الذراع ABC مع مسند ثابت في A ومع وصلة قصيرة BD كما هو مبين في الشكل. بإهمال وزني الذراع والوصلة احسب القوة المؤثرة على الذراع في A.

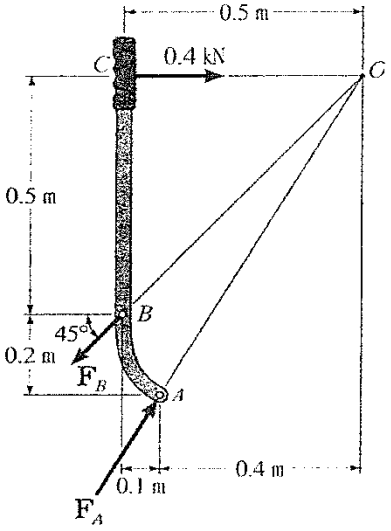


الحل:

تخضع الوصلة BD لتأثير قوتين فقط هما $\mathbf{F}_B$ و $\mathbf{F}_D$، وهذا يعني أنهما يجب أن تكونا متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه وعلى خط عمل واحد كما هو مبين في مخطط الجسم الحر للوصلة.



أما الذراع ABC فهو خاضع لتأثير ثلاث قوى وهذا يعني أنها يجب أن تكون متلاقية في نقطة واحدة. (لاحظ أن القوة $\mathbf{F}_B$ المؤثرة على الذراع تعاكس في الاتجاه القوة $\mathbf{F}_B$ المؤثرة على الوصلة حسب مبدأ الفعل ورد الفعل).



من أجل الحصول على خط عمل القوة $\mathbf{F}_A$ نرسم خطي عمل القوة 400 N والقوة $\mathbf{F}_B$ حتى يتلاقيا في نقطة ولتكن O، نرسم من النقطة O خطاً إلى A فنحصل على خط عمل القوة $\mathbf{F}_A$. يمكن من مخطط الجسم الحر للذراع ABC حساب قيمة الزاوية θ التي تميل بها القوة $\mathbf{F}_A$ على الأفق.

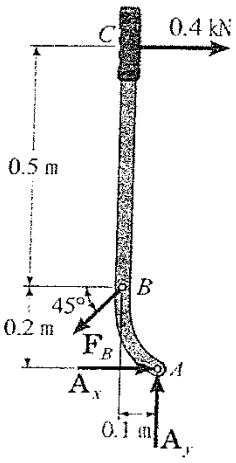
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ$$

نكتب معادلتي التوازن ونحسب قيمتي $\mathbf{F}_A$ و $\mathbf{F}_B$.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad F_A \cos 60.3° - F_B \cos 45° + 0.4 = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_A \sin 60.3° - F_B \sin 45 = 0$$
$$F_A = 1.07 \text{ kN}$$
$$F_B = 1.32 \text{ kN}$$

ملاحظة:

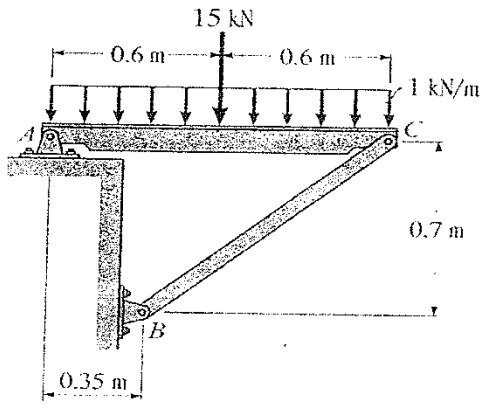
يمكن أيضاً حل المسألة بتحليل قوة رد الفعل $\mathbf{F}_A$ إلى مركبتيها $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ كما يلي:



$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad F_B \cos 45°(0.2) + F_B \sin 45°(0.1) - 0.4(0.7) = 0$$
$$F_B = 1.32 \text{ kN}$$
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x - F_B \cos 45° + 0.4 = 0$$
$$A_x = 0.53 \text{ kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - F_B \sin 45 = 0$$
$$A_y = 0.93 \text{ kN}$$
$$F_A = \sqrt{(0.53)^2 + (0.93)^2} = 1.07 \text{ kN}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.93}{0.53}\right) = 60.3°$$

مثال 5-14

احسب ردود الأفعال في المفصلين A و B للجائز المبين في الشكل. أهمل وزني الجائز والقضيب.

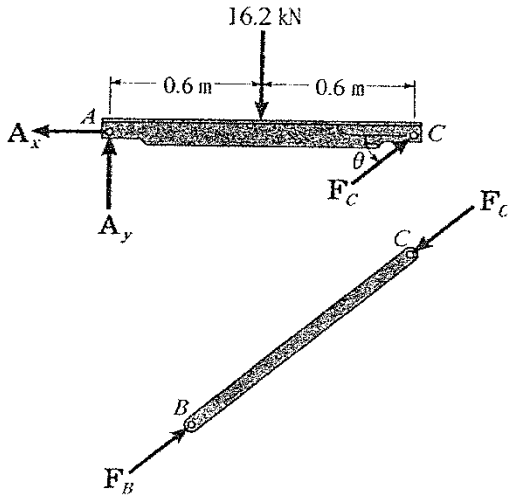


الحل:

نلاحظ أن القضيب BC خاضع لتأثير قوتين فقط. نرسم مخطط الجسم الحر لكل من الجائز والقضيب وندرس توازن الجائز.

$$F = 1\times 1.2 + 15 = 16.2 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{1.2-0.35}\right) = 39.47°$$



$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -16.2(0.6) + F_C \cdot \sin 39.47°(1.2) = 0$$

$$F_C = 12.74 \text{ kN}$$

$$F_B = F_C = 12.74 \text{ kN}$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad -A_x + F_C \cdot \cos 39.47° = 0$$

$$A_x = 9.83 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -A_y + F_C \cdot \sin 39.47° - 16.2 = 0$$

$$A_y = 8.1 \text{ kN}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}: \quad A = \sqrt{(9.83)^2 + (8.1)^2}$$

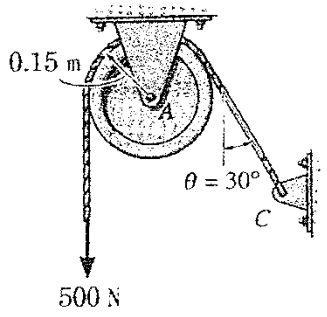
$$A = 12.74 \text{ kN}$$

$$\alpha_A = \tan^{-1}\left(\frac{8.1}{9.83}\right) = 39.47°$$

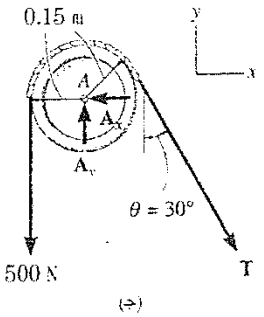
8-2-5 البكرات

كثيراً ما نصادف في مسائل الميكانيك الهندسي وجود بكرات يلف عليها حبال تحمل كتلاً أو تؤثر عليها قوى شد، كما أن البكرة تدور حول مفصل بدون احتكاك، وعند دراسة التوازن نحتاج إلى معرفة قوة الشد في الطرف الآخر من الحبل بالإضافة إلى القوة المتبادلة بين البكرة والمفصل (فعل ورد فعل).

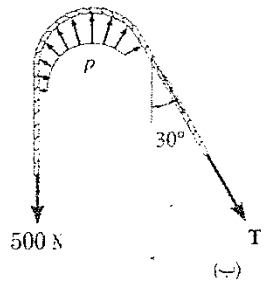
يبين الشكل (5-9 أ) بكرة مرتبطة بالجدار بواسطة مسند ثابت ويلف عليها حبل مثبت من أحد طرفيه بالجدار وتؤثر عليه قوة شد مقدارها 500 N في طرفه الآخر. إن مخطط الجسم الحر لكل من الحبل والبكرة موضح في الشكل (5-9 ب). نلاحظ أن القوة المتبادلة بين البكرة والحبل هي قوة موزعة على كامل منطقة التماس بينهما ومن الصعب حساب قيمة هذه القوة، لذلك ليس هناك ضرورة لفصل البكرة عن الحبل وإنما تتم دراستهما معاً كما هو موضح في الشكل (5-9 جـ)، وبالتالي تختفي القوة المتبادلة بينهما لأنها تصبح قوة داخلية، فإذا درسنا مخطط الجسم الحر للبكرة والحبل مجتمعين نجد أن القوى المجهولة المؤثرة عليهما هي قوة الشد **T** في الطرف الآخر من الحبل وقوة رد فعل المفصل على البكرة **A**، وكما نعلم فإن رد الفعل عند مركز البكرة يكون مجهول الاتجاه ولذلك نحلله إلى مركبتين $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$، إذن لدينا ثلاثة مجاهيل يمكن حسابها من معادلات التوازن الثلاث.



(أ)



(جـ)



(ب)

شكل (5-9)

من أجل حساب قوة الشد في الطرف الآخر من الحبل نكتب معادلة العزوم حول مركز البكرة.

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad 500(15) - T(15) = 0$$
$$T = 500\ \text{N}$$

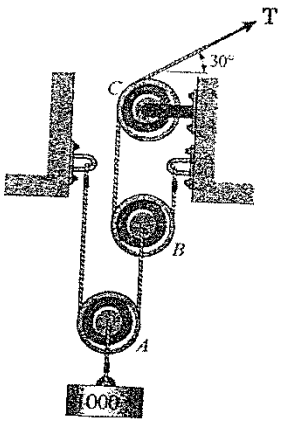
نلاحظ من هذه النتيجة أن قوة الشد في الحبل والواقعة على الطرف الأيمن من البكرة تساوي قوة الشد في الحبل على الطرف الأيمن من البكرة، أي أن قوتي الشد على طرفي البكرة متساويتان.

أما حساب مركبات رد الفعل في مركز البكرة فيتم بتطبيق معادلتي التوازن على المحورين x و y.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad -A_x + 500\sin 30° = 0$$
$$A_x = 250\ \text{N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 500 - 500\cos 30° = 0$$
$$A_y = 933\ \text{N}$$

مثال 15-5

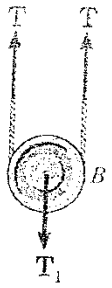
يبين الشكل ثلاث بكرات مهملة الوزن تحمل ثقلاً مقداره 1000 N معلق بالبكرة A، والمطلوب حساب رد الفعل في مركز البكرة C.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة A.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T_1 - 1000 = 0$$
$$T_1 = 500\ \text{N}$$

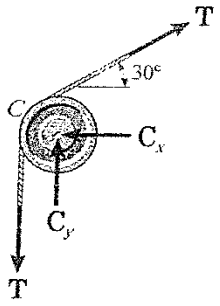


نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة B.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T - 500 = 0$$

$$T = 250 \text{ N}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة C.



$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -C_x + T\cos 30° = 0$$

$$C_x = 216.5 \text{ N}$$

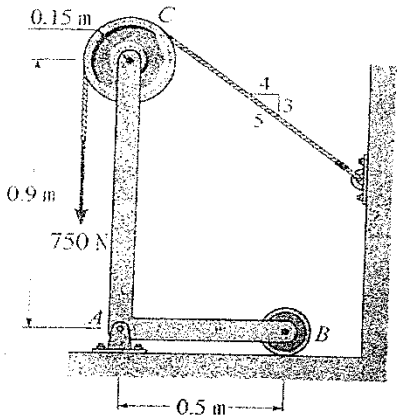
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - T + T\sin 30° = 0$$

$$C_y = 125 \text{ N}$$

$$C = \sqrt{(216.5)^2 + (125)^2} = 250 \text{ N}$$

$$\theta_C = \tan^{-1}\left(\frac{125}{216.5}\right) = 30°$$

مثال 5-16



في الشكل المبين وبإهمال وزن القضيب والاحتكاك في مركز البكرة احسب مايلي:

1- رد الفعل في مركز البكرة C.

2- ردود الأفعال في A و B

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة ونكتب معادلات التوازن.

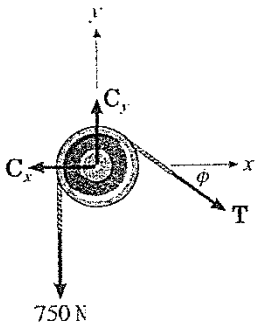
$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad 750(R) - T(R) = 0$$

$$T = 750 \text{ N}$$

لاحظ أن قوتي الشد على طرفي البكرة متساويتان.

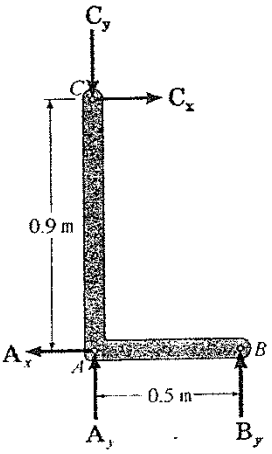
$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -C_x + 750\cos\phi = 0$$

$$C_x = 600 \text{ N}$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 750 - 750\sin\phi = 0$$
$$C_y = 1200\ \text{N}$$
$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}: \quad C = \sqrt{(600)^2 + (1200)^2}$$
$$C = 1342\ \text{N}$$
$$\theta_C = \tan^{-1}\left(\frac{1200}{600}\right) = 63.4°$$

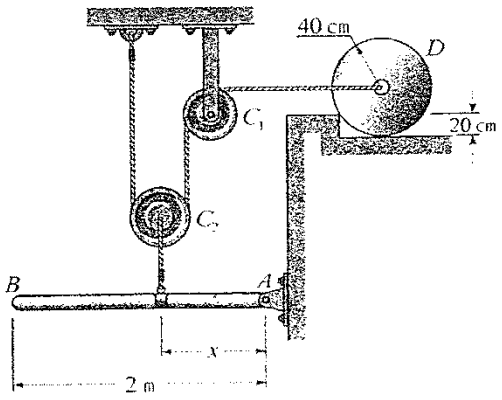
نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب CAB وندرس توازنه.



$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_y(50) - 600(90) = 0$$
$$B_y = 1080\ \text{N}$$
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -A_x + 600 = 0$$
$$A_x = 600\ \text{N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 1080 - 1200 = 0$$
$$A_y = 120\ \text{N}$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}: \quad A = \sqrt{(600)^2 + (120)^2} = 612\ \text{N}$$
$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{120}{600}\right) = 11.3°$$

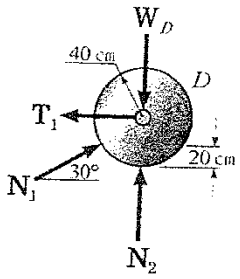
مثال 17-5

تستند أسطوانة D وزنها 200 N على سطح أفقي وعلى حرف وتربط بحبل يلف على بكرة C_1 وبكرة C_2 وزنها 170 N، كما يعلق بالبكرة C_2 قضيب AB وزنه 350 N ومرتبط بالجدار بواسطة مسند ثابت كما هو مبين في الشكل. احسب المسافة x (بعد نقطة تعليق القضيب AB عن الجدار) حتى لاترتفع الأسطوانة على الحرف.



الحل:

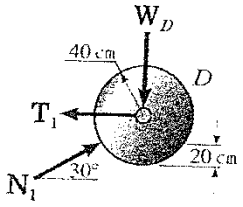
إن حل هذه المسألة يبدأ من دراسة توازن الأسطوانة D وإيجاد قوة الشد في الحبل، تتعرض هذه الأسطوانة إلى أربع قوى متلاقية في نقطة واحدة (مركز ثقل الأسطوانة) واحدة منها معلومة وهي وزن الأسطوانة W_D وثلاث قوى مجهولة هي قوة الشد في الحبل T_1 ورد فعل الحرف على الأسطوانة N_1 ورد فعل الأرض على الأسطوانة N_2 كما هو مبين في مخطط الجسم الحر للأسطوانة.



كما رأينا سابقاً أنه عند دراسة توازن قوى مستوية متلاقية يمكن كتابة معادلتي توازن $(\Sigma F_x = 0)$ و $(\Sigma F_y = 0)$ وبالتالي لا يمكن حساب أكثر من مجهولين، لذلك يبدو للوهلة الأولى أن المسألة غير ممكنة الحل.

في الواقع إن حساب قيمة x حتى لاترتفع الأسطوانة على الحرف يعني إيجاد قيمة x الحدية والتي تكون عندها الأسطوانة على وشك الارتفاع على الحرف وهذا يعني أن التلامس بين الأسطوانة والأرض في هذه الحالة أصبح معدوماً، وبالتالي ينعدم رد فعل الأرض على الأسطوانة N_2 وتكون الأسطوانة في هذه الحالة معرضة لتأثير ثلاث قوى فقط اثنتان منها مجهولتان هما T_1 و N_1 حيث يمكن حسابهما من معادلتي التوازن المذكورتين.

نرسم مخطط الجسم الحر للأسطوانة وندرس توازنها.



$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{20}{40}\right) = 30°$$

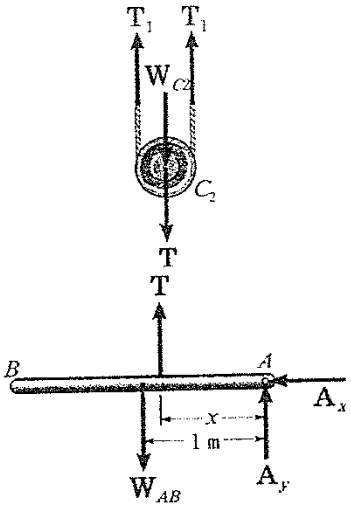
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -200 + N_1 \sin 30° = 0$$

$$N_1 = 400\ \text{N}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad N_1 \cos 30° - T_1 = 0$$

$$T_1 = 346.41\ \text{N}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة C_2 وندرس توازنها.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -T - 170 + 2T_1 = 0$$

$$T = 522.82\ \text{N}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب وندرس توازنه.

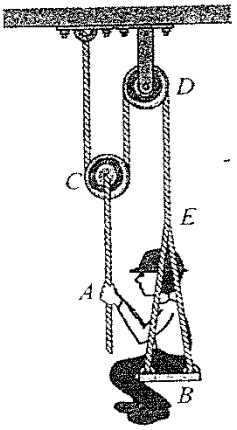
$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -522.82(x) + 350(1) = 0$$

$$x = 0.67\ \text{m}$$

$$\rightarrow x \geq 0.67\ \text{m}$$

مثال 5-18

يزن العامل المبين في الشكل 650 N، ويزن المقعد الذي يجلس عليه 65 N. يوازن العامل نفسه بتطبيق قوة شد على الحبل AC، والمطلوب:

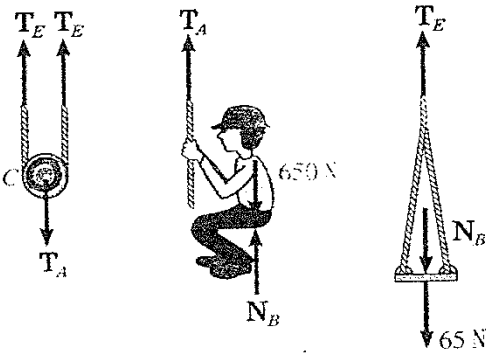


1- حساب قيمة القوة التي يشد العامل بها الحبل AC.

2- حساب قيمة القوة التي يؤثر بها العامل على المقعد.

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر لكل من المقعد مع الحبل والعامل والبكرة C.



من مخطط الجسم الحر للمقعد والحبل:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad T_E - N_B - 65 = 0$$

من مخطط الجسم الحر للعامل:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad T_A + N_B - 650 = 0$$

من مخطط الجسم الحر للبكرة:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T_E - T_A = 0$$

بحل المعادلات الثلاث حلاً مشتركاً نحصل على:

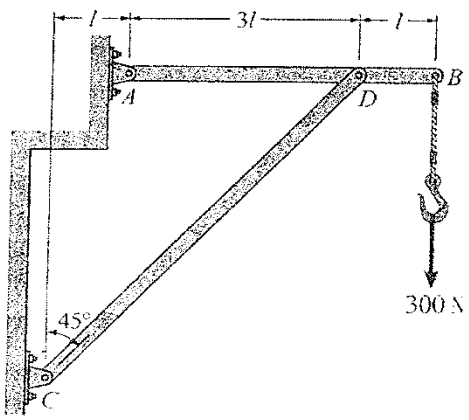
$$T_A = 476.7 \text{ N}$$
$$T_E = 238.3 \text{ N}$$
$$N_B = 173.3 \text{ N}$$

5-2-9 توازن الهياكل والآلات

تتألف الهياكل والآلات من مجموعة من العناصر المرتبطة مع بعضها والواقعة تحت تأثير عدة قوى (ثلاث قوى أو أكثر) بالإضافة إلى احتمال وجود عناصر واقعة تحت تأثير قوتين فقط. تعتبر الهياكل بشكل عام ثابتة بينما تعتبر الآلات متحركة.

إن تحليل الهياكل والآلات يتطلب رسم مخطط الجسم الحر لكل عنصر على حدة وتطبيق معادلات التوازن على هذا العنصر، وبعد حساب القوى في نقاط الوصل يمكن تصميم هذه العناصر ونقاط الاتصال والمساند بالاعتماد على علوم مقاومة المواد وتصميم الآلات.

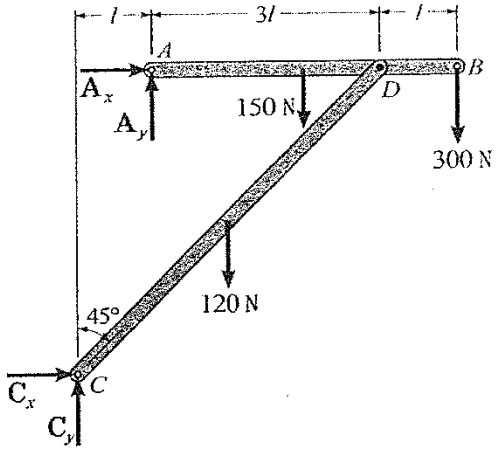
مثال 5-19



يتكون الهيكل المبين في الشكل من قضيب أفقي AB وزنه 150 N يتصل بالجدار بمفصل، وقضيب مائل CD وزنه 120 N يرتبط بالقضيب AB وبالجدار بمفصلين. علق في الطرف الآخر للقضيب AB جسم وزنه 300 N. احسب ردي فعل المفصلين A و C باعتبار أن القضيبين متجانسان.

الحل:

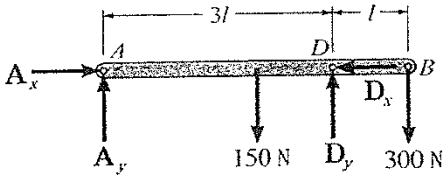
نفصل القضيبين عن القيود الخارجية (دون فصلهما عن بعضهما) ونرسم مخطط الجسم الحر لهما ثم نكتب معادلات التوازن.



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + C_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + C_y - 150 - 120 - 300 = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad C_x(4l) - C_y(l) - 120(l) - 150(2a) - 300(4a) = 0$$



نلاحظ أن معادلات التوازن الثلاث تحتوي على أربع قوى مجهولة A_x, A_y, C_x, C_y أي أنه تنقصنا معادلة لكي نتمكن من حل المسألة، لذلك ندرس توازن القضيب AB على حدة، وبالتالي نفصل هذا القضيب عن كافة الارتباطات ونرسم مخطط الجسم الحر له.

نكون المعادلة الرابعة التي تنقصنا بكتابة معادلة العزوم حول النقطة D (وحينئذ لا تدخل في المعادلة المجاهيل الجديدة D_x و D_y).

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \quad -A_y(3l) + 150(l) - 300(l) = 0$$

ويحل مجموعة المعادلات الأربع الناتجة (ابتداءً بالأخيرة) نجد:

$$A_y = \frac{1}{3}(150 - 300) = -50 \text{ N}$$

$$C_y = 150 + 120 + 300 - (-50) = 620 \text{ N}$$

$$C_x = \frac{1}{4}(620+120+150(2)+300(4)) = 560\ \text{N}$$

$$A_x = -560\ \text{N}$$

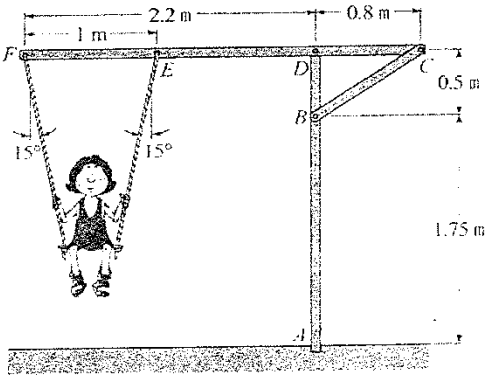
من هذه النتائج نجد أن القوتين $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ تتجهان في الاتجاهين المعاكسين للاتجاهين المفروضين والمبينين في الشكل. **ونلفت النظر إلى أنه عند حل مجموعة المعادلات يجب التعويض عن إحدى القيم الناتجة من إحدى المعادلات في معادلة أخرى وأن تأخذ نفس الإشارة التي حصلنا عليها، ففي حالتنا هذه عوضنا عن A_y عند حساب C_y بمقدارها $(-50\,\text{N})$ وليس $(50\,\text{N})$. أما لو قمنا بتغيير اتجاه شعاع القوة C_y في مخطط الجسم الحر بعد حصولنا على القيمة $(-50\,\text{N})$ فيجب عندئذ أن نصحح الإشارات المتعلقة بالقوة C_y في معادلات التوازن لأن تغيير اتجاه شعاع القوة دون تصحيح معادلات التوازن يؤدي إلى نتائج خاطئة.**

ملاحظة:

لو طلب حساب القوة الداخلية المتبادلة بين القضيبين في المفصل D فإننا نحسبها بكتابة المعادلتين $(\Sigma F_x = 0)$ و $(\Sigma F_y = 0)$ للقضيب AB.

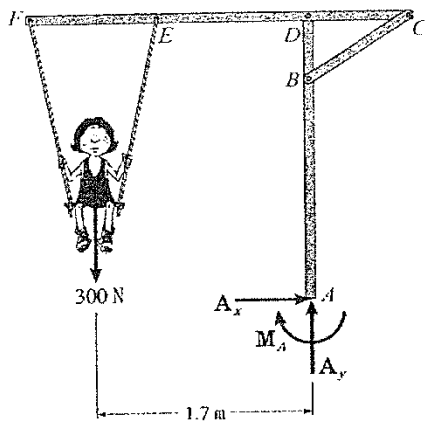
مثال 5-20

تزن الطفلة المبينة في الشكل $300\,\text{N}$، والمطلوب حساب ردود الأفعال الناتجة في نقطة التثبيت A والقوى المتبادلة بين القضبان في المفصلين B و D، علماً أن أوزان القضبان مهملة.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر لكامل الهيكل دون فصل القضبان عن بعضها.



نكتب معادلات التوازن الثلاث:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -300 + A_y = 0$$

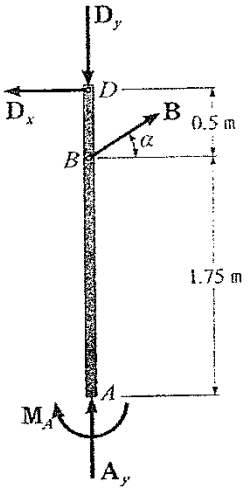
$$A_y = 300 \text{ N}$$

$$\circlearrowleft^{+}\Sigma M_A = 0: \qquad 300(1.7) - M_A = 0$$

$$M_A = 510 \text{ N·m}$$

نكتب معادلات التوازن الثلاث.

نفصل القضيب AD عن الهيكل وندرس توازنه.



$$\alpha = \tan\left(\frac{0.5}{0.8}\right) = 32°$$

$$\circlearrowleft^{+}\Sigma M_D = 0: \qquad B\cos 32°(0.5) - M_A = 0$$

$$B = 1203 \text{ N}$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad B\cos 32° - D_x = 0$$

$$D_x = 1020 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y + B\sin 32° - D_y = 0$$

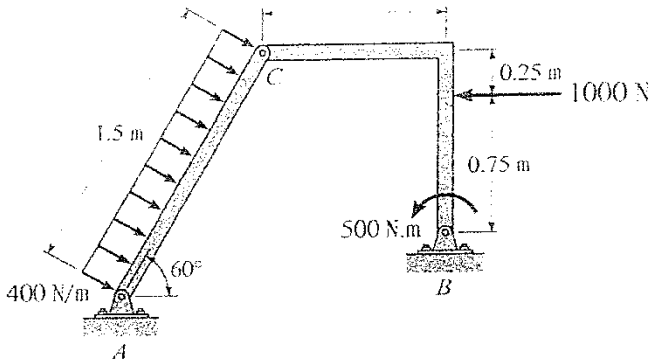
$$D_y = 937 \text{ N}$$

$$D = \sqrt{(1020)^2 + (937)^2} = 1385 \text{ N}$$

$$\theta_D = \tan^{-1}\left(\frac{937}{1020}\right) = 42.6°$$

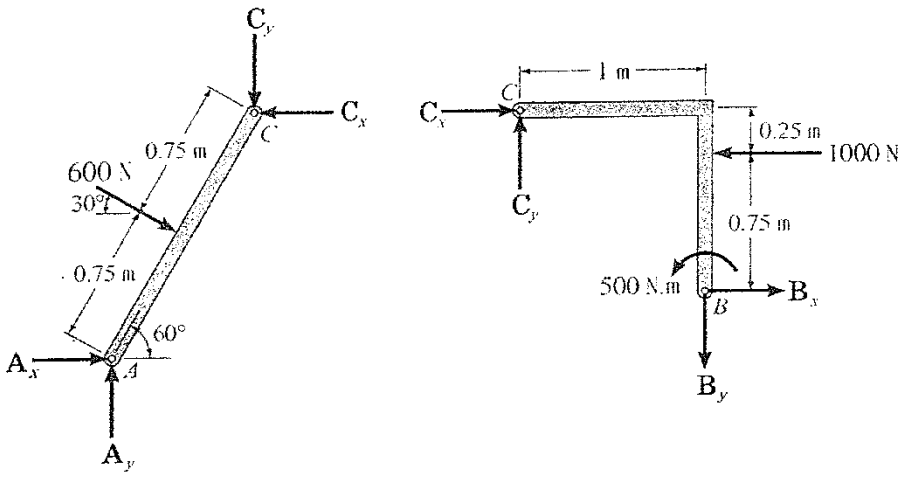
مثال 5-21

احسب ردود الأفعال الناتجة في المسندين A و B للهيكل المبين في الشكل. أهمل وزني القضيبين.



الحل:

بما أنه يؤثر على الهيكل أربعة ردود فعل مجهولة عند المسندين الثابتين A و B (مركبتان لكل رد فعل) ولا تكفي معادلات التوازن الثلاث لإيجادها، لذلك نفصل القضيبين عن بعضهما ونرسم مخطط الجسم الحر لكل منهما.



ندرس توازن القضيب AC.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x - C_x + 600\cos 30^\circ = 0$$

$$A_x = C_x - 519.6 \qquad \cdots(1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - C_y - 600\sin 30^\circ = 0$$

$$A_y = C_y + 300 \qquad \cdots(2)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad C_x(1.5\cos 30^\circ) - C_y(1.5\sin 30^\circ) - 600(0.75) = 0$$

$$1.3C_x - 0.75C_y = 450 \qquad \cdots(3)$$

ندرس توازن القضيب BC.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad C_x + B_x - 1000 = 0$$
$$B_x = -C_x + 1000 \qquad \cdots(4)$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - B_y = 0$$
$$B_y = C_y \qquad \cdots(5)$$
$$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -C_x(1) - C_y(1) + 1000(0.75) + 500 = 0$$
$$C_x + C_y = 1250 \qquad \cdots(6)$$

نحل العلاقتين (3) و (6)حلاً مشتركاً.

$$C_x = 677 \text{ N} \qquad C_y = 573 \text{ N}$$

نحل العلاقتين (1) و (2)حلاً مشتركاً.

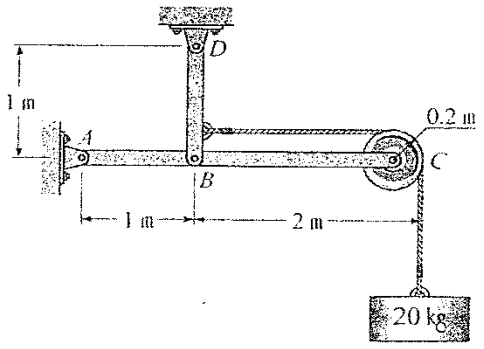
$$A_x = 157 \text{ N} \qquad A_y = 873 \text{ N}$$
$$A = \sqrt{(157)^2 + (873)^2} = 887 \text{ N}$$

نحل العلاقتين (4) و (5)حلاً مشتركاً.

$$B_x = 323 \text{ N} \qquad B_y = 573 \text{ N}$$
$$B = \sqrt{(323)^2 + (573)^2} = 658 \text{ N}$$

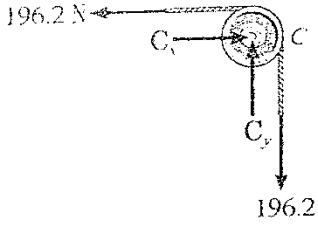
مثال 5-22

احسب ردود الأفعال الناتجة في المسندين A و D والقوى المؤثرة على المفصلين B و C، علماً أن أوزان البكرة والقضبان مهملة.



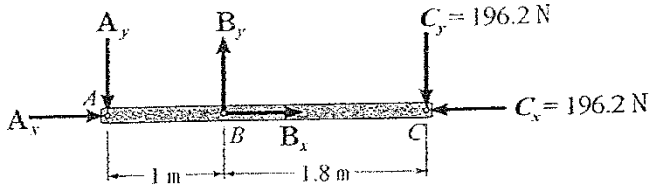
الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة وندرس توازنها.



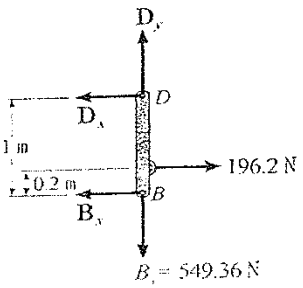
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad C_x - 196.2 = 0$$
$$C_x = 196.2 \text{ N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 196.2 = 0$$
$$C_y = 196.2 \text{ N}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب AC وندرس توازنه.



$$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -196.2\ (1.8) + A_y\ (1) = 0$$
$$A_y = 353.2 \text{ N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -A_y + B_y - 196.2 = 0$$
$$B_y = 549.4 \text{ N}$$
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B_x - 196.2 = 0$$
$$A_x + B_x = 196.2 \quad \cdots(1)$$

نرسم مخطط الجسم الحر للقضيب BD وندرس توازنه.

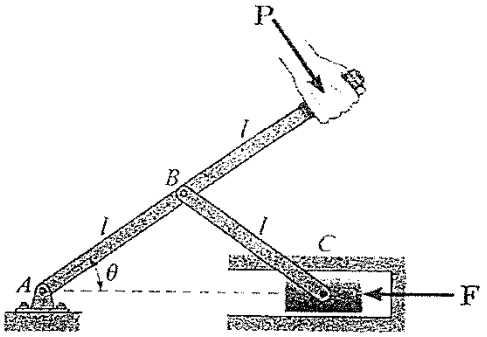


$$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad -196.2\ (0.8) - B_x\ (1) = 0$$
$$B_x = 157 \text{ N}$$
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -B_x - D_x + 196.2 = 0$$
$$D_x = 39.2 \text{ N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad D_y - B_y = 0$$
$$D_y = 549.4 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{(39.2)^2 + (353.2)^2} = 355.4 \text{ N}$$
$$D = \sqrt{(39.2)^2 + (549.4)^2} = 550.8 \text{ N}$$
$$B = \sqrt{(157)^2 + (549.4)^2} = 571.4 \text{ N}$$
$$C = \sqrt{(196.2)^2 + (196.2)^2} = 277.5 \text{ N}$$

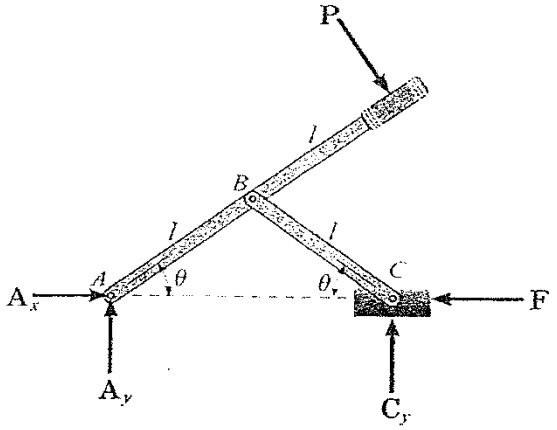
مثال 5-23

في الآلية المبينة بالشكل تطبق قوة **P** بشكل عمودي على الذراع AD، والمطلوب حساب قيمة القوة **F** اللازم تطبيقها على المكبس من أجل التوازن الستاتيكي.



الحل:

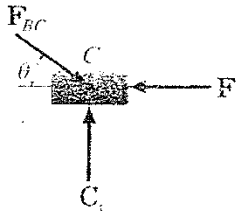
نرسم مخطط الجسم الحر للآلية.



نطبق معادلة العزوم حول النقطة A من أجل الحصول على قيمة رد الفعل C_y.

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -P(2l) + C_y(2l\cos\theta) = 0$$

$$C_y = \frac{P}{\cos\theta}$$



نرسم مخطط الجسم الحر للمكبس، ثم نكتب معادلتي توازن المحورين x و y ونحسب قيمة القوة F.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad C_y - F_{BC}\sin\theta = 0$$

$$F_{BC} = \frac{C_y}{\sin\theta} = \frac{P}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad -F + F_{BC}\cos\theta = 0$$

$$F = F_{BC}\cos\theta = \frac{P}{\sin\theta\cos\theta}\cos\theta = \frac{P}{\sin\theta}$$

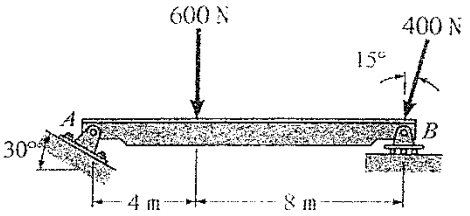
مسائل غير محلولة

مسألة 5-1

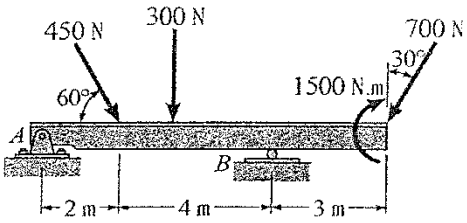
احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.

مسألة 5-2

احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.



شكل المسألة (5-1)



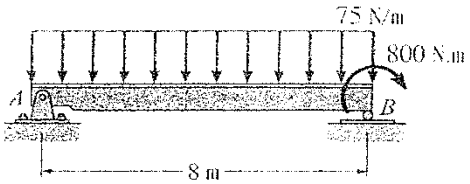
شكل المسألة (5-2)

مسألة 5-3

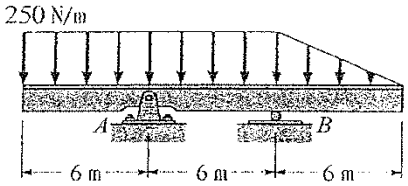
احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.

مسألة 5-4

احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.



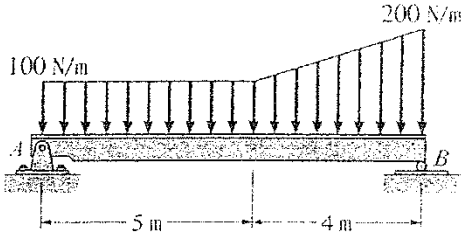
شكل المسألة (5-3)



شكل المسألة (5-4)

مسألة 5-5

احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.



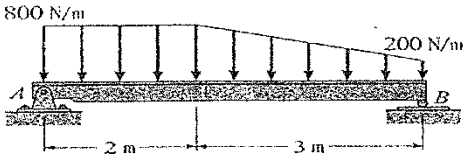
شكل المسألة (5-5)

مسألة 5-6

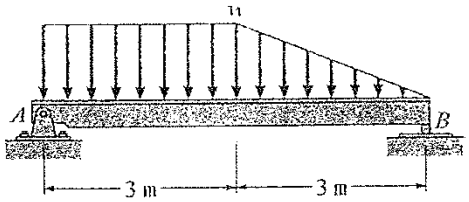
احسب ردود الأفعال المؤثرة على الجائز المبين في الشكل.

مسألة 5-7

احسب القيمة الأعظمية للحمولة الموزعة w المؤثرة على الجائز، إذا كانت القوة الأعظمية التي يمكن لكل من المفصل A أو المتدحرج B أن يتحملها هي $6\,kN$.



شكل المسألة (5-6)



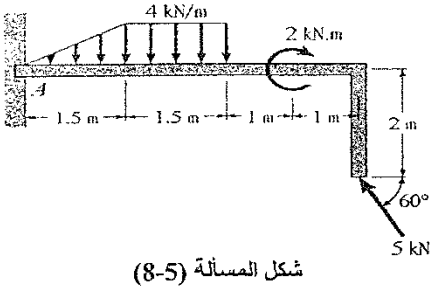
شكل المسألة (5-7)

مسألة 5-8

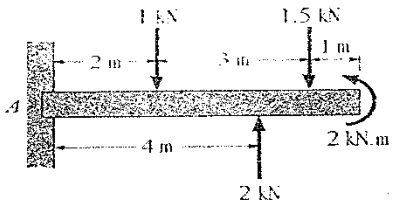
احسب رد فعل الجدار على القضيب المبين في الشكل.

مسألة 5-9

عارضة معدنية منتظمة كتلتها $50\,kg/m$ ومثبتة في جدار، تؤثر عليها ثلاث قوى وعزم. احسب رد فعل الجدار على العارضة.



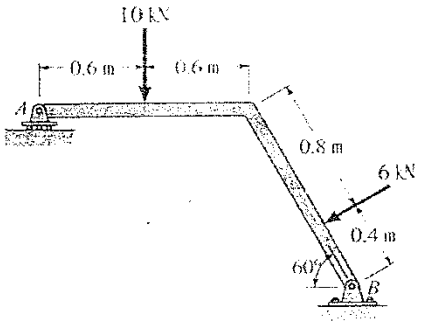
شكل المسألة (5-8)



شكل المسألة (5-9)

مسألة 5-10

احسب ردود الأفعال المؤثرة على القضيب AB المبين في الشكل.



شكل المسألة (5-10)

مسألة 5-31

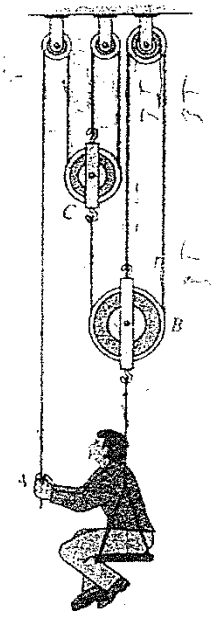
يحاول رجل كتلته 75kg يجلس على مقعد كتلته 5kg أن يرفع نفسه بواسطة آلية مكونة من بكرات وحبال.

احسب قوة الشد التي يجب على الرجل أن يطبقها في A من أجل التوازن واحسب أيضاً القوة التي يؤثر بها على المقعد.

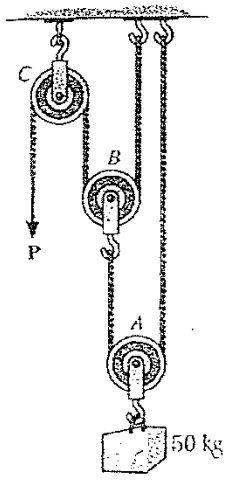
مسألة 5-32

يستخدم حبل ومجموعة من البكرات لرفع كتلة مقدارها 50kg.

احسب مقدار القوة **P** اللازم تطبيقها على الحبل من أجل التوازن.



شكل المسألة (5-31)



شكل المسألة (5-32)

مسألة 5-33

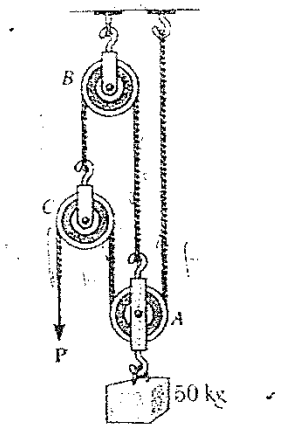
يستخدم حبل ومجموعة من البكرات لرفع كتلة مقدارها 50kg.

احسب مقدار القوة **P** اللازم تطبيقها على الحبل من أجل التوازن.

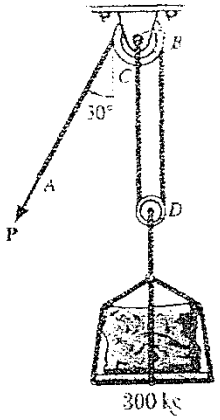
مسألة 5-34

يستخدم حبل ومجموعة من البكرات لرفع كتلة مقدارها 300kg. احسب مقدار القوة **P** اللازم تطبيقها على الحبل من أجل التوازن.

احسب أيضاً رد فعل المسند الثابت B على البكرة C.



شكل المسألة (5-33)

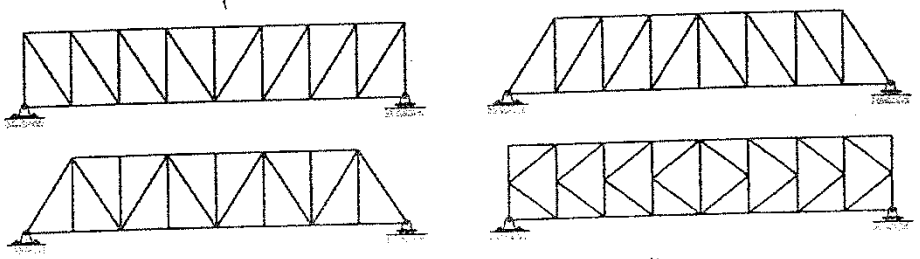


شكل المسألة (5-34)

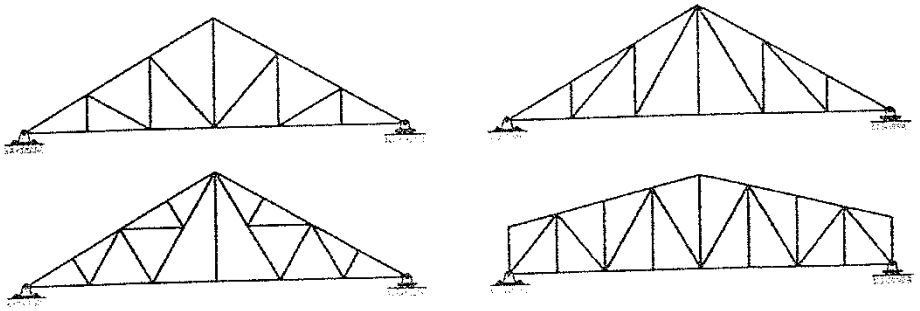
الفصل السادس
الجوائز الشبكية
Trusses

6-1 مقدمة

الجوائز الشبكية هي عبارة عن منشآت مكونة من مجموعة من القضبان المعدنية المرتبطة مع بعضها بشكل هيكلي، وتشاهد مثل هذه المنشآت في الحياة العملية في الأبراج وفي سقوف الصالات الكبيرة كالمصانع وصالات الرياضة حيث يحتاج الأمر إلى فسحة واسعة دون أعمدة حاملة في وسطها، كما تستخدم في الجسور المعدنية والروافع، ويبين الشكل (6-1) أمثلة عديدة للجوائز الشبكية الشائعة الاستخدام.



الجوائز الشبكية المستخدمة في الجسور

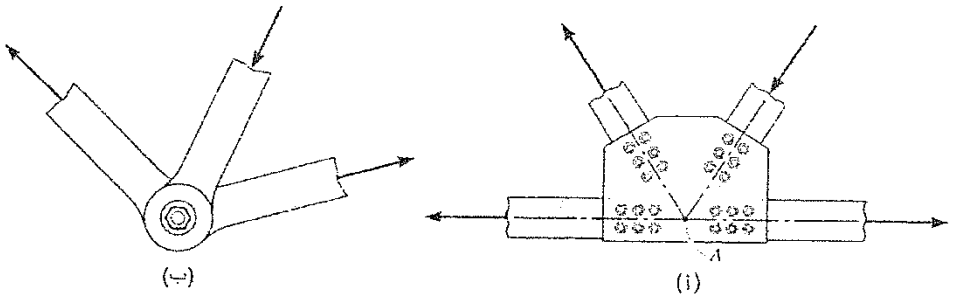


الجوائز الشبكية المستخدمة في السقوف

شكل (6-1)

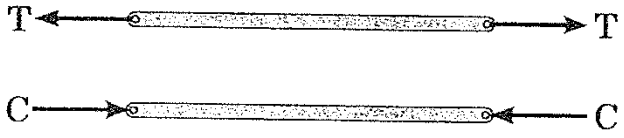
تكون قضبان المنشاة مختلفة المقاطع طبقاً لطبيعة العمل المطلوب منها وحسب نوع القوى المؤثرة عليها، ويكون لهذه القضبان مقاطع بشكل T أو I أو L أو | ولكل من هذه المقاطع مواصفات ومقاييس تكاد تكون دولية، ويمكن للجوائز الشبكية أن تحمل حمولات كبيرة بالنسبة لعناصرها الإنشائية الخفيفة. تربط القضبان مع بعضها عن طريق

وصلات بواسطة اللحام أو البراغي أو البراشيم وتسمى بالعقد، كما يمكن أن تتصل ببعضها اتصالاً مفصلياً عن طريق برغي يمر عبرها كما هو موضح في الشكل (6-2).



شكل (6-2)

ترتكز المنشأة على الأرض أو الجدران بواسطة المساند الثابتة والمتحركة. ويجب أن تطبق الحمولات المؤثرة على الجائز الشبكي فقط على العقد، ثم تنتقل الحمولات إلى نقاط ارتكاز المنشأة عبر القضبان والوصلات. ولذلك يكون كل قضيب معرضاً لقوتين محوريتين وبالتالي يجب أن تكون هاتان القوتان متساويتين ومتعاكستين مباشرة، وقد تكون هاتان القوتان ضاغطتين على القضيب أو شادتين له (شكل 6-3).



شكل (6-3)

إن شرط انتقال القوى عبر قضبان الهيكل باتجاه محاور هذه القضبان ضروري من أجل توازن القضيب، إذ لو لم تكن القوى المعرض لها القضيب باتجاه محوره وحتى لو كانت متوازية متساوية فإنها ستؤثر عليه بعزم دوراني مما يدل على عدم اتزان القضيب لذلك فمن شروط توازن قضبان المنشأة أن تكون القوى المؤثرة على القضبان محورية.

يتلخص حساب الجوائز الشبكية بإيجاد ردود الأفعال عند المساند والقوى المؤثرة على قضبان الجائز. **ومن المهم جداً عند حساب القوى المؤثرة في قضبان الجائز الشبكي تحديد فيما إذا كانت هذه القوى هي قوى شد أم ضغط ولا يكفي حساب قيم**

القوى فقط، لأن تصميم القضبان الواقعة تحت تأثير قوى شد يختلف عن تصميم القضبان الواقعة تحت تأثير قوى ضغط.

إذا كان لوزن الجائز الشبكي أهمية عند دراسة توازنه فإننا نستبدل عادة وزن كل قضيب بقوتين متساويتين تساوي كل منهما نصف وزنه وتؤثر عند عقدة من العقدتين الواقعتين عند نهايتي القضيب.

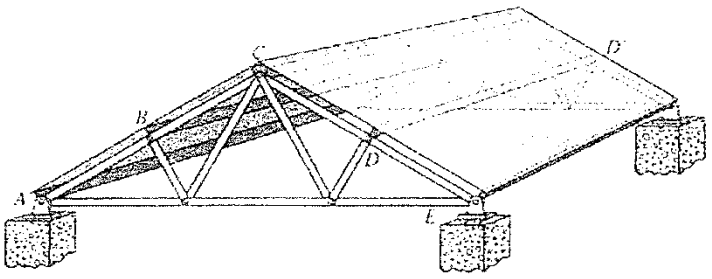
يتبين مما تقدم أن خط عمل القوة المؤثرة على قضيب ما من الهيكل يكون معلوماً ولا نجهل سوى قيمة هذه القوة أي أنه لدينا مجهول واحد لكل قضيب.

لقد ذكرنا أن قضبان المنشأة الهيكلية ترتبط مع بعضها بواسطة عقد، وتكون كل عقدة إذن معرضة لعدد من القوى المتلاقية في نقطة واحدة ويكون عدد القوى في كل عقدة مساوياً لعدد القضبان الواصلة لها بالإضافة إلى القوة الخارجية إن وجدت. إن توازن الجائز الشبكي يعني أن كافة القضبان والعقد المكونة له يجب أن تكون متوازنة، ودراسة الجوائز الشبكية تتطلب تعيين كافة القوى الخارجية المؤثرة عليها إضافة إلى القوى المحورية المؤثرة على قضبانها.

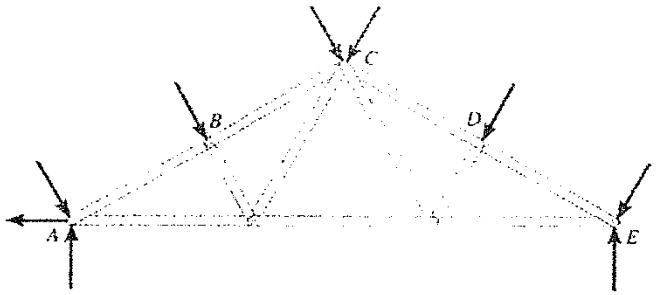
تصنف الجوائز الشبكية من ناحية شكلها والحمولة المؤثرة عليها وطريقة دراسة توازنها إلى جوائز شبكية مستوية وجوائز شبكية فراغية.

2-6 الجوائز الشبكية المستوية

يسمى الجائز الشبكي بالجائز المستوي عندما تكون جميع قضبانه والقوى المؤثرة عليها واقعة في مستو واحد، وتستخدم الجوائز الشبكية المستوية عادة لتثبيت السقوف أو الجسور بصورة مزدوجة حيث يوضع كل واحد على جانب من جانبي السقف أو الجسر ويربطان مع بعضهما بواسطة قضبان عرضية حيث تقوم هذه القضبان بنقل الحمولات المؤثرة على السقف أو على الجسر إلى عقد الجائز. فمثلاً إن الجائز الشبكي $ABCDE$ المبين في الشكل (6-4) هو مثال شائع الاستخدام للأسقف المعدنية وفي هذا الشكل تنتقل حمولات السقف إلى الجائز عن طريق مجموعة من القضبان المتوازية مثل DD' وتكون القوى المنقولة قوى مستوية.



(أ)



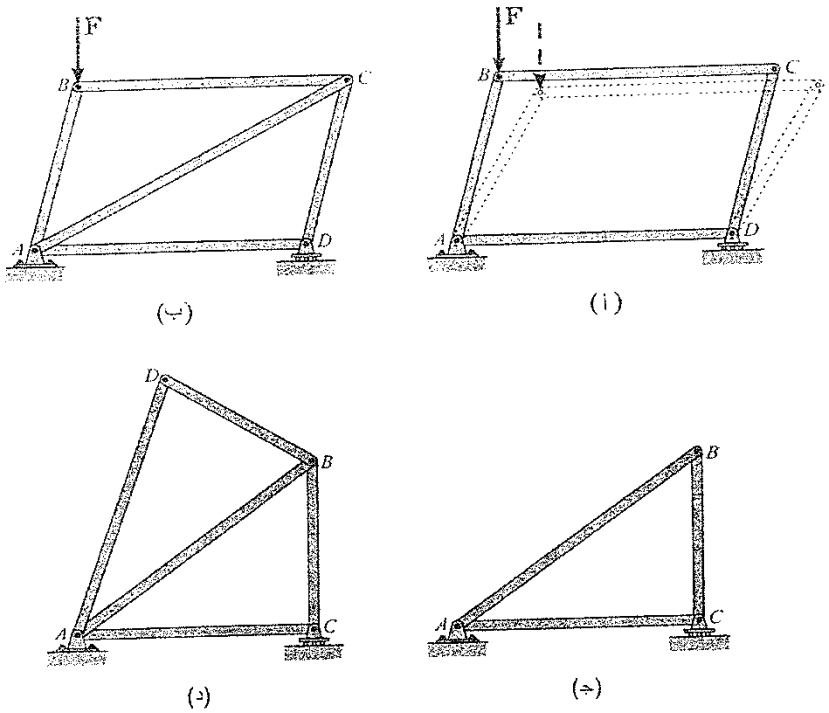
(ب)

شكل (6-4)

6-2-1 الهيكل الصلب

الهيكل الصلب هو الذي يحافظ على شكله الهندسي دون تشوه مهما كانت قيمة القوى الخارجية المؤثرة عليه كبيرة ولذلك يجب أن ترتبط مختلف أضلاع الجائز الشبكي على شكل مثلثات. فالمثلث هو المضلع الوحيد الذي يحافظ على شكله الهندسي مهما كانت القوى المؤثرة عليه، بينما يتشوه المضلع الرباعي بسهولة حين نؤثر عليه بقوى خارجية (شكل 6-5 أ)، ويمنع تشوه المضلع الرباعي إذا وصلت رؤوسه المتقابلة قطرياً أو بتعبير آخر إذا قسم إلى مثلثات. فمثلاً نستطيع أن نحول المضلع $ABCD$ في الشكل (6-5 أ) إلى هيكل متماسك بإضافة قضيب قطري وذلك بتوصيل A مع C أو B مع D وينتج من ذلك مثلثان (شكل 6-5 ب).

نستنتج مما سبق أن أبسط جائز شبكي يتألف من مثلث واحد فقط (شكل 6-5 جـ) ويمكن توسعة الإنشاء بإضافة وحدات إضافية مكونة من قضيبين متصلين في نهاياتهما بعقدة مثل AD و BD (شكل 6-5 د)، وبهذه الصورة يبقى الإنشاء الكلي غير متغير هندسياً.



شكل (6-5)

6-2-2 حل الجوائز الشبكية

لقد ذكرنا في مقدمة هذا الفصل أن دراسة الجوائز الشبكية تتطلب تعيين كافة القوى الخارجية المؤثرة عليها إضافة إلى القوى المحورية المؤثرة على أضلاعها (قضبانها). وحيث أن القوى المحورية على الأضلاع هي قوى داخلية لذلك فإنها لن تظهر إلا إذا درسنا توازن عقد المنشأة كلاً على حدة وعوضنا عن القوى المحورية المؤثرة على القضبان الواصلة لهذه العقدة بقوى ضاغطة أو شادة للعقدة. وتتم دراسة توازن جميع القوى المؤثرة على العقدة باعتبارها جملة قوى متلاقية في نقطة واحدة. أما الطريقة الأخرى لإيجاد القوى المحورية الداخلية المؤثرة على قضبان المنشأة فتتم بقطع الجائز إلى جزئين وفق مقطع وهمي معين ومن ثم إبعاد هذين الجزأين عن بعضهما فتظهر القوى الداخلية وتصبح خارجية وسنبين هنا كلا الطريقتين.

عند دراسة توازن المنشأة بكاملها، نستطيع تعيين ردود الأفعال عند نقاط الارتكاز وذلك استناداً إلى معادلات التوازن الثلاث كما نستطيع كتابة معادلتين لتوازن كل عقدة على حدة. في الواقع توجد علاقة بين عدد المجاهيل الإجمالية في أية منشأة بما فيها

ردود الأفعال والقوى المحورية في القضبان وبين عدد معادلات التوازن الممكن وضعها أي عدد العقد في المنشأة. فإذا كان للجائز j عقدة كان له $2j$ معادلة لأننا نستطيع كتابة معادلتي توازن لكل عقدة، وإذا كان عدد قضبان الجائز يساوي m وعدد ردود الأفعال المجهولة لمسانده تساوي ثلاثة كحد أقصى يكون عدد المجاهيل الكلي $m+3$ وينتج عن ذلك المعادلة

$$m+3=2j$$

وهي محققة من أجل جائز محدد ستاتيكياً من الداخل. أما إذا كان $m+3>2j$ فإن عدد أضلاع الجائز يزيد على عدد معادلات التوازن ويكون الجائز الشبكي غير محدد ستاتيكياً من الداخل وهناك أضلاع زائدة، وبالتالي لا يمكن حساب القوى المؤثرة في كافة القضبان بطرق التحليل الستاتيكي، وأما إذا كان $m+3<2j$ فإن هناك نقصاً في عدد الأضلاع الداخلية ويكون الجائز الشبكي غير صلب وينهار تحت تأثير القوى.

1-2-2-6 طريقة العقد

إذا كانت المنشأة في حالة توازن فهذا يعني أن كل وصلاتها يجب أن تكون في حالة توازن. تعتمد طريقة العقد على أن الوصلات التي تربط القضبان ببعضها يجب أن تحقق شرط التوازن للقوى المؤثرة على كل عقدة من عقد الجائز الشبكي، وطالما أن أضلاع المنشأة كلها عبارة عن قضبان مستقيمة واقعة تحت تأثير قوتين واقعتين في المستوي نفسه فإن جملة القوى المؤثرة على كل عقدة هي قوى مستوية ومتلاقية في نقطة واحدة وشروط التوازن هي:

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0$$

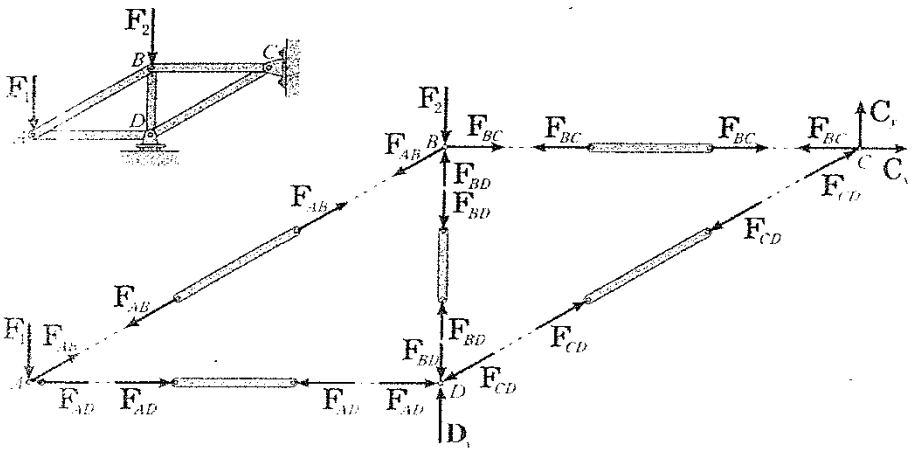
لدراسة توازن المنشأة بطريقة العقد نبدأ بإحدى العقد، حيث نرسم مخطط الجسم الحر لهذه العقدة ونكتب معادلات التوازن للقوى المؤثرة عليها، ثم نحل المعادلات ونجد القوى المجهولة، وبما أنه لا يمكن وضع أكثر من معادلتين لتوازن القوى عند العقدة لذلك لا يمكن أن نبدأ إلا بعقدة نجهل من القوى المؤثرة عليها قوتان فقط، وفي حالة عدم وجود أي عقدة يتوفر فيها هذا الشرط، لابد عند ذلك من اعتبار المنشأة متكاملة وكأنها جسم صلب وحساب ردود الأفعال عند المساند ومن ثم ننتقل لدراسة توازن كل عقدة على حدة من أجل حساب القوى المحورية المؤثرة على أضلاع المنشأة.

عند دراسة توازن العقدة يحدد اتجاه القوى بإحدى طريقتين:

1- يمكن أن نفترض دائماً أن القوى المؤثرة من القضبان على العقدة هي قوى شد، وبعد كتابة وحل معادلات التوازن وإيجاد قيم القوى المجهولة نحصل على الاتجاه الصحيح، فإذا كانت القيمة موجبة فالاتجاه المفروض للقوة صحيح والقوة هي قوة شد، وإذا كانت القيمة سالبة فالاتجاه المفروض للقوة خاطئ والقوة هي قوة ضغط.

2- يمكن توقع اتجاه القوى في قضبان المنشأة بالحدس والممارسة، وكذلك في هذه الحالة فإن الاتجاه الصحيح للقوة نحصل عليه بعد حل معادلات التوازن، ويجب الانتباه عند استخدام هذه الطريقة أن إشارات القيم العددية للقوى المحسوبة لا تعني أنها قوة شد إذا كانت القيمة موجبة وضغط إذا كانت القيمة سالبة كما في الطريقة الأولى، وإنما تعني أن الاتجاه المفروض للقوة صحيح إذا كانت القيمة موجبة، بينما الاتجاه المفروض للقوة خاطئ إذا كانت القيمة سالبة.

عندما ندرس توازن القوى في عقدة ما ونجد أن إحدى القوى هي قوة شد على العقدة فإن القضيب الذي تؤثر عليه هذه القوة يكون واقعاً تحت تأثير قوة شد أيضاً، لأنه حسب مبدأ الفعل ورد الفعل فإن القضيب يؤثر على العقدة بقوة شد إذا أثرت العقدة على القضيب بقوة شد، والعكس صحيح أي إذا أثرت العقدة على القضيب بقوة ضغط فالقضيب يؤثر على العقدة بقوة ضغط أيضاً، وهذه العلاقة المتبادلة بين القضبان والعقد مبينة في الشكل (6-6).

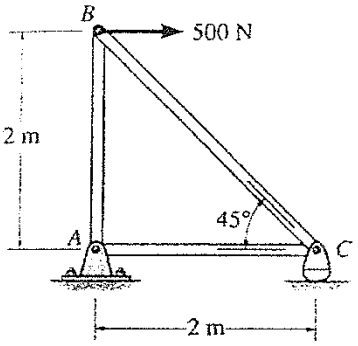


شكل (6-6)

مثال 6-1

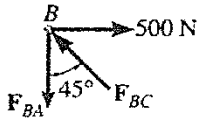
احسب القوى المؤثرة على كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

الحل:



بما أننا لا نستطيع أن نبدأ بتحليل الجائز الشبكي إلا من عقدة لا تحوي أكثر من مجهولين، لذلك نجد أن البدء بحل هذه المسألة يجب أن يكون من العقدة B إذا لم نرغب بحساب ردود الأفعال أولاً.

نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة B وندرس توازنها وذلك بكتابة معادلتي التوازن $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$.



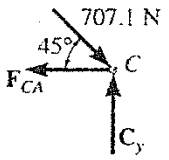
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad 500 - F_{BC}\sin 45° = 0$$

$$F_{BC} = 707.1\,\text{N} \quad (\text{C})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{BC}\cos 45° - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 500\,\text{N} \quad (\text{T})$$

ندرس بعد ذلك توازن العقدة C.



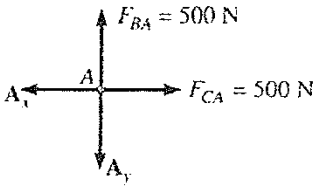
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad -F_{CA} + 707.1\cos 45° = 0$$

$$F_{CA} = 500\,\text{N} \quad (\text{T})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 707.1\sin 45° = 0$$

$$C_y = 500\,\text{N}$$

على الرغم من أن حساب ردود الأفعال في المسند A ليس ضرورياً، إلا أننا نستطيع حسابها بدراسة توازن العقدة A. نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة A ونكتب معادلتي التوازن.

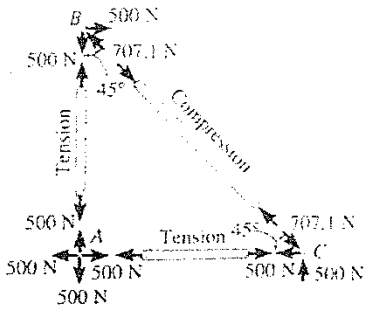


$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad 500 - A_x = 0$$

$$A_x = 500\,\text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 500 - A_y = 0$$

$$A_y = 500\,\text{N}$$



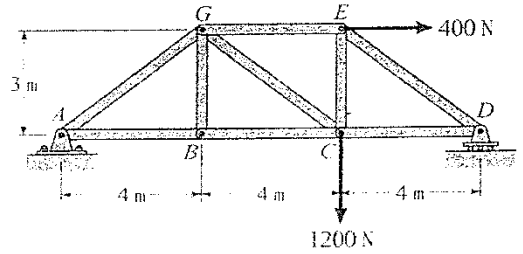
إن نتائج تحليل هذا الجائز مبينة في الشكل جانباً حيث تم توضيح القوى المؤثرة على كل عقدة وكل قضيب من قضبان الجائز الشبكي.

ملاحظة:

يمكن التأكد من صحة الحل بحساب ردود الأفعال على المنشأة وكأنها جسم صلب أي دون فصل العقد، ثم مقارنة النتيجة مع القيم التي حصلنا عليها.

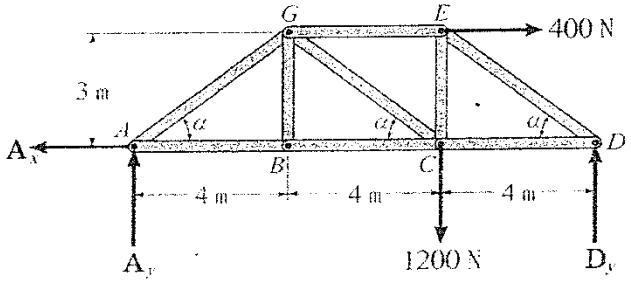
مثال 6-2

احسب القوى المؤثرة على كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



الحل:

نلاحظ أنه لا توجد في هذا الجائز الشبكي أية عقدة يكون عدد القوى المجهولة المؤثرة عليها لا يزيد عن اثنتين، لذلك يجب البدء بحساب ردود الأفعال أولاً. نرسم مخطط الجسم الحر لكامل الجائز ثم نكتب معادلات التوازن ونحسب ردود الأفعال.



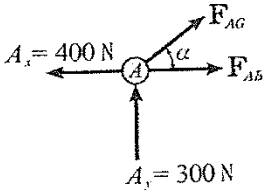
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 400 - A_x = 0$$

$$A_x = 400 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad D_y(12) - 400(3) - 1200(8) = 0$$
$$D_y = 900 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + D_y - 1200 = 0$$
$$A_y = 300 \text{ N}$$

نبدأ الآن بحساب القوى في القضبان وبالإمكان البدء من العقدة A أو العقدة D. سوف نبدأ بدراسة توازن العقدة A. نرسم مخطط الجسم الحر لها ونكتب معادلتي التوازن.

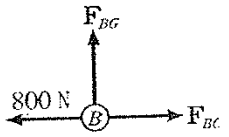


$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.9°$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 300 + F_{AG}\sin\alpha = 0$$
$$F_{AG} = -500 \text{ N} \quad (\text{C})$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -400 + F_{AB} + F_{AG}\cos\alpha = 0$$
$$F_{AB} = 800 \text{ N} \quad (\text{T})$$

ننتقل إلى دراسة توازن العقدة B.

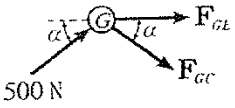


$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - 800 = 0$$
$$F_{BC} = 800 \text{ N} \quad (\text{T})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{BG} = 0$$

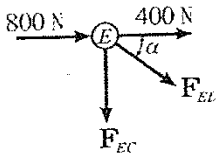
ندرس بعد ذلك توازن العقدة G.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 500\sin\alpha - F_{GC}\sin\alpha = 0$$
$$F_{GC} = 500 \text{ N} \quad (\text{T})$$



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 500\cos\alpha + F_{GC}\cos\alpha + F_{GE} = 0$$
$$F_{GE} = -800 \text{ N} \quad (\text{C})$$

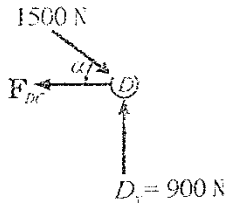
ندرس الآن توازن العقدة E.



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 800 + 400 + F_{ED}\cos\alpha = 0$$
$$F_{ED} = -1500 \text{ N} \quad (\text{C})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -F_{ED}\sin\alpha - F_{EC} = 0$$
$$F_{EC} = 900 \text{ N} \quad (\text{T})$$

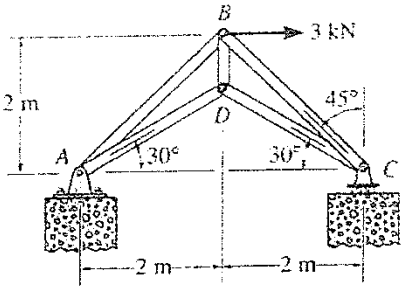
ثم ندرس أخيراً توازن العقدة D.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 1500\cos\alpha - F_{DC} = 0$$
$$F_{DC} = 1200 \text{ N} \quad (\text{T})$$

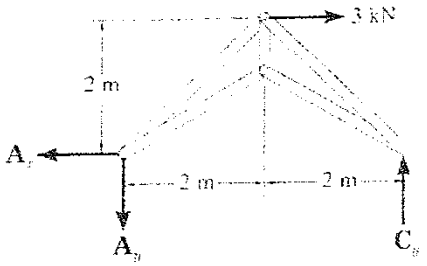
مثال 3-6

احسب القوى المؤثرة على كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



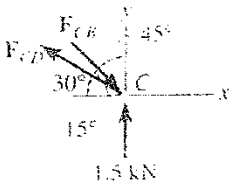
الحل:

نلاحظ أنه أيضاً في هذا الجائز الشبكي لا توجد أية عقدة يكون عدد القوى المجهولة المؤثرة عليها لا يزيد عن اثنتين، لذلك يجب البدء بحساب ردود الأفعال أولاً. نرسم مخطط الجسم الحر لكامل الجائز ثم نكتب معادلات التوازن ونحسب ردود الأفعال.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -A_x + 3 = 0$$
$$A_x = 3 \text{ kN}$$
$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad A_y(4) - 3(2) = 0$$
$$A_y = 1.5 \text{ kN}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -1.5 + C_y = 0$$
$$C_y = 1.5 \text{ kN}$$

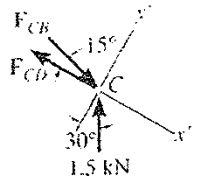
ننتقل بعد ذلك لحساب القوى في القضبان ونبدأ بالعقدة C. نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة C ونكتب معادلتي التوازن.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -F_{CD}\cos 30° + F_{CB}\sin 45° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 1.5 + F_{CD}\sin 30° - F_{CB}\cos 45° = 0$$

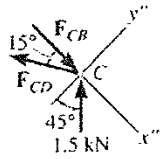
نلاحظ أنه يجب حل المعادلتين معاً لأن كلاً منهما تحتوي على المجهولين F_{CB} و F_{CD}. لكن يمكن تبسيط الحل والحصول على حل مباشر لكل معادلة وذلك باختيار محورين إحداثيين يكون أحدهما عمودياً على أحد القضيبين. فمثلاً إذا اخترنا المحورين

الإحداثيين x' و y' بحيث يكون المحور y' عمودياً على القوة F_{CD} وكتبنا معادلة توازن القوى على المحور y' نحصل على قيمة F_{CB} مباشرة من هذه المعادلة.



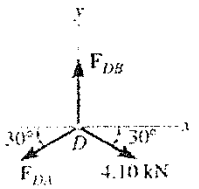
$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0: \quad 1.5\cos 30° - F_{CB}\sin 15° = 0$$
$$F_{CB} = 5.02\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

وبشكل مشابه نختار المحورين الإحداثيين x'' و y'' بحيث يكون المحور y'' عمودياً على القوة F_{CB}. نكتب معادلة توازن القوى على المحور y'' فنحصل على قيمة F_{CD} مباشرة من هذه المعادلة.



$$+\nearrow \Sigma F_{y''} = 0: \quad 1.5\cos 45° - F_{CD}\sin 15° = 0$$
$$F_{CD} = 4.10\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

نتابع حل المسألة بدراسة توازن العقدة D.

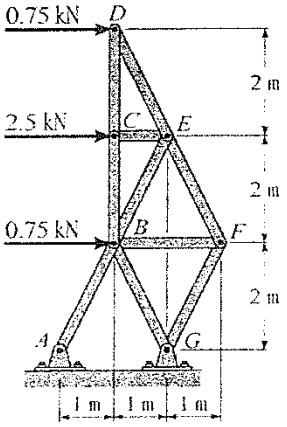


$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -F_{DA}\cos 30° + 4.10\cos 30° = 0$$
$$F_{DA} = 4.10\ \text{kN} \quad (\text{T})$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{DB}\sin 30° - 2(4.10\sin 30°) = 0$$
$$F_{DB} = 4.10\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

يمكن حساب القوة الأخيرة في القضيب F_{BA} من دراسة توازن العقدة B أو العقدة A، ويمكن للطالب أن يقوم بحساب هذه القوة، وسوف يجد أن $F_{BA} = 0.776\ \text{kN}\ (\text{C})$.

مثال 6-4

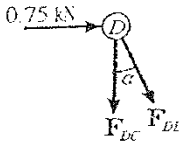
احسب القوى المؤثرة على كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



الحل:

نلاحظ أن عدد القوى المجهولة المؤثرة على العقدة D اثنتان فقط، لذلك يمكن البدء بتحليل هذا الجائز الشبكي فوراً بدءاً من هذه العقدة بدون حساب ردود الأفعال.

نرسم مخطط الجسم الحر للعقدة D وندرس توازنها.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6°$$

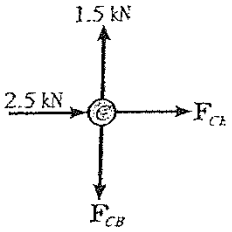
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 0.75 + F_{DE}\sin\alpha = 0$$

$$F_{DE} = -1.68\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -F_{DE}\cos\alpha - F_{DC} = 0$$

$$F_{DC} = 1.5\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

بعد دراسة العقدة D ندرس توازن العقدة C.



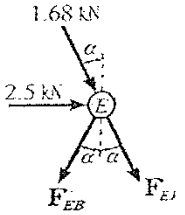
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 2.5 + F_{CE} = 0$$

$$F_{CE} = -2.5\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 1.5 - F_{CB} = 0$$

$$F_{CB} = 1.5\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

ندرس بعد ذلك توازن العقدة E.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$2.5 + 1.68\sin\alpha - F_{EB}\sin\alpha + F_{EF}\sin\alpha = 0$$

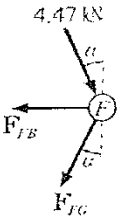
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$-1.68\cos\alpha - F_{EB}\cos\alpha - F_{EF}\cos\alpha = 0$$

$$F_{EB} = 2.8\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

$$F_{EF} = -4.47\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

ندرس الآن توازن العقدة F.



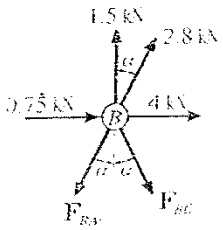
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -4.47\cos\alpha - F_{FG}\cos\alpha = 0$$

$$F_{FG} = -4.47\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 4.47\sin\alpha - F_{FB} - F_{FG}\sin\alpha = 0$$

$$F_{FB} = 4\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

وأخيراً ندرس توازن العقدة B.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$0.75 + 2.8\sin\alpha + 4 + F_{BG}\sin\alpha - F_{BA}\sin\alpha = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$1.5 + 2.8\cos\alpha - F_{BG}\cos\alpha - F_{BA}\cos\alpha = 0$$

$$F_{BG} = -4.47\ \text{kN} \quad (\text{C})$$

$$F_{BA} = 8.94\ \text{kN} \quad (\text{T})$$

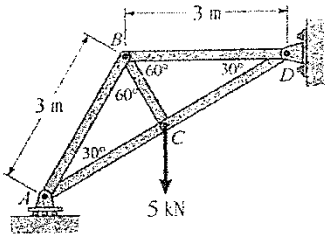
مسائل غير محلولة

مسألة 6-1

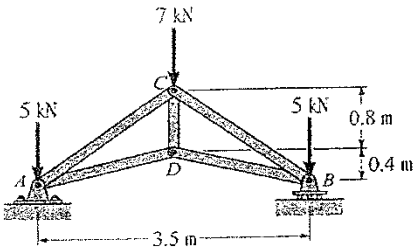
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-2

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-1)



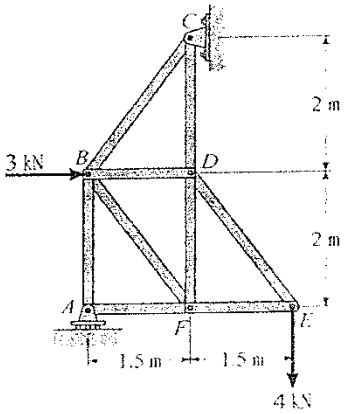
شكل المسألة (6-2)

مسألة 6-3

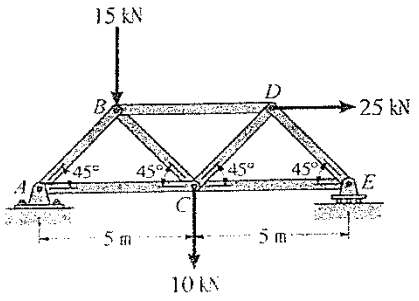
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-4

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-3)



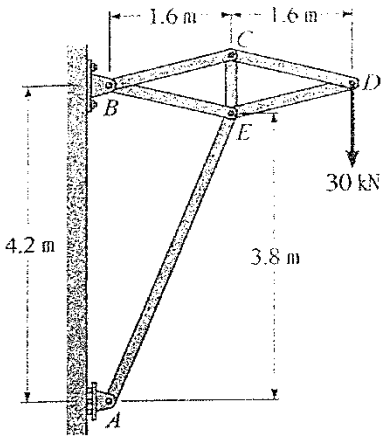
شكل المسألة (6-4)

مسألة 6-5

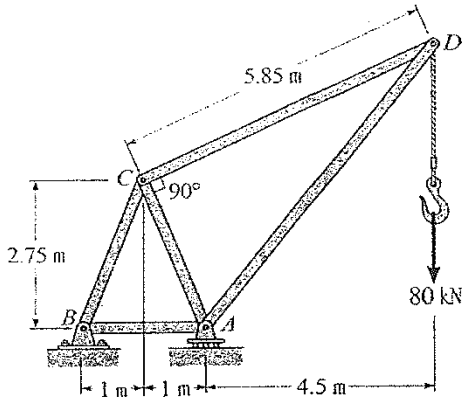
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-6

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-6)



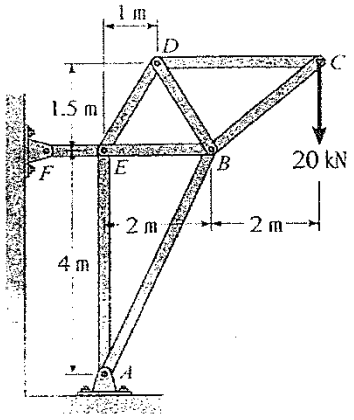
شكل المسألة (6-5)

مسألة 6-7

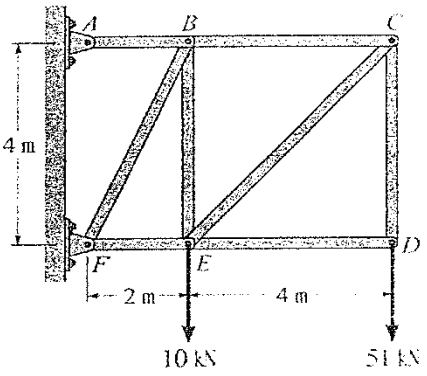
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-8

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-7)



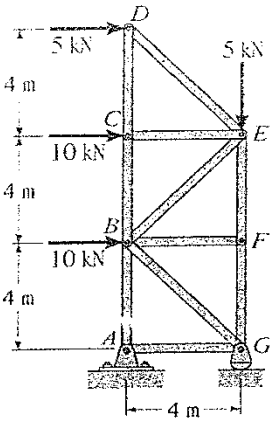
شكل المسألة (6-8)

مسألة 6-9

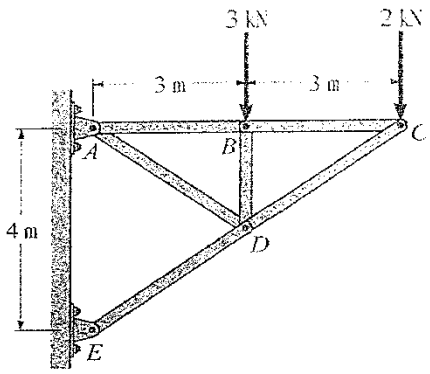
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-10

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



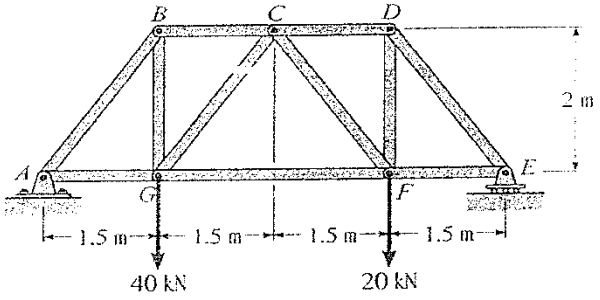
شكل المسألة (6-10)



شكل المسألة (6-9)

مسألة 6-11

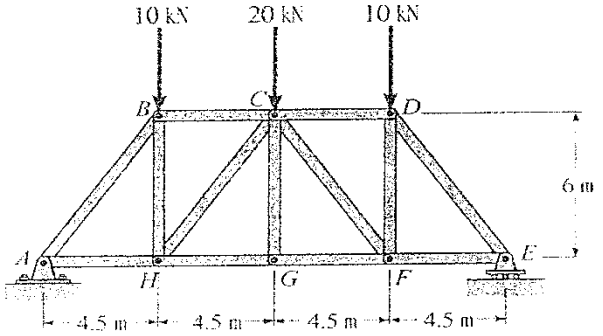
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-11)

مسألة 6-12

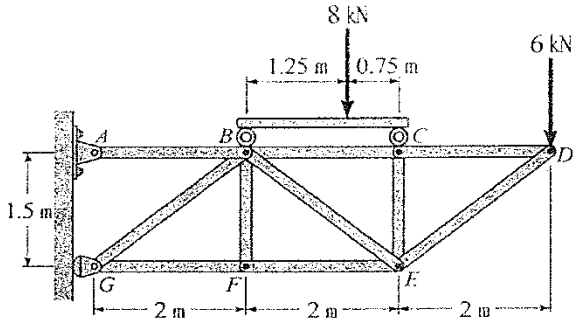
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-12)

مسألة 13-6

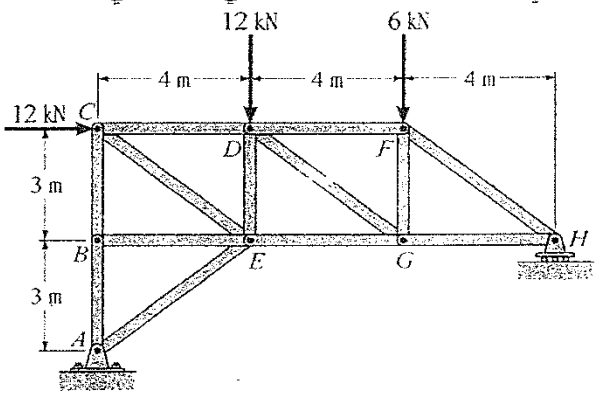
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (13-6)

مسألة 14-6

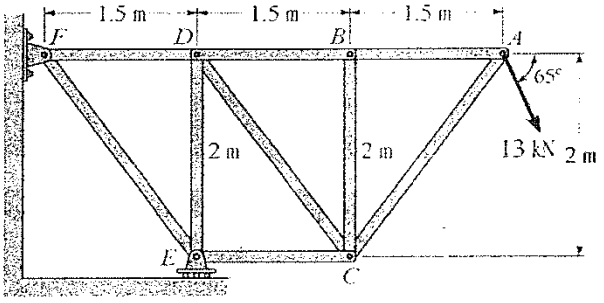
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (14-6)

مسألة 15-6

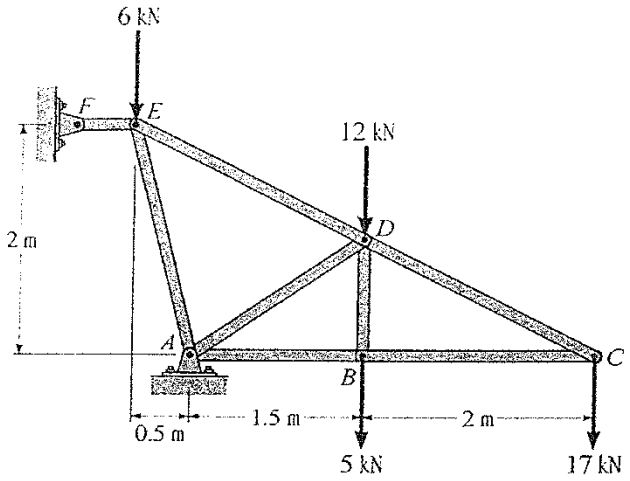
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (15-6)

مسألة 6-16

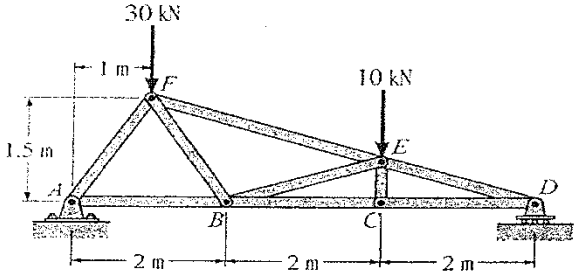
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-16)

مسألة 6-17

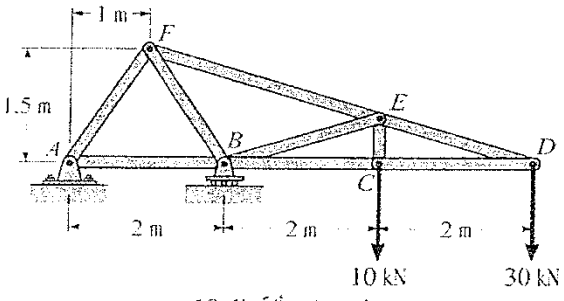
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-17)

مسألة 6-18

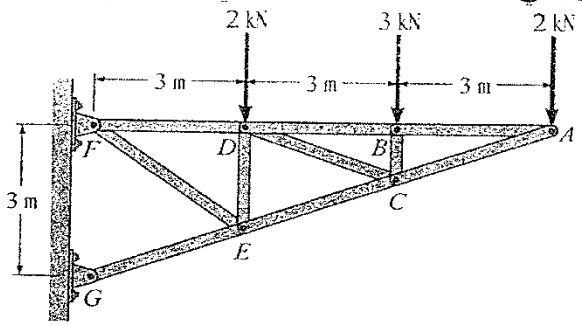
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-18)

مسألة 6-19

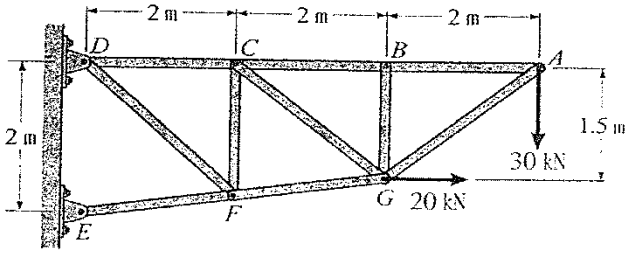
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-19)

مسألة 6-20

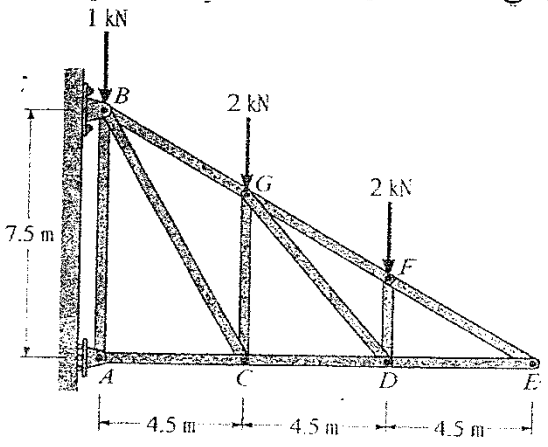
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-20)

مسألة 6-21

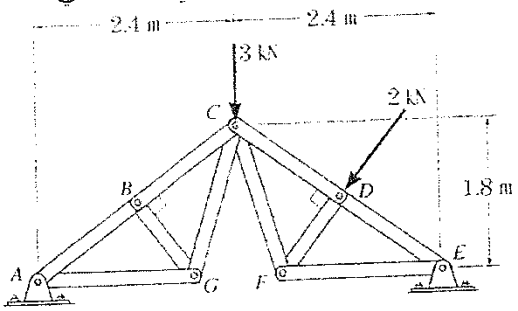
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-21)

مسألة 22-6

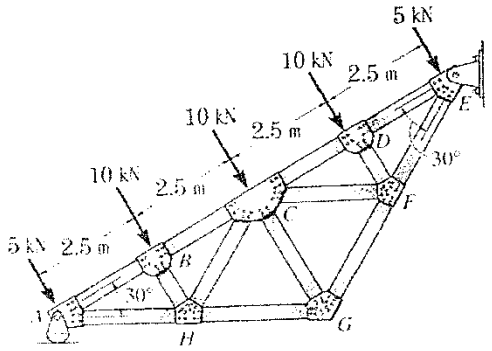
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (22-6)

مسألة 23-6

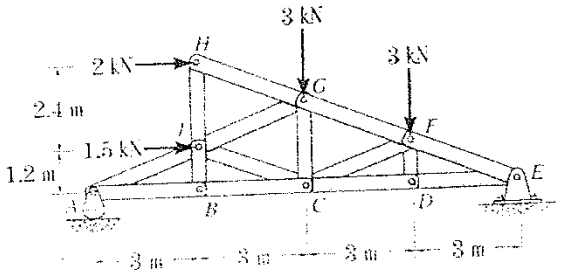
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (23-6)

مسألة 24-6

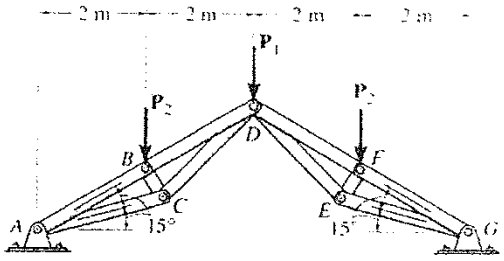
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (24-6)

مسألة 6-25

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



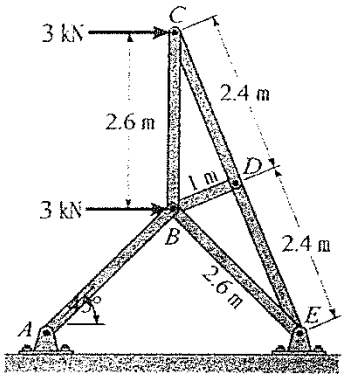
شكل المسألة (6-25)

مسألة 6-26

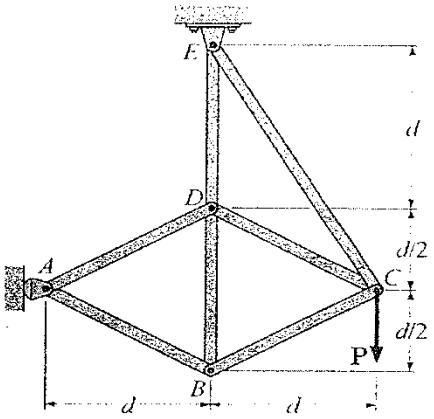
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-27

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-27)



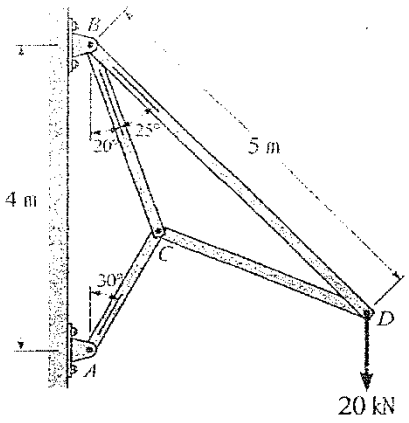
شكل المسألة (6-26)

مسألة 6-28

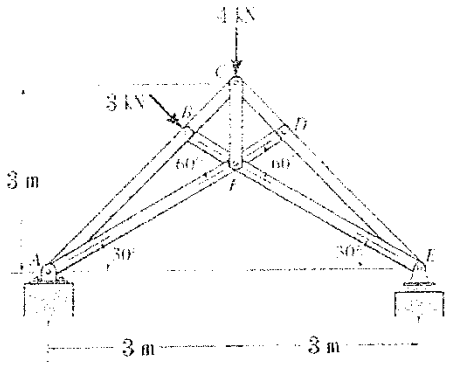
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-29

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-28)



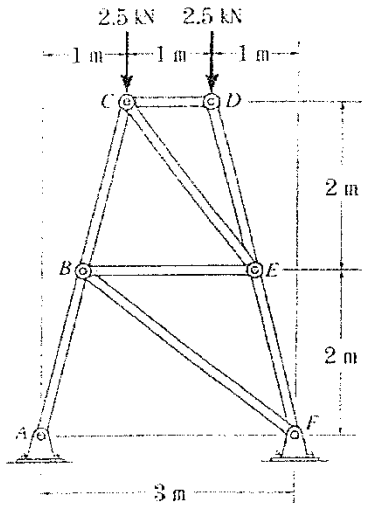
شكل المسألة (6-29)

مسألة 6-30

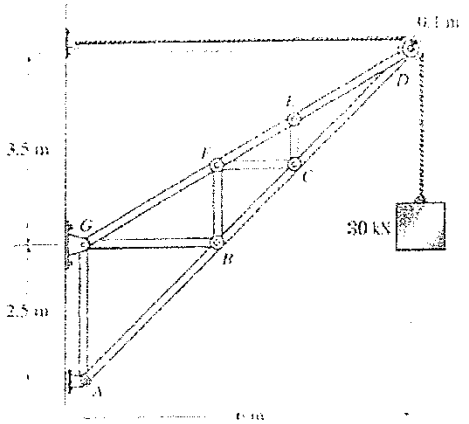
احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 6-31

احسب القوى في كافة قضبان الجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-30)



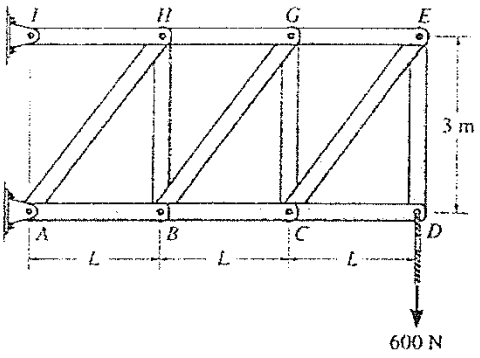
شكل المسألة (6-31)

مسألة 6-32

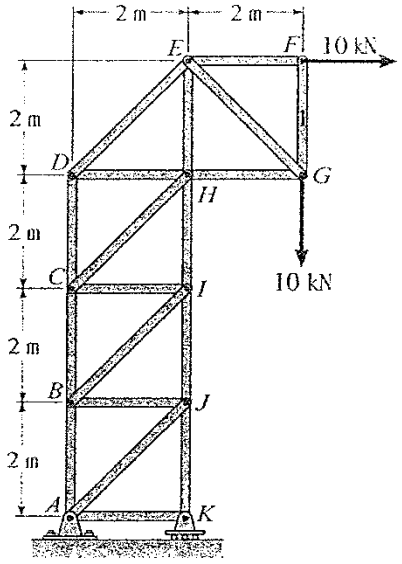
احسب القوى في القضبان CD، CH، HI، CI، للجائز الشبكي المبين في الشكل.

مسألة 33-6

احسب القوى في القضبان BC، BG، HG، بدلالة الطول L للجائز الشبكي المبين في الشكل.



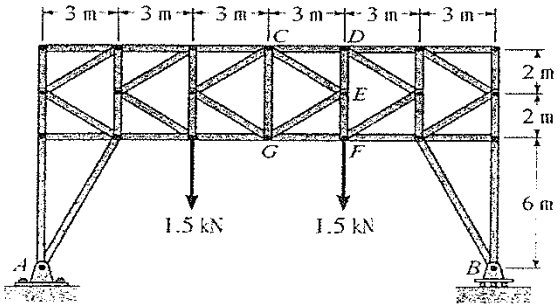
شكل المسألة (33-6)



شكل المسألة (32-6)

مسألة 34-6

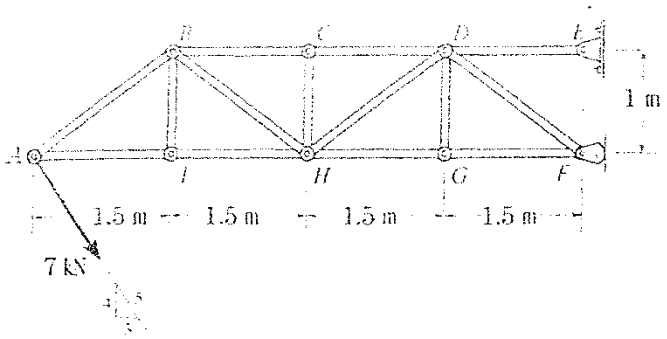
احسب القوى في القضبان CD، CE، GE، GF، للجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (34-6)

مسألة 35-6

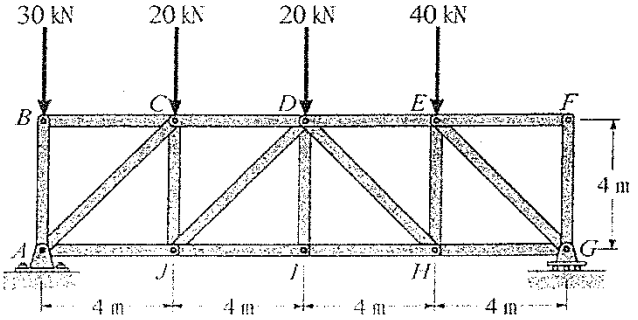
احسب القوى في القضبان DE، DF، GF، للجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-35)

مسألة 6-36

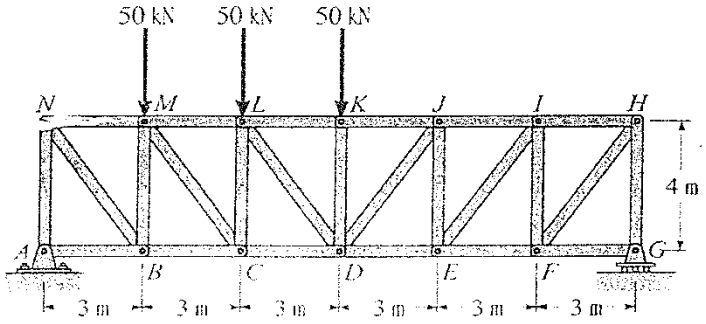
احسب القوى في القضبان DE، EH، HG، للجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-36)

مسألة 6-37

احسب القوى في القضبان JI، JE، DE، للجائز الشبكي المبين في الشكل.



شكل المسألة (6-37)

مسألة 6-38

احسب القوى في القضبان BC، CG، GF، للجائز الشبكي المبين في الشكل.

الفصل السابع

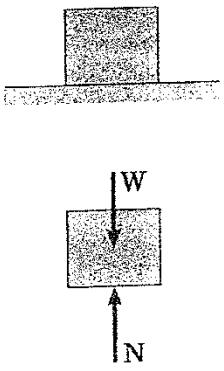
الاحتكاك

Friction

7-1 مقدمة

عندما ينزلق جسم على آخر تتولد قوى داخلية عند سطوح التماس تقاوم حركة الجسمين بالنسبة لبعضهما بعضاً كما تتولد هذه القوى عندما يكون هناك قابلية لحدوث حركة نسبية بين جسمين متماسين حتى ولو لم تحدث تلك الحركة وتعرف القوى المقاومة للحركة بقوى الاحتكاك وتكون دائماً واقعة في سطوح التماس بين الجسمين.

كنا دائماً في دراستنا للتوازن حتى الآن نعتبر سطوح التماس بين الأجسام سواء كانت نقاط ارتكاز أو مفاصل أو سطوحاً مشتركة سطوحاً ملساء ويتضمن هذا الفرض إهمال قوى الاحتكاك. إن هذا الفرض نظري بحت نظراً لأن قوى الاحتكاك موجودة حتى في أكثر السطوح نعومة ولكن يمكن في بعض الحالات إهمال هذه القوى إذا كانت قيمتها صغيرة نسبياً إذا ما قورنت ببقية القوى المؤثرة على الجسم أما في الحالات التي لا تكون فيها هذه القوى مهملة فإن دراسة التوازن بدونها تكون ناقصة. كما أن قوى الاحتكاك لا تكون دائماً موجودة حتى في حالة السطوح الخشنة فهذه القوى تعتبر تحريضية ولا تظهر إلا إذا توفرت لها بعض الشروط وهي إما وجود حركة نسبية بين الجسمين أو وجود احتمال لهذه الحركة. وقوى الاحتكاك كما ذكرنا أيضاً هي قوى داخلية تتولد بين السطوح المتلامسة كفعل ورد فعل تضاف إلى الفعل ورد الفعل الناظميين على سطح التماس وتشكل القوى الناظمية والمماسية الفعل ورد الفعل الإجمالي وسنبين فيما يلي كيفية تولد قوى الاحتكاك وحالات وجود هذه القوى.



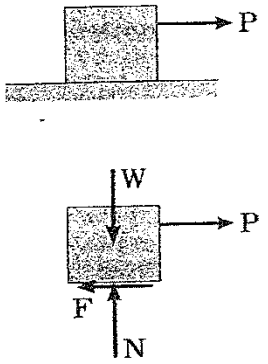
شكل (7-1)

لنعتبر جسماً وزنه W ويستند على سطح خشن كما هو مبين في الشكل (7-1). يتزن هذا الجسم تحت تأثير وزنه W وهو قوة شاقولية للأسفل ورد فعل من السطح وهو قوة

شاقولية للأعلى **N**.

يتطلب توازن الجسم أن يكون رد الفعل **N** مساوياً ومعاكساً للقوة الفعالة **W** ولهما نفس الحامل أي خط عمل واحد. في هذه الحالة لا توجد قوى فعالة أفقية تستدعي وجود رد فعل أفقي فبالرغم من أن سطوح التماس خشنة إلا أن قوى الاحتكاك معدومة لعدم توفر الشروط التحريضية اللازمة لتولدها.

إذا أثرنا الآن على الجسم بقوة أفقية **P** صغيرة نسبياً نلاحظ أن الجسم يحافظ على سكونه أي على حالته الحركية وهذا يتطلب حسب قانون نيوتن الأول انعدام جملة القوى الخارجية المؤثرة عليه وبما أن القوتين **W** و **N** متساويتان ومتعاكستان مباشرة فإن محصلتهما معدومة وتكون جملة القوى مكافئة للقوة **P** وهي غير معدومة فرضاً. لذلك لا بد من وجود قوة رابعة أفقية تساوي وتعاكس القوة **P** كي تصبح الجملة المؤلفة من **P** و **W** و **N** والقوة الرابعة مكافئة للصفر. هذه القوة التي تعاكس **P** هي قوة الاحتكاك **F** بين السطحين (شكل 7-2). إذا زدنا القوة **P** قليلاً نلاحظ أن الجسم يبقى ساكناً مما يدل على أن القوة **F** أيضاً زادت نتيجة لزيادة القوة **P** بالقدر اللازم للمحافظة على التوازن. لذلك يمكن تعريف قوى الاحتكاك بأنها القوى الأصغرية اللازمة لحفظ التوازن وتزداد وتنقص هذه القوى طبقاً للشروط التحريضية التي تعمل على تحريك الجسم أو على تغيير حالته الحركية.



شكل (2-7)

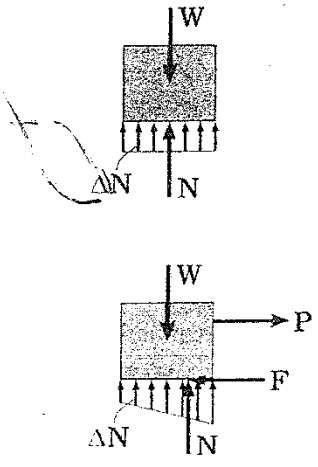
تبين التجربة أن استمرار زيادة القوة **P** سيؤدي في النهاية إلى تحريك الجسم وبالتالي إلى تغيير حالته الحركية وهذا يتطلب وجود قوة خارجية مؤثرة على الجسم غير معدومة. في الواقع إن قوة الاحتكاك **F** تشرع في الزيادة من الصفر عندما تكون قيمة القوة **P** مساوية للصفر ولكن توجد قيمة أعظمية (حدية) لقوة الاحتكاك **F** لا تستطيع تجاوزها. تدعى هذه القوة بقوة الاحتكاك الأعظمية أو الحرجة ونرمز لها F_{max} أو F_c ويكون توازن الجسم عندما تصبح قوة الاحتكاك مساوية للقيمة الحرجة توازناً حرجاً أو حدياً.

في المثال السابق كان الجسم ساكناً بالنسبة للسطح الخشن ومع ذلك وجدت قوى احتكاك بينهما وعندما يكون الجسم متحركاً بالنسبة للسطح الخشن فإن التجربة تدل أيضاً على وجود قوة احتكاك بين الجسمين تكون معاكسة دائماً لاتجاه الحركة. تدعى قوى الاحتكاك في حالة السكون بقوى الاحتكاك الستاتيكي (الساكن) بينما تدعى قوى الاحتكاك في حالة الحركة بقوى الاحتكاك الحركي F_k وتكون قوى الاحتكاك الحركي بصورة عامة أصغر قليلاً من قوى الاحتكاك الستاتيكي.

لقد ذكرنا أن قوة الاحتكاك تكون دائماً مقاومة للحركة أو لاتجاه الحركة المحتمل لذلك فإن تعيين اتجاه قوى الاحتكاك هام جداً في دراسة التوازن وبما أن قوى الاحتكاك هي قوى داخلية لذلك لا تظهر هذه القوى إلا عند فصل الأجسام المتماسة عن بعضها بعضاً كما هو الأمر في حالة توازن الأجسام المركبة. فقوى الفعل ورد الفعل في تلك الحالة تعتبر قوى داخلية ولا تظهر إلا عند فصل الأجسام المرتبطة مع بعضها كما بينا في بحث توازن الجسم الصلب.

بالعودة للشكل (7-2) نرى أن الجسم يشرع في الحركة إلى اليمين بفعل القوة **P** لذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك **F** المؤثرة عليه متجهة نحو اليسار.

أما السطح فإن الجسم يحاول تحريكه معه إلى اليمين بفعل الاحتكاك لذلك يجب أن يكون اتجاه قوة الاحتكاك عليه إلى اليمين وعند إعادة التماس بين الجسم والسطح فإن قوتي الاحتكاك بينهما تتلاشيان لأنهما متساويتان بالقيمة ومتعاكستان بالاتجاه.

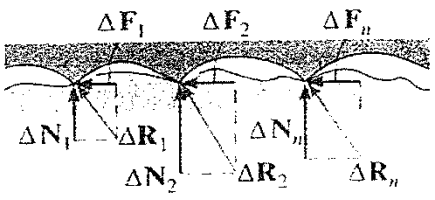


شكل (7-3)

على أن توازن الجسم يتطلب أيضاً انعدام مجموع عزوم القوى المؤثرة عليه إضافة إلى انعدام محصلة هذه القوى. ونرى من الشكل (7-2) أن القوة **P** وقوة الاحتكاك **F** تشكلان مزدوجة تحاول قلب الجسم نحو اليمين ولا يوجد أي عزم مقاوم لها يعدمها لذلك فإن التوازن غير محقق ويجب أن ينقلب الجسم على حرفه الأيمن ومع ذلك فإن التجربة والمشاهدة تدلان على توازن الجسم مما يؤكد وجود عزم مقاوم للانقلاب.

إن رد الفعل N ليس في الواقع سوى محصلة ردود فعل صغيرة ΔN موزعة عند سطح التماس بين الجسمين. يؤدي تأثير القوة P على الجسم إلى زيادة ضغط الجسم في قسمه الأيمن على سطح التماس وانقاص هذا الضغط عند القسم الأيسر (باعتبار أن P متجهة إلى اليمين) ولذلك فإن رد الفعل N حين وجود القوة P سيقترب من طرف الجسم الأيمن ويبتعد عن طرفه الأيسر كما هو مبين في الشكل (7-3). والمزدوجة الناتجة عن القوتين W و N تسعى لمعاكسة المزدوجة الأولى محافظة على توازن الجسم.

إن المعلومات الحالية عن طبيعة الاحتكاك تعتمد بصورة رئيسية على التجارب العملية وقد دلت هذه التجارب على أن أقل تغيير في طبيعة السطوح المتماسة يؤثر على قوى الاحتكاك كما وأن تلك القوى تعتمد على نوعية وطبيعة السطوح المتماسة. لقد نشرت عدة فرضيات لتفسير ظاهرة الاحتكاك بين الأجسام المتلامسة ولعل أكثر هذه الفرضيات قبولاً هي التالية:



شكل (7-4)

إذا صقلنا سطحي جسمين بشكل جيد وبأدق الآلات حتى أصبحا كسطح المرآة المصقولة حين النظر إليهما بالعين المجردة وحين وضع هذين السطحين تحت المجهر فإن المشاهدة تبين خشونة كل منهما وتواجد النتوءات والأخاديد عليهما كما هو مبين في الشكل (7-4) وتكون أبعاد هذه النتوءات والأخاديد في هذه الحالة من رتبة أبعاد جزيئات المادة وعند وضع الجسمين على بعضهما بعضاً تتداخل بعض نتوءات الجسمين بالأخاديد ويقاوم هذا التداخل الحركة النسبية بين الجسمين حين نؤثر على أحدهما بالقوة P. كما أن الشروع في الحركة حين وصول قوة الاحتكاك لقيمتها العظمى يفسر بانفكاك التداخل السابق أو بتكسر النتوءات في حالة الأجسام الصلبة.

حين يكون التلامس بين الجسمين مباشراً بدون أية مادة بينهما يدعى الاحتكاك حينئذ بالاحتكاك الجاف ولكن إذا وضعنا بين الجسمين مادة زيتية لاحظنا نقصاً ظاهراً بقيمة قوى الاحتكاك يدعى الاحتكاك في هذه الحالة بالاحتكاك الرطب أو المزيت. في

الواقع يؤدي وجود المواد الزيتية بين السطحين إلى إبعادهما عن بعضهما البعض وحين يتحرك أحدهما بالنسبة للآخر يحدث انزلاق لطبقات الزيت على بعضها بعضاً ودراسة هذ النوع من الاحتكاك يعود لعلم ميكانيك الموائع وسيقابله الطالب في السنوات المتقدمة من دراسته ولذلك سوف نكتفي بدراسة الاحتكاك الجاف.

2-7 قانون كولومب في الاحتكاك الجاف

إن قوانين الاحتكاك الجاف تعود بقدمها إلى القرن الثامن عشر حينما نشر العالم كولومب (Coulomb) نتائجه التجريبية عن الاحتكاك بين السطوح الجافة ويمكن تلخيص أهم القوانين السائدة بما يلي:

- تتناسب قوة الاحتكاك **F** بين سطحين مباشرة مع القوة الناظمية **N** بينهما:

$$F \sim N$$

والعلاقة بينهما هي علاقة خطية.

يمكن استبدال التناسب في العلاقة السابقة بمساواة بعد إدخال ثابت للتناسب ويدعى ثابت التناسب بأمثال أو عامل الاحتكاك الستاتيكي ونرمز له بالرمز μ_s.

$$F = \mu_s N$$

لقد ذكرنا في المقدمة أن قوة الاحتكاك تتولد فقط حين تدعو الحاجة إلى وجودها وتزداد قيمتها من الصفر إلى قيمة أعظيمة وهي بالتعريف أكبر قيمة يمكن لقوة الاحتكاك أن تصلها وهذه القيمة هي المعرفة بالعلاقة أعلاه لذلك فإن التعبير الأفضل لهذه العلاقة هو:

$$F \leq \mu_s N$$

$$F_{\max} = \mu_s N \qquad (7\text{-}1)$$

إن قيمة القوة الناظمية N تعتمد على القوى الفعالة ولا علاقة لها بطبيعة السطوح المتماسة.

لا تعتمد قوة الاحتكاك الأعظمية (الحرجة) بين سطحين متماسين على مساحة سطح التماس بل تعتمد فقط على عامل الاحتكاك μ_s ورد الفعل الناظمي N.

إن قيمة قوة الاحتكاك الستاتيكي الأعظمية F_s تكون عادة أكبر بقليل من قيمة قوة الاحتكاك الحركي F_k .

يبين الشكل (7-5) مخططاً بيانياً لتغير قوة الاحتكاك F كتابع للقوة المحرضة P. عندما تكون $P=0$ لا يكون للكتلة أي مجال للحركة وبالتالي فإن $F = 0$ وتمثل هذه الحالة على المخطط البياني بالنقطة O.

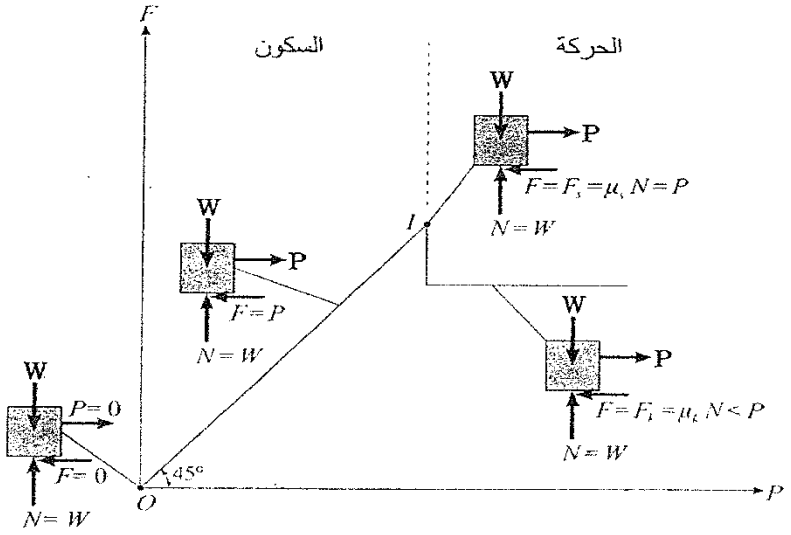
عند زيادة القوة P قليلاً بحيث لا تكون قادرة على تحريك الكتلة تنشأ قوة احتكاك تساوي القوة P بالقيمة وتعاكسها بالاتجاه وتمثل هذه الحالة على المخطط البياني بأية نقطة على المستقيم OI وتحدد النقطة I حسب قيمة القوة P.

إذا زادت القوة **P** بحيث تصبح الكتلة على وشك الحركة تكون قوة الاحتكاك F قد وصلت إلى قيمتها العظمى F_{max} وتمثل هذه الحالة على المخطط البياني بالنقطة I. من الضروري التأكيد على أنه في هذه اللحظة فقط أي عندما يصبح الجسم على وشك الحركة فإن قوة الاحتكاك تعطى بالعلاقة $F_s = \mu_s N$.

في حال ازدادت القوة أكثر بعد وصول قوة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى فإن الكتلة تبدأ بالحركة نحو اليمين وتعطى قوة الاحتكاك بالعلاقة

$$F = \mu_k N \qquad (7\text{-}2)$$

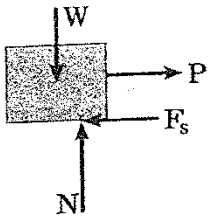
حيث μ_k هو عامل الاحتكاك الحركي.

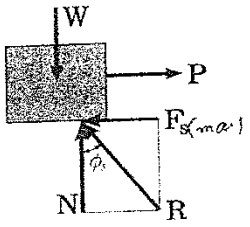


شكل (7-5)

نلاحظ من المخطط البياني أن قوة الاحتكاك في حالة الحركة F_k هي أصغر من قوة الاحتكاك الأعظمية في حالة السكون F_s وهذا ناتج عن أن عامل الاحتكاك الحركي μ_k يكون أصغر من عامل الاحتكاك الستاتيكي μ_s.

3-7 زاوية الاحتكاك





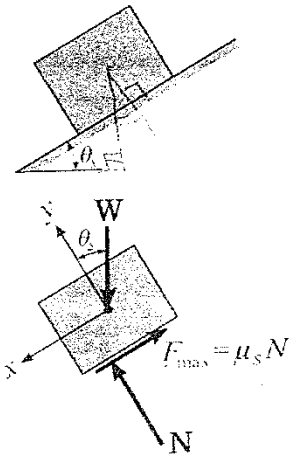
شكل (7-6)

رأينا أنه عندما يكون الجسم في حالة سكون فإن قوة الاحتكاك F لا تساوي بالضرورة الجداء $\mu_s P$ وإنما تحقق الشرط $F_s \le \mu_s N$ وفقط عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق تصل القوة إلى قيمتها الأعظمية $F_s = F_{\max} = \mu_s N$.

يبين الشكل (7-6) مخطط الجسم الحر لجسم وزنه **W** **على وشك الانزلاق** بتأثير قوة أفقية **P**. يتألف رد فعل السطح الخشن على الجسم من القوة الناظمية **N** وقوة الاحتكاك F_s. تشكل هاتان القوتان المحصلة **R** التي تميل بزاوية ϕ_s عن رد الفعل الناظمي **N** وتسمى هذه الزاوية بزاوية الاحتكاك الستاتيكي وتحسب كما يلي:

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{F_{\max}}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1}(\mu_s) \qquad (7\text{-}3)$$

4-7 زاوية الاستقرار



شكل (7-7)

تعتبر طريقة المستوي المائل أكثر الطرق شيوعاً في تعيين عامل الاحتكاك إذ يوضع جسم وزنه **W** على مستوي خشن يميل بزاوية صغيرة عن الأفق نزيد زاوية ميل المستوي تدريجياً إلى أن تصل إلى القيمة التي يفشل عندها توازن الجسم ويبدأ بالانزلاق على المستوي المائل. تسمى هذه الزاوية بزاوية الاستقرار θ_s وتكون عندها قوة الاحتكاك **F** قد وصلت إلى قيمتها العظمى $F_{\max}$ كما هو مبين في الشكل (7-7).

عندما تكون زاوية المستوي المائل مساوية إلى الصفر يكون رد الفعل **N** العمودي على السطح مساوياً لوزن الجسم **W** أما عند زيادة الزاوية يصبح وزن الجسم **W** مائلاً عن المستوي ويمكن تحليله إلى مركبتين:

$W \cos\theta_s$ عمودية على المستوي

$W \sin\theta_s$ مماسية للمستوي

تضغط المركبة $W \cos\theta_s$ على المستوي المائل مما يؤدي إلى وجود رد فعل **N** مساو ومعاكس لها بينما تسعى المركبة $W \sin\theta_s$ إلى زلق الجسم على المستوي وهذا يؤدي إلى نشوء قوة احتكاك **F** التي تكون قد وصلت إلى قيمتها العظمى $F_{max} = \mu_s N$ عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق كما ذكرنا أعلاه.

من مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل (7-7) وبتطبيق معادلات التوازن:

$$\nwarrow^{+} \Sigma F_y = 0: \quad N - W\cos\theta_s = 0$$

$$N = W\cos\theta_s$$

$$\swarrow^{+} \Sigma F_x = 0: \quad W\sin\theta_s - \mu_s N = 0$$

بتعويض قيمة **N** من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية:

$$W\sin\theta_s - \mu_s W\cos\theta_s = 0$$

$$\mu_s = \tan^{\circ}(\theta_s) \qquad (7\text{-}4)$$

نلاحظ أن زاوية الاستقرار θ_s تساوي زاوية الاحتكاك الاستاتيكي ϕ_s كما نلاحظ أن حساب عامل الاحتكاك الستاتيكي μ_s لا يعتمد بالضرورة على وزن الجسم وبالتالي ليس من الضروري معرفة وزن الجسم عند إجراء التجربة.

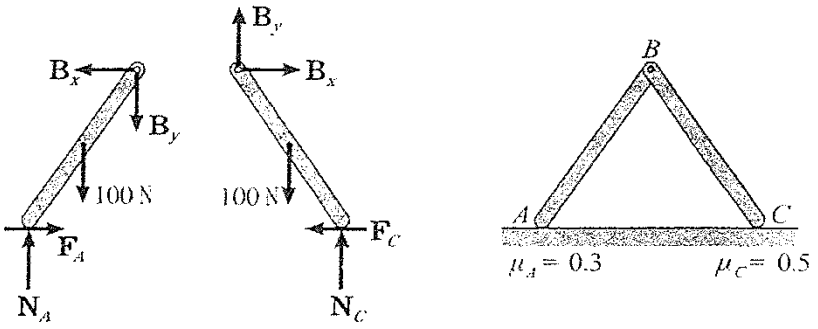
بقياس قيمة الزاوية θ_s عند انزلاق الجسم يمكن تعيين عامل الاحتكاك وقد تم إيجاد قيم عامل الاحتكاك تجريبياً للعديد من المواد بطريقة المستوي المائل إذ تصنع سطوح المستوي المائل والجسم المنزلق من المواد المطلوب تعيين عامل الاحتكاك لها.

5-7 أنواع مسائل الاحتكاك الجاف

تصنف المسائل التي تعالج الاحتكاك الجاف إلى ثلاثة أنواع:

- التوازن

إن هذا النوع من المسائل هو عبارة عن مسائل توازن عدد المجاهيل فيها يساوي عدد معادلات التوازن الممكنكتابتها ويتم حساب قيمة قوة الاحتكاك المتولدة بحيث تتحقق المتراجحة $F \le \mu_s N$ وإلا فالجسم سوف ينزلق ولا يعود التوازن ممكناً. يمكن شرح هذا النوع من المسائل اعتماداً على الشكل (7-8 أ) الذي يبين إطاراً مؤلفاً من قضيبين متمفصلين مع بعضهما. يجب هنا حساب قوتي الاحتكاك في النقطتين A و C لكي يبقى القضيبان متوازنين. بفرض أن القضيبين متجانسان ووزن كل منهما يساوي 100 N فإنه من مخطط الجسم الحر لهما (شكل 7-8 ب) نرى أنه لدينا ست مركبات للقوى المجهولة التي يمكن حسابها من معادلات التوازن الست (ثلاث معادلات لكل قضيب). بحساب قيم القوى N_A ، F_A ، N_C ، F_C ، فإن القضيبين يبقيان في حالة توازن عندما يتحقق الشرطان $F_A \le 0.3N_A$ و $F_C \le 0.5N_C$.

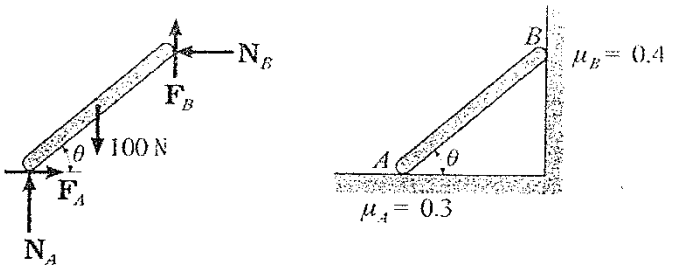


(ب) (أ)

شكل (7-8)

- **إمكانية الحركة في كافة النقاط**

إن عدد المجاهيل الكلي في هذه الحالة يساوي عدد معادلات التوازن بالإضافة إلى عدد معادلات الاحتكاك $F = \mu N$ الممكن كتابتها. لنعتبر المسألة الموضحة بالشكل (7-9 أ) حيث إن المطلوب حساب أصغر قيمة للزاوية θ يبقى عندها القضيب الذي يزن 100 N في حالة توازن ولا ينزلق. من مخطط الجسم الحر المبين في الشكل (7-9 ب) نلاحظ أنه يوجد خمسة مجاهيل: N_A ، F_A ، N_B ، F_B ، θ، ولدينا ثلاث معادلات توازن ومعادلتا احتكاك يمكن تطبيقهما في نقطتي التماس $F_A = 0.3N_A$ و $F_B = 0.4N_B$.



(ب) (أ)

شكل (7-9)

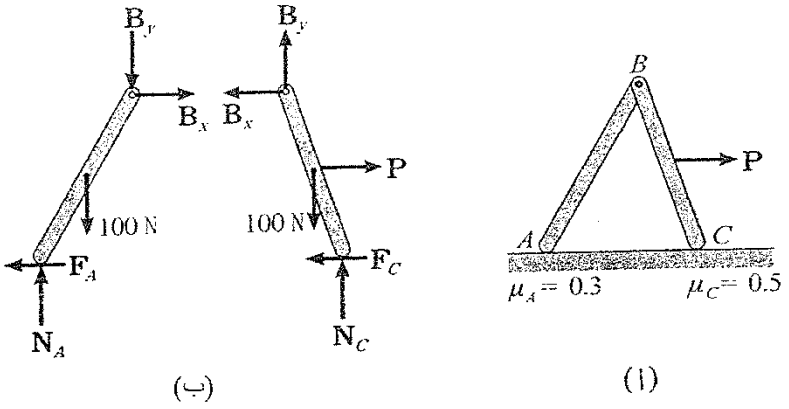
- **إمكانية الحركة في بعض نقاط التماس أو إمكانية الانقلاب**

إن عدد المجاهيل الكلي هنا يكون أقل من عدد معادلات التوازن مع معادلات الاحتكاك الممكن كتابتها. يوجد في هذه المسألة إمكانيات متعددة للحركة والمسألة تؤول إلى تحديد نوع الحركة الممكن حدوثها.

ليكن لدينا الإطار المؤلف من قضيبين مرتبطين مع بعضهما مفصلياً والمبين في الشكل (7-10). المطلوب حساب قيمة القوة P التي تجعل الإطار يتحرك إذا كان وزن كل من القضيبين يساوي 100 N. من مخطط الجسم الحر لكل قضيب (شكل 9-10 أ) نلاحظ أنه يوجد سبعة مجاهيل: N_A، F_A، N_C، F_C، B_x، B_y، P، ولدينا ست معادلات توازن (ثلاث معادلات لكل قضيب) وإمكانية واحدة لتطبيق معادلة الاحتكاك. هذا يعني أنه عندما تزداد قيمة القوة P سيؤدي ذلك إلى إحدى حالتين: إما أن يحصل الانزلاق عند A ولا يحصل عند C أي $F_A = 0.3N_A$ و $F_C \le 0.5N_C$ أو أن الانزلاق سيحصل عند C ولا يحصل عند A أي $F_C = 0.5N_C$ و $F_A \le 0.3N_A$. لذلك يجب في هذه المسألة حساب قيمة القوة P في كل حالة واختيار الحالة التي تكون فيها قيمة القوة P أصغر. إذا أدت نتيجة الحساب إلى تساوي قيمة القوة P في الحالتين (وهذه حالة نادرة جداً) فإن الانزلاق سيحصل عند النقطتين A و C في آن واحد والمجاهيل السبعة تحقق ثماني معادلات.

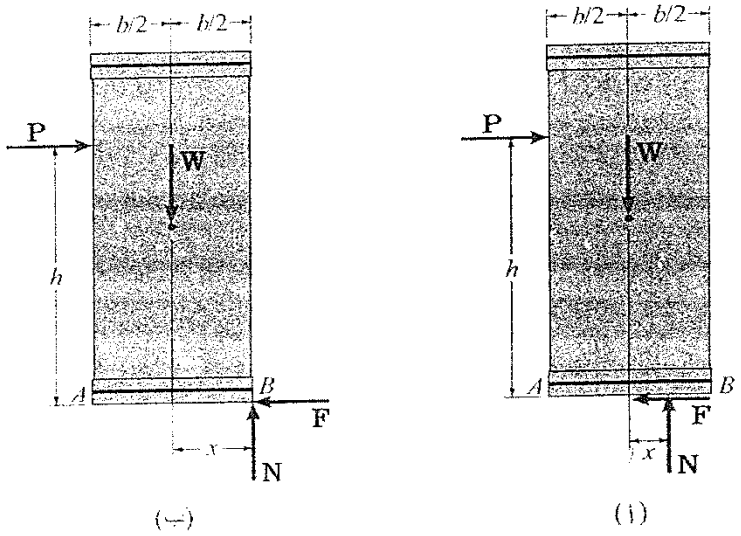
يمكن أن نصادف نوعاً آخر من أنواع الحركة وهو الانقلاب. لنعتبر جسماً على شكل متوازي مستطيلات مثلاً وزنه W يستند على مستوي أفقي خشن يؤثر الجسم على

المستوي الخشن بقوة شاقولية تساوي W ويرد الجسم برد فعل شاقولي يساوي N حيث $N = W$ وللقوتان خط عمل واحد يمر من مركز ثقل الجسم.



شكل (7-10)

لنؤثر الآن على متوازي المستطيلات بقوة أفقية **P** صغيرة نسبياً ولتكن متجهة نحو اليمين كما هو مبين في الشكل (7-8 أ). نلاحظ أن الجسم يبقى ساكناً. ولقد ذكرنا مسبقاً أن قوة الاحتكاك **F** المتولدة عند سطح التماس تساوي وتعاكس القوة **P** وتبقى جملة القوى المؤثرة على الجسم مكافئة للصفر.



شكل (7-11)

في الواقع تكون جملة قوى مكافئة للصفر إذا انعدم عزمها المحصل إضافة إلى انعدام محصلتها العامة وعندما تكون **N** معاكسة مباشرة للوزن **W** فإن لجملة القوى

الأربع المؤثرة على الجسم عزماً دورانياً ناتجاً عن المزدوجة المؤلفة من القوتين P و F ذراعها h وقيمة هذا العزم $P\cdot h$ ويسعى هذا العزم لإخلال توازن الجسم وتدويره حول الحرف B محاولاً قلبه.

وكما ذكرنا سابقاً يؤدي تأثير القوة **P** على الجسم إلى زيادة ضغط الجسم في قسمه الأيمن على سطح التماس وإنقاص هذا الضغط عند القسم الأيسر وإذا تذكرنا أن رد الفعل **N** ليس في الواقع سوى محصلة ردود فعل صغيرة Δ**N** موزعة عند سطح التماس بين الجسمين لتبين لنا أن رد الفعل **N** حين وجود القوة **P** لن يتركز في منتصف المسافة AB ولكن سيكون أقرب إلى B منه إلى A حسب ما هو مبين في الشكل (7-8 أ). والمزدوجة الناتجة عن القوتين **W** و **N** تسعى لمعاكسة المزدوجة الأولى محافظة على توازن الجسم وبذلك تصبح شروط التوازن في هذه الحالة هي

$$F=P \qquad N=W \qquad N(x)=P(h)$$

يؤدي زيادة قيمة القوة P إلى:

- زيادة قوة الاحتكاك F (لأن قوة الاحتكاك كما ذكرنا هي قوة تحريضية لا تتواجد إلا حين لزومها كما أن قيمتها تكون دائماً أصغر قوة لازمة للمحافظة على التوازن).
- زيادة عزم المزدوجة الممانعة للانقلاب نتيجة لاقتراب رد الفعل **N** من الحرف B لأن زيادة القوة P سيزيد الضغط على النصف اليميني من سطح التماس وينقصه عن النصف اليساري.

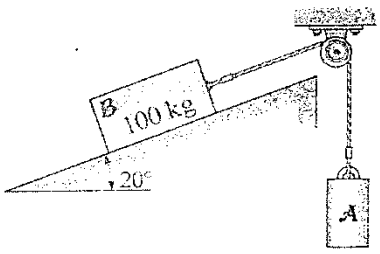
على أن هناك حداً لقوة الاحتكاك F لا تستطيع تجاوزه هو قيمة قوة الاحتكاك الأعظمية F_{max} وكذلك هنالك حد لقيمة المزدوجة المانعة للانقلاب هي $N(b/2)$ أي عند وصول رد الفعل **N** إلى النقطة B يصبح ارتكاز الجسم على المستوي مركزاً على الحرف B ويبدأ الجسم في هذه الحالة بالانقلاب حوله عند أقل زيادة لقيمة القوة P (شكل 7-8 ب) إذ أن عزم المزدوجة القالبة $P(h)$ يصبح أكبر من القيمة الأعظمية لعزم المزدوجة المانعة للانقلاب $N(b/2)$.

إذن حين تكون القوة **P** معدومة يكون رد الفعل **N** معاكساً مباشرة للوزن **W** وعندما تشرع القوة **P** بالازدياد تتولد قوة الاحتكاك **F** ويتحرك رد الفعل **N** باتجاه القوة **P**.

إن الاستمرار في زيادة القوة P سيؤدي إلى زيادة القوة F إلى أن تبلغ قيمتها العظمى كما أنه سيؤدي إلى زيادة عزم المزدوجة المانعة للانقلاب إلى أن تصل إلى قيمتها الحدية $N\ (b/2)$ وهنا نستطيع أن نميز احتمالين:

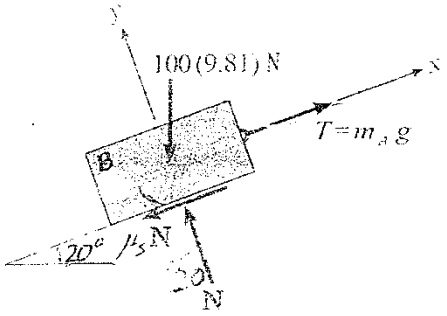
- إذا وصلت قوة الاحتكاك F إلى قيمتها الأعظمية F_{max} قبل أن يصل رد الفعل N إلى الحرف B أي قبل أن يصل العزم المانع للانقلاب إلى قيمته الأعظمية سيفشل التوازن وينزلق الجسم باتجاه القوة P.
- أما إذا وصل العزم المانع للانقلاب إلى قيمته الأعظمية قبل أن تصل [illegible] F لقيمتها الأعظمية F_{max} فإن التوازن سيفشل وينقلب الجسم حول الحرف B.

مثال 7-1



احسب مدى قيم كتلة الجسم A بحيث لا يستطيع الجسم B الذي كتلته تساوي 100 kg أن ينزلق إلى أعلى أو إلى أسفل المستوي المائل علماً أن عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الجسم B والسطح المائل $\mu_s = 0.3$.

الحل:



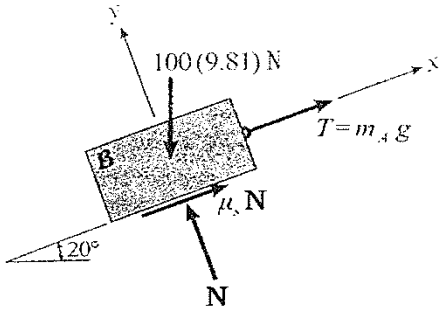
إن أكبر قيمة لكتلة الجسم A هي عندما يكون الجسم B على وشك الانزلاق نحو أعلى المستوي المائل ولذلك تكون قوة الاحتكاك باتجاه أسفل المستوي. نرسم مخطط الجسم الحر للجسم B في هذه الحالة وندرس توازنه. لاحظ أن قوة الشد في الحبل تساوي وزن الجسم A.

$$\nwarrow \Sigma F_y = 0: \quad N - 100(9.81)\cos 20° = 0$$

$$N = 922\ \text{N}$$

$$\nearrow \Sigma F_x = 0: \quad m_A(9.81) - 0.3N - 100(9.81)\sin 20° = 0$$

$$m_A = 62.4\ \text{kg}$$



وإن أصغر قيمة لكتلة الجسم A هي عندما يكون الجسم B على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوي المائل ولذلك تكون قوة الاحتكاك باتجاه أعلى المستوي. نرسم مخطط الجسم الحر للجسم B في هذه الحالة وندرس توازنه.

لدينا من الحالة الأولى $N = 922\ \text{N}$ والتي لاتتغير في الحالة الثانية.

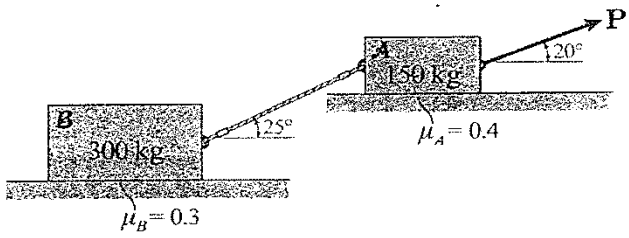
$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \quad m_A(9.81) + 0.3 \times 922 - 100(9.81)\sin 20^\circ = 0$$

$$m_A = 6.0\ \text{kg}$$

وعلى هذا إذا كانت كتلة الجسم A هي بين 6.0 kg و 62.4 kg يكون الجسم B في حالة سكون.

مثال 7-2

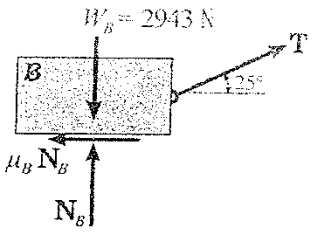
احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** اللازمة لسحب الكتلتين A و B.



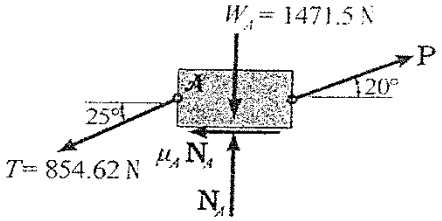
الحل:

لكي تتمكن القوة **P** من سحب الكتلتين يجب أن تصل قوة الاحتكاك بين كل كتلة والسطح الذي تستند عليه إلى قيمتها العظمى أي أن قانون كولومب $(F_s = \mu_s N)$ يكون محققاً لكلا الكتلتين.

نرسم مخطط الجسم الحر للكتلة B وندرس توازنها وذلك من أجل حساب قيمة قوة الشد في الحبل.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -0.3N_B + T\cos 25° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -2943 + N_B + T\sin 25° = 0$$
$$T = 854.6 \text{ N}$$



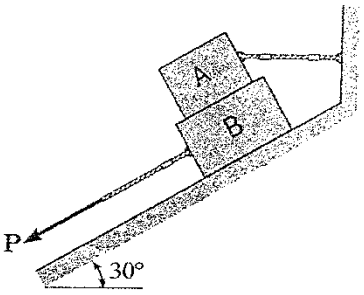
نرسم مخطط الجسم الحر للكتلة A وندرس توازنها من أجل الحصول على قيمة القوة P.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad -854.62\cos 25° - 0.4N_A + P\cos 20° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -854.62\sin 25° - 1471.5 + N_A + P\sin 20° = 0$$
$$P = 1400 \text{ N}$$

وهي القيمة الأصغرية للقوة P اللازمة لسحب الكتلتين.

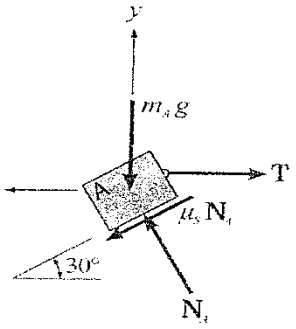
مثال 7-3

يستند جسم A كتلته $m_A = 65\,\text{kg}$ على جسم B كتلته $m_B = 74\,\text{kg}$ الذي يستند على سطح مائل على الأفق بمقدار $30°$ كما يربط الجسم A إلى الجدار بحبل أفقي. احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** الموازية للسطح المائل واللازم تطبيقها على الجسم B لكي ينزلق إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين كافة السطوح $\mu_s = 0.35$.



الحل:

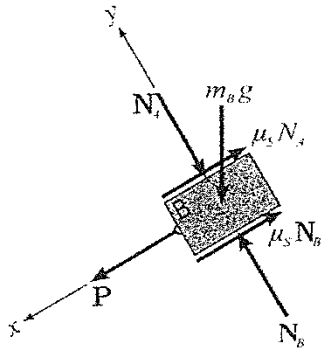
نرسم مخطط الجسم الحر للجسم A عندما يكون على وشك الانزلاق وندرس توازنه من أجل حساب القوة التي يؤثر بها على الجسم B.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -65(9.81) + N_A \cos 30° - 0.35 N_A \sin 30° = 0$$

$$N_A = 922.76 \text{ N}$$

نرسم مخطط الجسم الحر للجسم B وندرس توازنه لإيجاد قيمة القوة $\mathbf{P}$.



$$\nwarrow + \Sigma F_y = 0: \qquad -74(9.81)\cos 30° - N_A + N_B = 0$$

$$N_B = 1551.44 \text{ N}$$

$$\swarrow + \Sigma F_x = 0: \qquad P + 74(9.81)\sin 30° - 0.35 N_A - 0.35 N_B = 0$$

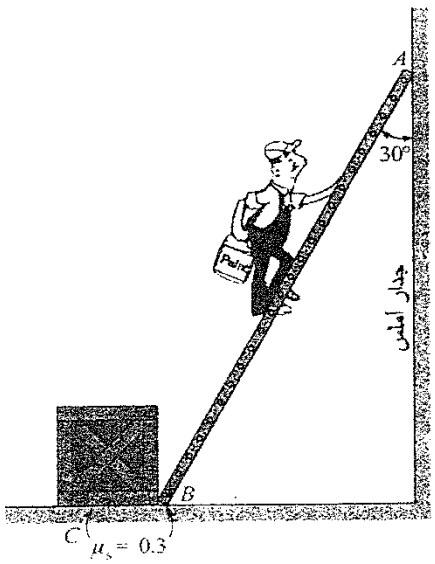
$$P = 503 \text{ N}$$

وهي القيمة الأصغرية للقوة $\mathbf{P}$ الموازية للسطح المائل واللازم تطبيقها على الجسم B لكي ينزلق.

مثال 7-4

يصعد رجل كتلته 100 kg على سلم كتلته 30 kg وطوله 8 m يستند على جدار أملس في A وأرض خشنة في B. وضع الرجل صندوقاً عند أسفل السلم لمنع انزلاقه، والمطلوب:

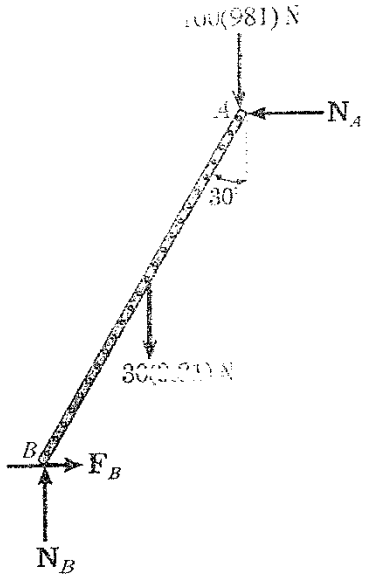
- هل يستطيع الرجل أن يصعد إلى قمة السلم إذا لم يكن الصندوق موجوداً.
- إذا كان وجود الصندوق ضرورياً لمنع انزلاق السلم فما هي كتلة الصندوق



الأصغرية اللازمة لذلك.

الحل:

نعتبر أن الصندوق غير موجود ونرسم مخطط الجسم الحر للسلم بفرض أن الرجل استطاع الوصول إلى قمة السلم وندرس توازنه لإيجاد قوة الاحتكاك بينه وبين الأرض.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -100(9.81) - 30(9.81) + N_B = 0$$

$$N_B = 1275.3 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad 30(9.81)(4\sin 30°) - N_B(8\sin 30°) + F_B(8\cos 30°) = 0$$

$$F_B = 651.34 \text{ N}$$

عندما يكون السلم على وشك الانزلاق تكون قوة الاحتكاك المؤثرة عليه قد وصلت إلى قيمتها العظمى لذلك سنحسب قوة الاحتكاك العظمى ونقارنها بقوة الاحتكاك المحسوبة أعلاه.

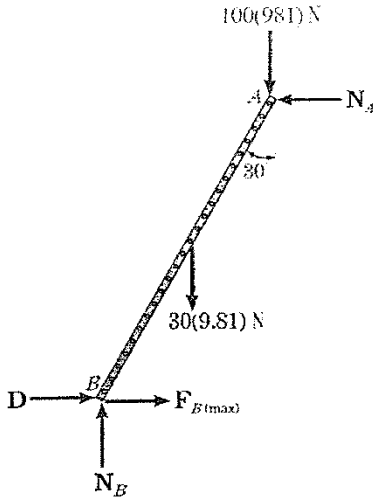
$$F_{B(\max)} = \mu_s N_B = 0.3 \times 1275.3 = 382.6 \text{ N}$$

$$F_B > F_{B(\max)}$$

بما أن قوة الاحتكاك أكبر من قوة الاحتكاك العظمى فهذا يعني أن السلم سينزلق عند صعود الرجل عليه وقبل أن يصل إلى قمته وذلك عندما تصل قوة الاحتكاك إلى قيمتها العظمى أي أن وجود الصندوق ضروري لمنع انزلاق السلم.

عند وضع الصندوق سيقوم بالتأثير على السلم بقوة **D** تمنع انزلاقه.

ترسم مخطط الجسم الحر للسلم في هذه الحالة ونحسب قيمة القوة **D**.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -100(9.81) - 30(9.81) + N_B = 0$$

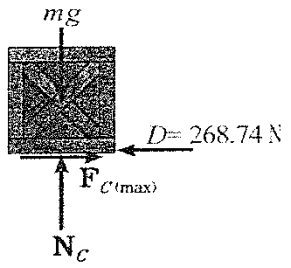
$$N_B = 1275.3 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0:$$

$$30(9.81)(4\sin 30°) - N_B(8\sin 30°) + (\mu_s N_B + D)(8\cos 30°) = 0$$

$$D = 268.74 \text{ N}$$

نرسم بعد ذلك مخطط الجسم الحر الصندوق وندرس توازنه لإيجاد الكتلة اللازمة.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad F_{C(max)} - D = 0$$

$$F_{C(max)} = 268.74 \text{ N}$$

$$F_{C(max)} = \mu_s N_C$$

$$N_C = \frac{F_{C(max)}}{\mu_s} = \frac{268.74}{0.3} = 895.8 \text{ N}$$

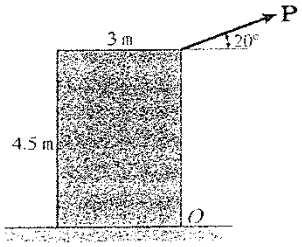
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_C - m(9.81) = 0$$

$$m = 91.315 \text{ kg}$$

وهي كتلة الصندوق الأصغرية اللازمة لمنع انزلاق السلم.

مثال 5-7

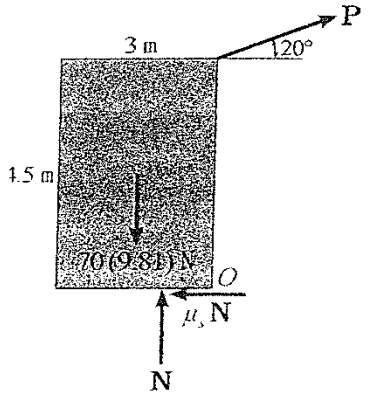
يستند جسم متجانس كتلته 70kg على سطح أفقي خشن. احسب مقدار القوة **P** اللازمة لتحريك الجسم إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الجسم والسطح $\mu_s = 0.25$.



الحل:

عند زيادة قيمة القوة P تدريجياً بدءاً من القيمة صفر يمكن للجسم عند قيمة معينة للقوة P أن يتحرك بإحدى حالتين: إما أن ينزلق نحو اليمين أو ينقلب حول الحرف O.

سنقوم أولاً بحساب قيمة القوة P اللازمة لبدء الانزلاق نحو اليمين. نرسم مخطط الجسم الحر ونلاحظ هنا أن قانون كولومب محقق ثم نطبق معادلتي التوازن على المحورين x و y لإيجاد قيمة القوة P اللازمة لزلق الجسم.



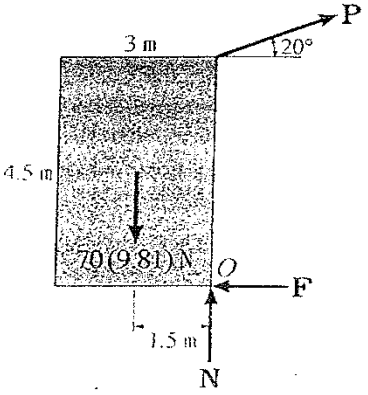
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad P\cos 20° - 0.25N = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad P\sin 20° - 70(9.81) + N = 0$$

بحل المعادلتين حلاً مشتركاً نجد أن

$$P = 167 \text{ N}$$

في الخطوة الثانية نفرض أن الجسم لن ينزلق وإنما سينقلب حول الحرف O وبالتالي سنقوم بحساب قيمة القوة **P** اللازمة لذلك. نرسم مخطط الجسم الحر لهذه الحالة ونلاحظ هنا أن قانون كولومب غير محقق لأننا فرضنا أن الانزلاق لن يحصل نطبق معادلة العزوم لإيجاد قيمة القوة **P** اللازمة لقلب الجسم.



$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0:$$

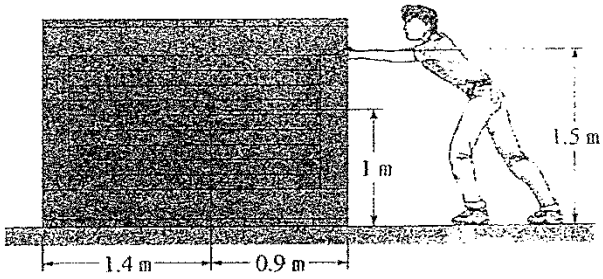
$$-P\cos 20°(4.5) + 70(9.81)(1.5) = 0$$

$$P = 243.6 \text{ N}$$

بما أن القوة اللازمة لزلق الجسم أصغر من القوة اللازمة لقلبه إذاً فعند زيادة تدريجية للقوة P بدءاً من القيمة صفر فإن الانزلاق سوف يحصل أولاً وذلك عند وصول القوة P إلى القيمة 167 N.

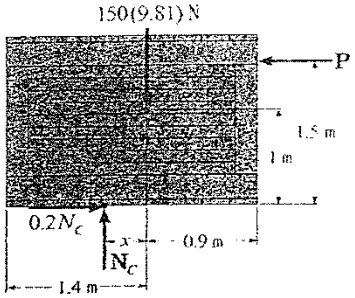
يحاول رجل دفع صندوق كتلته 150 kg ومركز ثقله يقع في النقطة G. إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الصندوق والأرض $\mu_s = 0.2$ وبين حذاء الرجل والأرض $\mu'_s = 0.35$ فالمطلوب:

احسب الكتلة الأصغرية للرجل لكي يتمكن من دفع الصندوق. هل سينقلب الصندوق في هذه الحالة ام لا. افترض أن الرجل يؤثر على الصندوق بقوة أفقية.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر للصندوق ثم نطبق معادلتي التوازن.



$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_C - 150(9.81) = 0$

$N_C = 1471.5 \text{ N}$

$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 0.2N_C - P = 0$

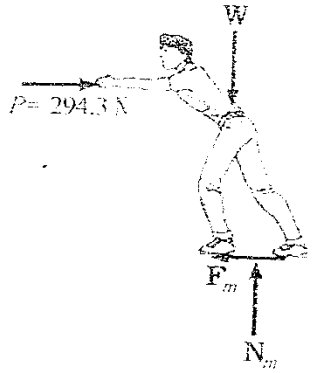
$P = 294.3 \text{ N}$

عند تطبيق قوة دفع P على الصندوق باتجاه اليسار سيتحرك رد فعل الأرض $\mathbf{N}_C$ نحو اليسار مسافة مجهولة x لمعرفة فيما إذا أجل القوة **P** التي تم إيجادها سنقوم بحساب المسافة x ينقلب أم لا.

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad -150(9.81)x + P(1.5) = 0$

$x = 0.3 \text{ m} < 1.4 \text{ m} \quad \rightarrow \quad$ لا ينقلب

نرسم مخطط الجسم الحر للرجل ونطبق معادلتي التوازن على x و y كتلة.



$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -F_m + 294.3 = 0$

$F_m = 294.3 \text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_m - W = 0$

$W = N_m$

$F_{m(\max)} = 0.35 N_m$

$W = N_m = \dfrac{294.3}{0.35} = 840.857 \text{ N}$

$m = \dfrac{W}{g} = \dfrac{840.857}{9.81} = 85.714 \text{ kg}$

وهي كتلة الرجل الأصغرية.

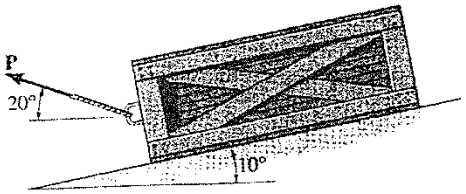
مسائل غير محلولة

مسألة 7-1

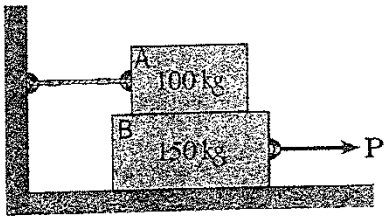
احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** اللازم تطبيقها على الكتلة B لكي تبدأ بالحركة علماً أن عامل الاحتكاك الستاتيكي لكافة السطوح $\mu_s = 0.25$.

مسألة 7-2

تبلغ كتلة الصندوق المبين $350\,\text{kg}$. ما هي قيمة القوة **P** اللازمة لبدء انزلاق الصندوق نحو الأسفل إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بينه وبين والأرض $\mu_s = 0.5$.



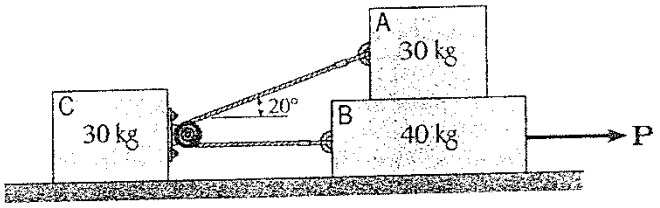
شكل المسألة (7-2)



شكل المسألة (7-1)

مسألة 7-3

وضع جسم A كتلته $30\,\text{kg}$ على جسم B كتلته $40\,\text{kg}$ يستند على سطح أفقي خشن. يصل بين الجسمين حبل خفيف يلف على بكرة ملساء مربوطة مع جسم C كتلته $30\,\text{kg}$ ويستند على السطح الخشن. احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** المطبقة على الجسم B لكي يبدأ في الحركة نحو اليمين إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الكتلتين A و B $\mu_s = 0.4$ وبين كل من الكتلتين B و C والسطح $\mu_s = 0.25$. هل سيبقى الجسم ساكناً أم أنه سيبدأ بالحركة مع الجسم B.



شكل المسألة (7-3)

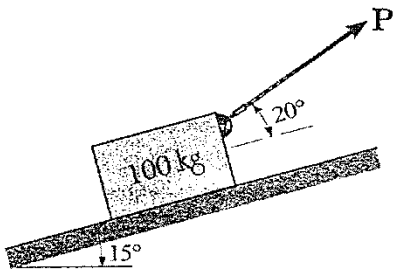
مسألة 7-4

تربط كتلتان بحبل يلف على بكرة تدور بحرية كما هو مبين في الشكل. احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** اللازم تطبيقها على الكتلة A لكي تنزلق إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين كل من الكتلتين والسطح $\mu_s = 0.25$.

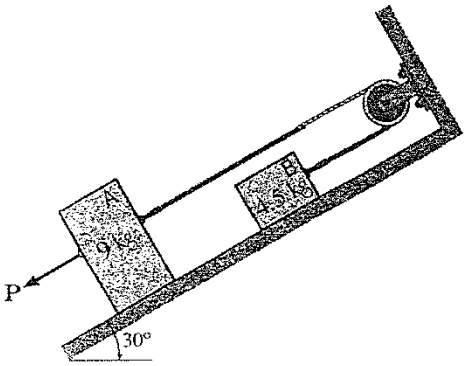
ملاحظة: القوة **P** والحبل موازيان للسطح المائل.

مسألة 7-5

احسب القيمة الأصغرية للقوة **P** اللازمة لبدء حركة الكتلة نحو أعلى المستوي المائل علما أن عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الكتلة والسطح $\mu_s = 0.3$.



شكل المسألة (7-5)



شكل المسألة (7-4)

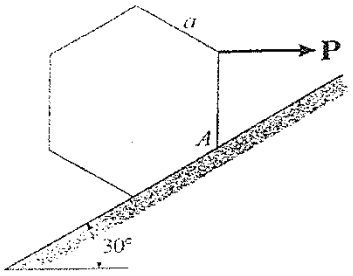
مسألة 7-6

يربط جسمان بحبل يلف على بكرة تدور بحرية كما هو مبين في الشكل. احسب أكبر وأصغر قيمة لوزن الجسم B حتى يبقى الجسمان في حالة توازن، علماً أن وزن الجسم A يساوي 400 N وعامل الاحتكاك الستاتيكي بينه وبين السطح المائل $\mu_s = 0.4$.

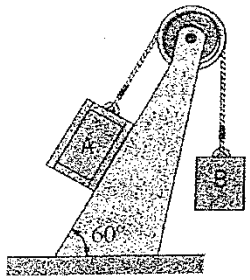
مسألة 7-7

يستند موشور سداسي منتظم وزنه **W** وطول ضلع قاعدته a على مستوي مائل خشن زاويته 30° وعامل الاحتكاك الستاتيكي بينه وبين المستوي μ_s. احسب القيمة الأصغرية للقوة الأفقية **P** المؤثرة عند النقطة اللازمة لبدء زلق الموشور للأعلى وما هي قيمة القوة **P** اللازمة لقلب الموشور حول الحرف A.

هل سينزلق الموشور أولاً أم أنه سينقلب إذا كان $\mu_s = 0.2$.



شكل المسألة (7-7)



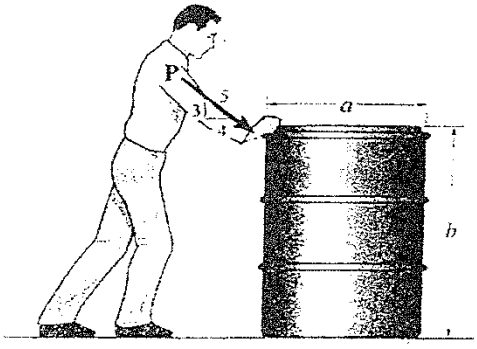
شكل المسألة (7-6)

مسألة 7-8

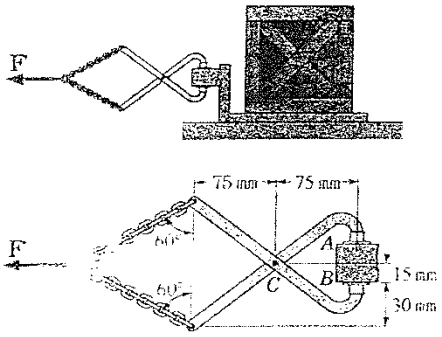
يستند برميل وزنه 500 N على أرض خشنة حيث عامل الاحتكاك الستاتيكي بينهما $\mu_s = 0.6$. إذا كانت $a = 60\,\text{cm}$ و $b = 90\,\text{cm}$ احسب أصغر قيمة للقوة التي يجب أن يطبقها الرجل لكي يتمكن من دفع البرميل.

مسألة 7-9

يبين الشكل ملقطاً يسحب نقالة تحمل صندوقاً كتلته 100 kg. إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين النقالة والأرض $\mu_{s_1} = 0.4$ احسب القيمة الأصغرية لعامل الاحتكاك الستاتيكي بين فكي الملقط والنقالة μ_{s_2} حتى لايحصل انزلاق عند الفكين.



شكل المسألة (7-8)



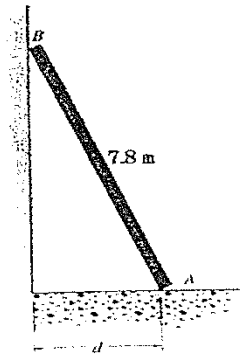
شكل المسألة (7-9)

مسألة 7-10

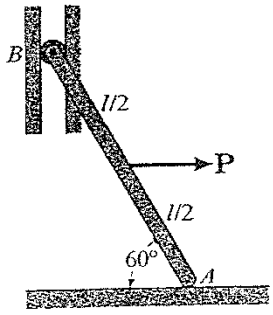
يستند قضيب متجانس طوله 7.8m ووزنه 150N على جدار أملس وأرض خشنة. إذا كانت المسافة $d = 3\,\text{m}$ وعامل الاحتكاك الستاتيكي بين القضيب والأرض $\mu_s = 0.3$ فهل سينزلق القضيب أم يبقى متوازناً.

مسألة 7-11

يرتبط الطرف B لقضيب كتلته 60kg مع بكرة تتحرك في الدليل الشاقولي الأملس. إذا كان عامل الاحتكاك الستاتيكي بين الطرف A والمستوي الأفقي هو $\mu_s = 0.8$ احسب قيمة القوة الأفقية **P** اللازمة لبدء الانزلاق عند A.



شكل المسألة (7-10)



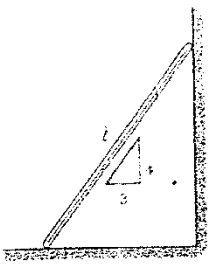
شكل المسألة (7-11)

مسألة 7-12

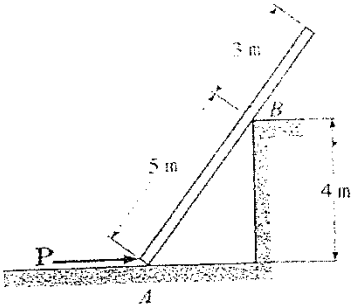
يستند قضيب طوله l وكتلته m إلى جدار شاقولي بزاوية كما هو موضح في الشكل. احسب أصغر قيمة لعامل الاحتكاك الستاتيكي μ_s عند طرفي القضيب بحيث لا ينزلق.

مسألة 7-13

يستند قضيب متجانس كتلته 35kg على أرض وحرف خشنين. احسب قيمة القوة الأفقية **P** اللازم تطبيقها على الطرف A من القضيب لكي يبدأ بالانزلاق نحو اليمين علماً أن عامل الاحتكاك الستاتيكي لكافة السطوح $\mu_s = 0.3$. تهمل سماكة القضيب.



شكل المسألة (7-12)



شكل المسألة (7-13)